

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА

На правах рукописи

Степанов Петр Евгеньевич

**АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ ПЕРЕМОТКИ
РУЛОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В МАШИНАХ
ПОЛИГРАФИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА**

Специальность 2.5.21. – Машины, агрегаты и технологические
процессы (технические науки)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Усов Алексей Георгиевич

Санкт-Петербург – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ	11
1.1 Производственные процессы и оборудование для работы с рулонными материалами.....	11
1.1.1 Печатное оборудование.....	11
1.1.2 Послепечатное оборудование.....	15
1.2 Узел размотки.....	17
1.3 Анализ исследований, посвященных процессам перемотки рулонных материалов	23
1.3.1 Пути решения проблемы стабилизации натяжения полотна	23
1.3.2 Исследования и управления работой ролевых машин.....	28
1.3.3 Исследования напряженно-деформированного состояния рулона ..	29
1.4 Постановка задачи исследования	32
ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ДИНАМИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УЗЛОВ ПЕРЕМОТКИ РУЛОННОГО МАТЕРИАЛА ПОЛИГРАФИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ	34
2.1 Динамическая модель узла размотки.....	34
2.2 Математическая модель узла размотки	40
2.2.1 Уравнения движения	40
2.2.2 Аналитические выражения сил и моментов, действующих в узле размотки	42
2.3 Динамическая и математическая модели узла намотки	47
2.4 Математическая модель перемоточной машины	53
2.5 Редукция математической модели перемоточной машины	62
2.6 ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2.....	71

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕМАТЫВАЕМОГО РУЛОНА ПОЛОТНА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССО-ЦЕНТРОВОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ	73
3.1 Геометрическая модель поперечного сечения рулона как эквидистантной спирали	73
3.2 Определение положения центра масс, массы и момента инерции рулона перематываемого полотна	83
3.3 Исследование геометрии участка полотна между рулоном и сенсорным валом	90
3.4 ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3.....	95
ГЛАВА 4. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ РАЗМОТКИ И ПЕРЕМОТКИ РУЛОННОГО МАТЕРИАЛА	97
4.1 Предварительные замечания. Анализ режима разгона	97
4.2 Постановка задачи управления	106
4.3 Алгоритм согласованного управления	110
4.3.1 Основные положения метода согласованного управления	110
4.3.2 Выбор уравнения согласования	116
4.4 Метод декомпозиции	130
4.4.1 Идеология метода декомпозиции	130
4.4.2 Варианты разделения системы	134
4.5 Управление участком контроля	139
4.6 Согласованное управление в подсистемах	160
4.7 Алгоритм грубого управления вынужденным движением	164
4.8 Наблюдатели	167
4.9 Моделирование системы управления. Преобразование алгоритма управления	169
4.9.1 Спектральный анализ колебаний	169
4.9.2 Расчёт матрицы состояния модели внешнего воздействия	177
4.10 Управление участком намотки	185

4.11 Идентификация параметров.....	190
4.12 ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 4.....	192
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	194
СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ	197
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	198
ПРИЛОЖЕНИЕ А S-МОДЕЛИ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМОТКИ РУЛОННЫХ МАТЕРИАЛОВ	209
ПРИЛОЖЕНИЕ Б АКТЫ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ.....	213

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В технологических процессах текстильной, лёгкой, полиграфической и других отраслях промышленности часто используется оборудование для размотки рулона с целью дальнейшей обработки. Например, в полиграфическом производстве широко распространены ротационные листорезальные машины, основным предназначением которых является роспуск рулона на листы требуемой длины (формата). Непосредственно в области печати можно отметить крупные тиражи печатной продукции, обычно изготавливающиеся на ролевых ротационных печатных машинах, обладающих высокой производительностью. В текстильной и лёгкой промышленности перемотка из рулона в рулон материалов осуществляется, например, при их разбраковке или окрашивании.

Одним из наиболее нагруженных узлов перемоточного оборудования является узел размотки. В процессе перемотки происходит изменение диаметра рулона, его массы и момента инерции. Следует отметить, что из-за нелинейных свойств полотна намотанного материала, неидеальности формы втулки, эксцентриситета оси вращения в процессе перематывания возникают колебания силы натяжения полотна материала, скорости размотки, что в свою очередь влияет на качество продукции и производительность. В полиграфическом производстве, при окраске текстильных полотен колебания скорости полотна могут приводить к нежелательному проскальзыванию и несовпадению красок, а колебания силы натяжения способны менять характеристики полотна вплоть до его разрыва.

В процессе разработки нового и модернизации существующего перемоточного оборудования важной задачей также является анализ и синтез адаптивных алгоритмов управления, с целью получения управляющих воздействий на приводы, позволяющих минимизировать колебания скорости и силы натяжения перематываемого полотна материала.

Исходя из сказанного, разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения для моделирования узлов перемоточных машин текстильной, лёгкой, полиграфической промышленности при учёте свойств полотна, формы втулки и эксцентриситета оси вращения является важной и актуальной задачей, направленной на совершенствование узлов перемоточных машин.

Степень разработанности темы исследования. Надёжная работа узлов размотки и намотки ролевых машин полиграфического оборудования приносит существенный вклад в качество конечной продукции. Ключевыми вопросами динамики этих узлов занимались в разное время такие авторы как Бушунов В. Т., Куликов Б. В., Щербина Ю. В., Смирнов Ю. Н. Проблема стабилизации силы натяжения полотна изучалась в том числе Михайловым И. Е., Удинцевой С. Н.

Современное полиграфическое оборудование имеет высокую степень автоматизации. Алгоритмы управления узлами размотки и намотки были изучены в том числе Дроздовым В. Н., Мирошником И. В. и другими.

Цель и задачи работы. Цель диссертации заключается в разработке методического, математического, алгоритмического и программного обеспечения для исследования процессов перемотки рулонных материалов в полиграфических машинах, разработке алгоритмов управления приводами узлов размотки и намотки этих машин. Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие задачи:

1. Обзор процессов и оборудования для перемотки рулонного материала, используемого в полиграфическом производстве, конструктивных особенностей узлов размотки и намотки.

2. Разработка динамических и математических моделей узлов размотки и намотки перемоточной машины, учитывающих особенности схемы проводки полотна.

3. Разработка геометрической модели поперечного сечения рулона, учитывающая форму поперечного сечения втулки. Разработка алгоритмического и программного обеспечения для исследования и анализа геометрических характеристик рулонов и параметров узлов перемоточной машины.

4. Разработка функциональной схемы системы управления приводами перемоточной машины, обеспечивающей выполнение технологических требований (скорость и сила натяжения полотна материала).

5. Синтез алгоритма управления перемоточной машиной. Разработка алгоритмического и программного обеспечения для моделирования и исследования управляемого процесса перемотки рулонного материала.

Научная новизна. Научная новизна диссертационной работы заключается в том, что:

- разработана компоновочная схема перемоточной машины с сенсорными валами и системой автоматического управления приводами, которая обеспечивает выполнение требуемых технологических условий перемотки, например, заданной величины натяжения полотна;

- предложена геометрическая модель поперечного сечения рулона в виде эквидистантной спирали; исследованы геометрические свойства спирали, используемые в динамических и математических моделях узлов машин;

- предложена метод определения массо-инерционных характеристик вращающегося рулона в процессе его размотки и намотки с учётом неидеальности формы его поперечного сечения и биения;

- разработаны динамические и математические модели узлов размотки, намотки и перемоточной машины в целом, учитывающие биение и неидеальность формы поперечного сечения рулона, механические характеристики приводов, упругость полотна на участках;

— предложена схема подчинённой системы управления на основе декомпозиции объекта управления, представленного перемоточной машиной, с использованием метода согласованного управления;

— разработано математическое, алгоритмическое и программное обеспечение для расчёта и исследования эквидистантной спирали и её параметров;

— разработан метод синтеза алгоритма управления перемоточной машиной на основе методов декомпозиции и согласованного управления.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость выполненных в диссертационной работе исследований заключается в том, что:

— разработаны методы анализа и совершенствования процессов и оборудования для перемотки рулонных материалов в машинах полиграфического производства;

— разработаны адаптивные алгоритмы управления, позволяющие учитывать колебания узлов перемоточных машин.

Практическая значимость работы заключается в том, что:

— разработаны алгоритмы и компьютерные программы, позволяющие моделировать поперечные сечения рулонов с учётом формы втулок;

— созданы алгоритмы и компьютерные программы для решения задач оптимального управления приводами с целью получения заданных значений скорости и силы натяжения полотна;

— разработаны компьютерные программы, позволяющие моделировать работу перемоточной машины в различных режимах;

— результаты диссертационного исследования применяются в учебных целях, а также в научно-исследовательской деятельности в СПбГУПТД.

Материалы диссертации, разработанное алгоритмическое и программное обеспечение используется в учебном процессе Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и

дизайна на кафедре машиноведения при подготовке бакалавров и магистров по направлениям 15.03.02 и 15.04.02 – «Технологические машины и оборудование», а также, при подготовке аспирантов, обучающихся по направлению 2.5.21. — Машины, агрегаты и технологические процессы.

Методология и методы исследований. При выполнении диссертационной работы применялись методы математического анализа, теории колебаний, нелинейной механики, теории автоматического управления, аналитического и численного моделирования, методы спектрального анализа.

Положения, вынесенные на защиту:

— компоновочная схема перемоточной машины с сенсорными валами и системой автоматического управления безредукторными приводами;

— математическая модель перемоточной машины с учётом особенностей схем проводки полотна и изменения массо-инерционных характеристик рулонов;

— геометрическая модель поперечного сечения рулона, представленного в виде эквидистантной спирали;

— синтез адаптивного алгоритма согласованного управления перемоточной машины с учётом предварительной декомпозиции объекта управления.

Соответствие диссертационной работы паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена в рамках паспорта научной специальности 2.5.21. — Машины, агрегаты и технологические процессы ВАК Министерства науки и высшего образования РФ и соответствует следующим его пунктам:

1. Разработка научных и методологических основ, технических и технологических требований к проектированию и созданию новых машин, агрегатов и технологических процессов;

4. Исследования параметров машин и агрегатов и их взаимосвязей при комплексной механизации основных и вспомогательных процессов и операций с использованием моделирования, численных и физических экспериментов;

7. Исследование с учётом эксплуатационных условий технологических процессов, динамики машин, агрегатов, узлов и их взаимодействия с окружающей средой.

Степень достоверности результатов работы. Достоверность результатов подтверждается обоснованным применением методов математического моделирования, теории автоматического управления, аналитического и численного решения математических моделей. Установлены качественные и количественные совпадения результатов моделирования с данными, полученными в рассматриваемой области ранее. Использованы современные методы и средства исследований, методы сбора и обработки исходной информации по теме диссертации; современные информационные технологии и вычислительная техника.

Апробация результатов работы. Основные результаты работы прошли положительную апробацию на XVI Санкт-Петербургской международной конференции «Региональная информатика (РИ-2018)», Всероссийской научной конференции молодых учёных «Инновации молодёжной науки», Международной научно-технической конференции Light Conf 2021. Также получены акты об использовании результатов диссертационной работы в ООО «ТИПОГРАФИЯ ЛИТАС +», ООО «РосБалт» и АО «СПб Образцовая Типография».

Публикация результатов диссертации. По результатам выполненных исследований опубликовано 4 статьи в журналах, входящих в «Перечень ...» ВАК РФ, 4 тезиса докладов.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Производственные процессы и оборудование для работы с рулонными материалами

1.1.1 Печатное оборудование

На сегодняшний день печатные издания по-прежнему являются одним из источников информации, несмотря на продолжающееся сокращение тиражей вследствие широкого развития интернета и электронных носителей. Но помимо книг, журналов, газет и прочего, актуальным остаётся производство и этикеточной и упаковочной продукции. Всё это относится к полиграфической продукции [1]. Приведём упрощённо схему производства с указанием некоторых видов используемого оборудования (рисунок 1.1).

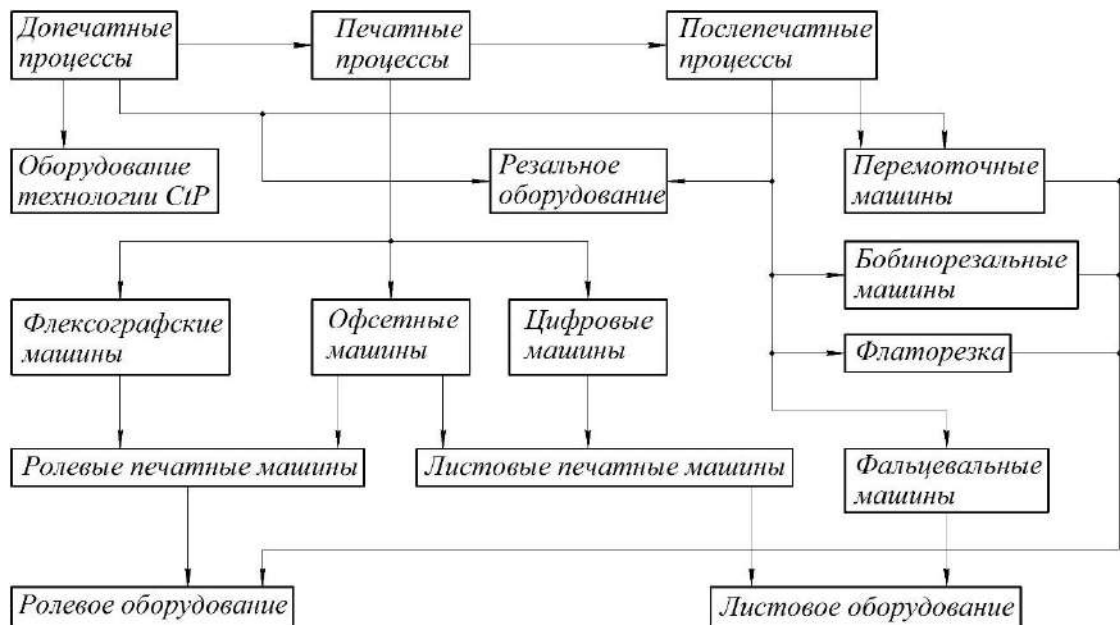


Рисунок 1.1 — Процессы и оборудование производства полиграфической продукции

В печатном и послепечатном процессах исходным материалом являются листы или рулон. При печати больших тиражей эффективны ролевые печатные

машины. Для нарезки листов требуемого формата используются ротационные листорезальные машины.

Рассмотрим далее некоторые виды полиграфического оборудования, работающего с рулонным материалом (подобное оборудование используется и в других отраслях промышленности).

В технологических процессах текстильной, лёгкой, полиграфической и других отраслях промышленности часто используется оборудование для размотки рулона с целью дальнейшей обработки полотна материала. Например, в полиграфическом производстве для печати (рисунок 1.1) широко распространены ролевые машины. В качестве примера можно рассмотреть рулонную печатную машину, действующую по принципу «из рулона в рулон» (рисунок 1.2).

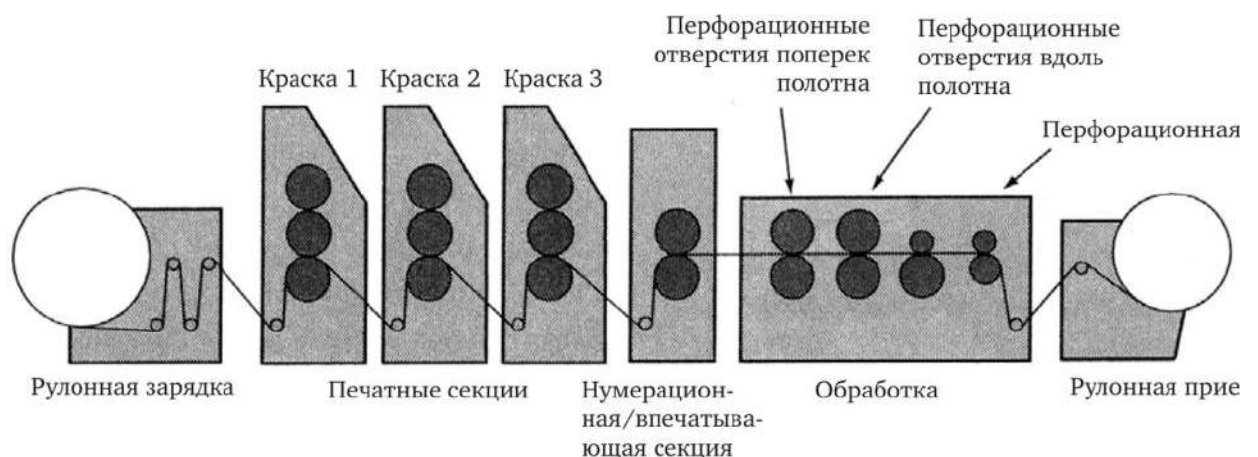


Рисунок 1.2 — Схема рулонной печатной машины линейного построения

В состав таких машин помимо печатных секций и различного оборудования для дополнительной обработки полотна входят также:

- лентопитающая система с одной или несколькими рулонными зарядками с приводом и тормозом, стабилизатором натяжения бумажной ленты и устройством автоматической склейки лент;
- лентопроводящая система, в которую входят различные лентоведущие (тянущие) цилиндры, включая печатные аппараты, лентонаправляющие

валики, поворотные штанги, устройства приводки красок и рубки ленты, устройство предварительной проводки бумажной ленты через машину.

Помимо схемы «из рулона в рулон», существуют машины, которые проводят печать на рулонном материале, а далее производят его рубку определённого формата. В качестве примера на рисунке 1.3 изображена печатная машина KBA Prisma фирмы KDA [2].

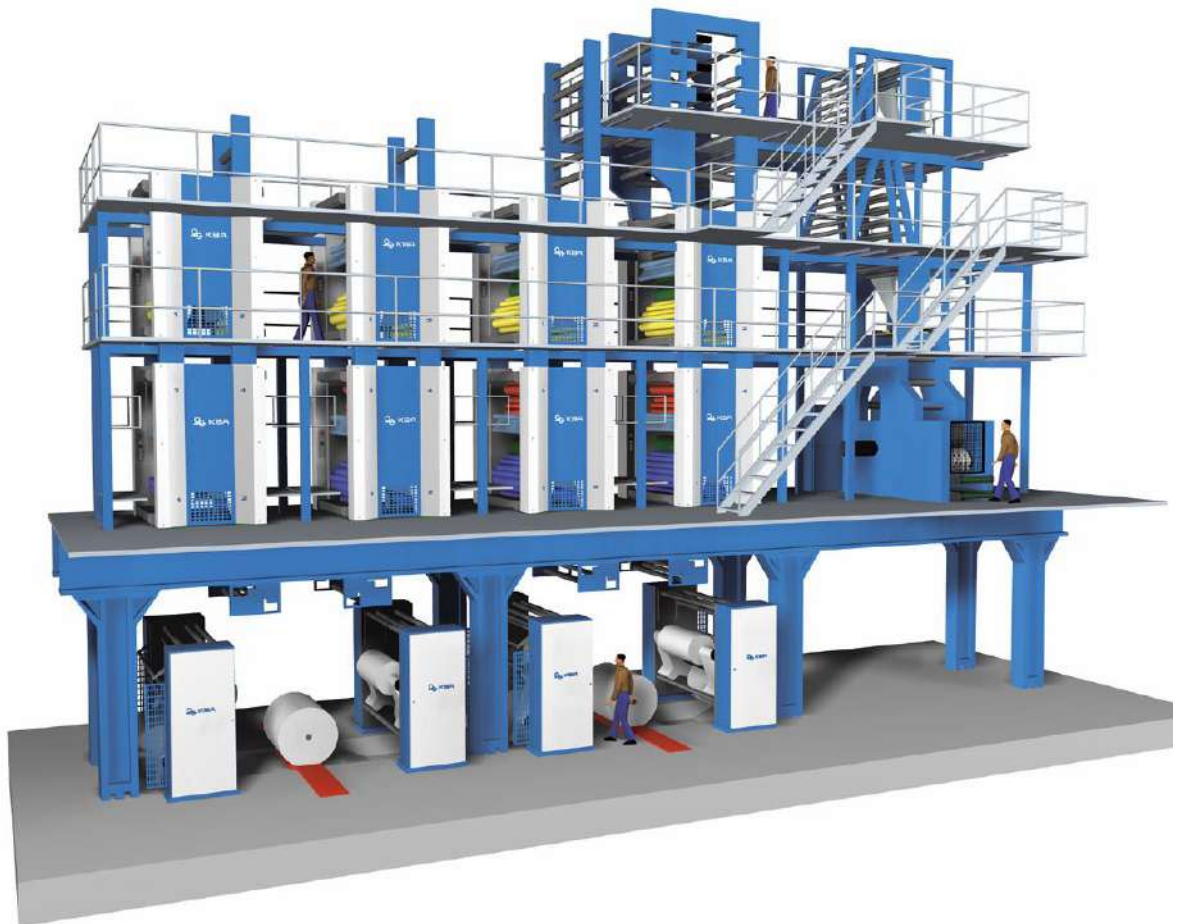


Рисунок 1.3 — KBA prisma

Характеристики KBA Prisma следующие:

- Максимальная ширина бумажного полотна – 1680 мм, другие значения по запросу
- Длина рубки – 470, 500, 510, 520, 530, 533, 546, 560, 578 и 598.5 мм
- Максимальная производительность – 80000 копий в час

- Печатные секции - Четырехуровневые печатные башни типа «Н»
- Безваловые привода KBA DriveTropic – Индивидуальный привод переменного тока на каждую печатную пару
- Автоматизация: –
 - распределенное управление на компонентном уровне,
 - передовая консольная технология с управлением, ориентированным на продукт и широким выбором опций
- Рулонная зарядка KBA Pastomat C –
 - максимальный диаметр рулона - 1270 мм,
 - максимальный вес рулона – 1.8 т

На рисунке 1.4 представлен узел размотки этой машины.



Рисунок 1.4 — KBA Pastomat C

Лентопитающая система печатной машины состоит из устройств и механизмов, необходимых для проводки рулонной бумаги в первую печатную секцию. Она включает все оборудование от рулонной зарядки до первой печатной секции, которое управляет скоростью, натяжением и поперечным

положением бумажной ленты. Система поддерживает бумажную ленту в натянутом плоском состоянии, в котором лента должна попадать в печатную секцию.

1.1.2 Послепечатное оборудование

В существующих циклах производства различной полиграфической продукции можно выделить ещё ряд задач, связанных с обработкой рулонного материала. Одной из часто встречающихся задач, выполняемых в типографиях, является роспуск рулона на листы определённого формата. Эта задача решается посредством ротационных листорезальных машин (флаторезка). Подобные машины также в своём составе имеют рулонную зарядку. Как пример, на рисунках 1.5-1.6 показаны общий вид и схема построения флаторезки GM-1400 [3].



Рисунок 1.5 — Ротационная листорезальная машина GM-1400

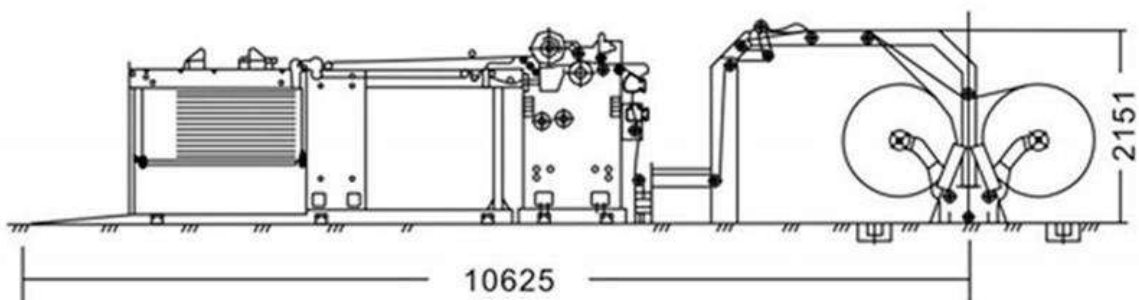


Рисунок 1.6 — Схема построения GM-1400

Приведём характеристики машины GM-1400 (таблица 1.1).

Таблица 1.1. Характеристики GM-1400

Рабочая ширина роля на размотке (макс)	1400 мм
Скорость резки (макс)	300 <i>рез/мин</i>
Линейная скорость	300 <i>м/мин</i>
Материал	Бумага, картон 50 – 500 <i>гp/м²</i>
Максимальный диаметр рулона	1600 мм
Максимальная ширина рулона	1400 мм
Длина нарезаемых листов	400 – 1600 мм
Точность реза	±0,4 мм

Задача получения из исходного рулона рулонов меньшего диаметра решается с помощью перемоточных машин (перемотчики, ПМ). На рисунке 1.7 показан высокоскоростной перемотчик компании JMC [4].



Рисунок 1.7 — Перемоточная машина JMC

Также следует отметить бобинорезательные машины, на которых выполняется резка рулонного материала вдоль по машинному направлению.

1.2 Узел размотки

Одним из общих узлов ранее рассмотренных машин, является узел размотки (рисунки 1.8-1.11). Его предназначение состоит непосредственно в разматывании рулона с соблюдением необходимых условий — в первую очередь речь идёт о натяжении полотна материала с целью его контролируемого движения.



Рисунок 1.8 — Узел размотки листорезальной машины HQD-B2 [5]



Рисунок 1.9 — Узел размотки листорезальной машины DFJ-G [5]



Рисунок 1.10 — Узел размотки листорезальной машины
SuperCUT-1100B [5]

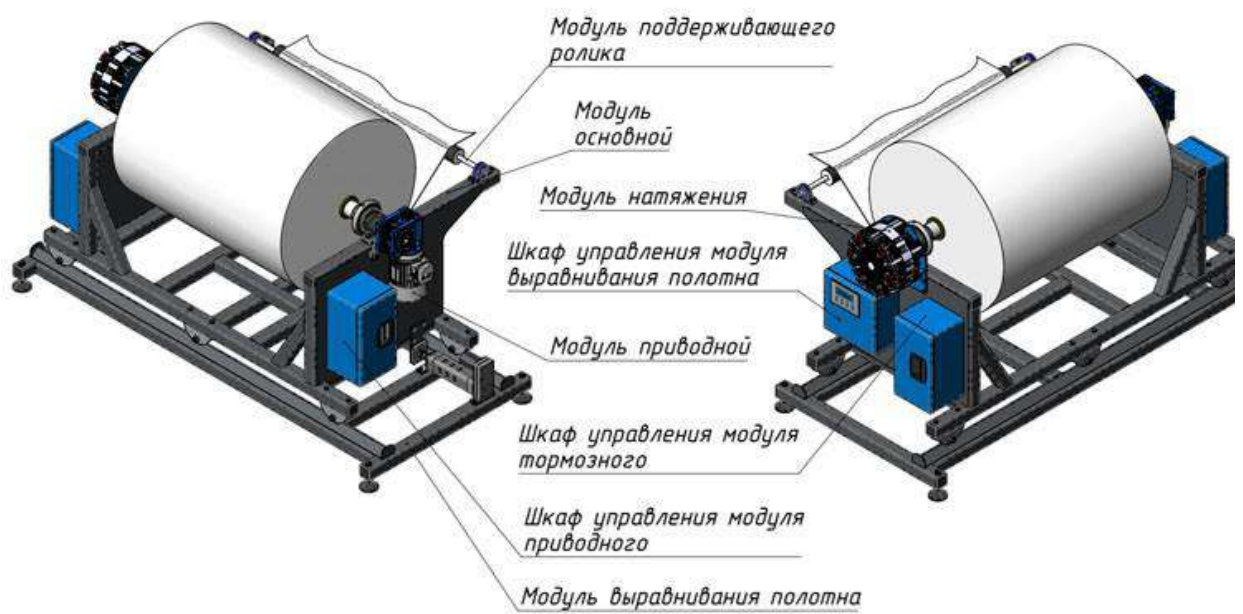


Рисунок 1.11 — Узел размотки

Кроме непосредственно рулона и конструкции, его удерживающей, показанной на рисунках 1.8-1.11, бумагоподающие (лентопитающие) системы (ролевая зарядка) включают в себя подсистемы контроля натяжения полотна и контроля положения полотна (рисунок 1.12).

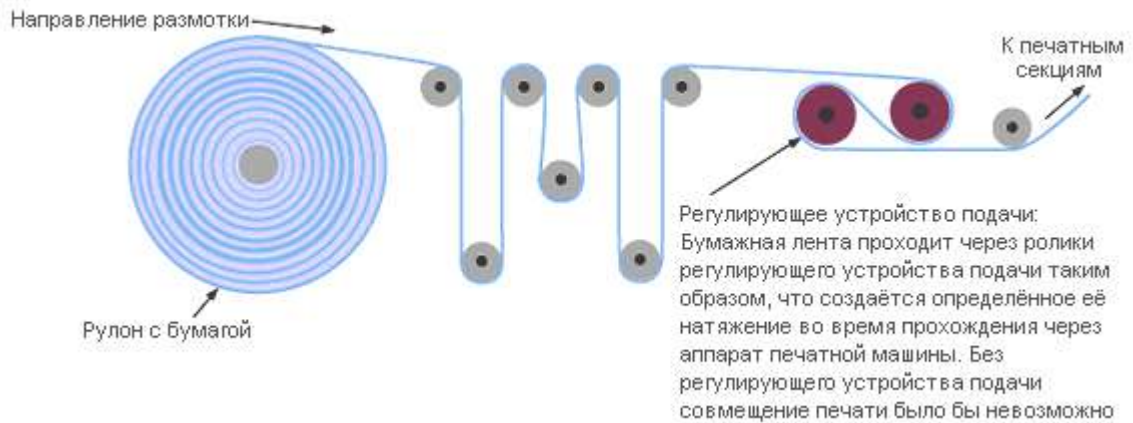


Рисунок 1.12 — Бумагоподающий узел печатной машины

Рассмотрим составляющие узла размотки и вышеперечисленных подсистем подробнее на примере, представленном на рисунке 1.13.



Рисунок 1.13 — Схема проводки бумаги

На данной схеме рулоны закреплены на пневмовалах и зажимах безопасности. Пневматический вал представляет собой конструкцию из цилиндра с выдвижными элементами, которые выдвигаются под действием сжатого воздуха, тем самым обеспечивая фиксацию втулки на валу. Отметим, что это, безусловно, не единственный способ закрепления рулона (рисунок 1.14).

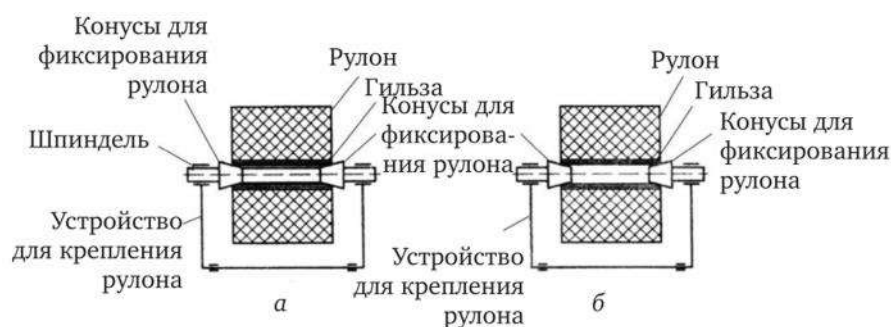


Рисунок 1.14 — Способы крепления рулона:

а — шпиндельное, б — бесшпиндельное

Строго говоря, можно выделить таким образом три возможных варианта закрепления рулона: безосное, с осью и с применением пневмовалов.

Размотка рулона происходит под действием силы натяжения полотна материала, создаваемой в общем случае лентоведущими цилиндрами, вращающимися от своих индивидуальных приводов. При этом на разматываемом рулоне (далее — рулон размотки) стоит тормозящее устройство, участвующее в обеспечении необходимой силы натяжения полотна материала.

На рисунке 1.12 показаны лентонаправляющие валики, которые не имеют собственных приводов и вращаются под действием силы трения при возникающем контакте с полотном материала (см. раздел 2.2.2). Их предназначение заключается в выравнивании полотна, изменении направления движения, а также регулировке натяжения полотна по ширине. Выравнивание полотна также может осуществляться специальными

устройствами, например, поворотной рамой с направляющими валиками или поворотными качающимися валами (рисунки 1.15-1.16) [6]. Следует отметить, что контроль равнения полотна также предусматривает и перемещение рулона, для чего может быть задействован, например, линейный привод (актуатор на рисунке 1.13).

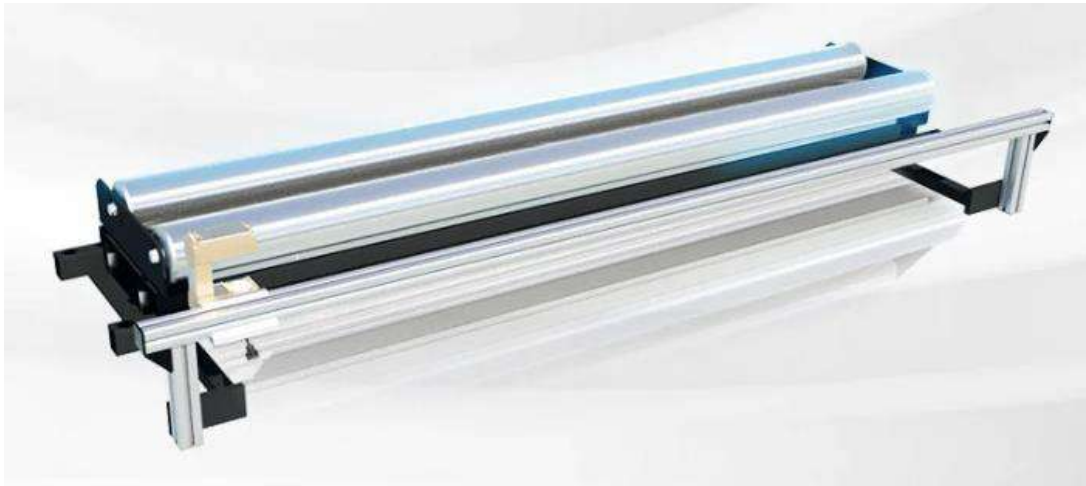


Рисунок 1.15 — Система поворотных качающихся валов ELROLLER

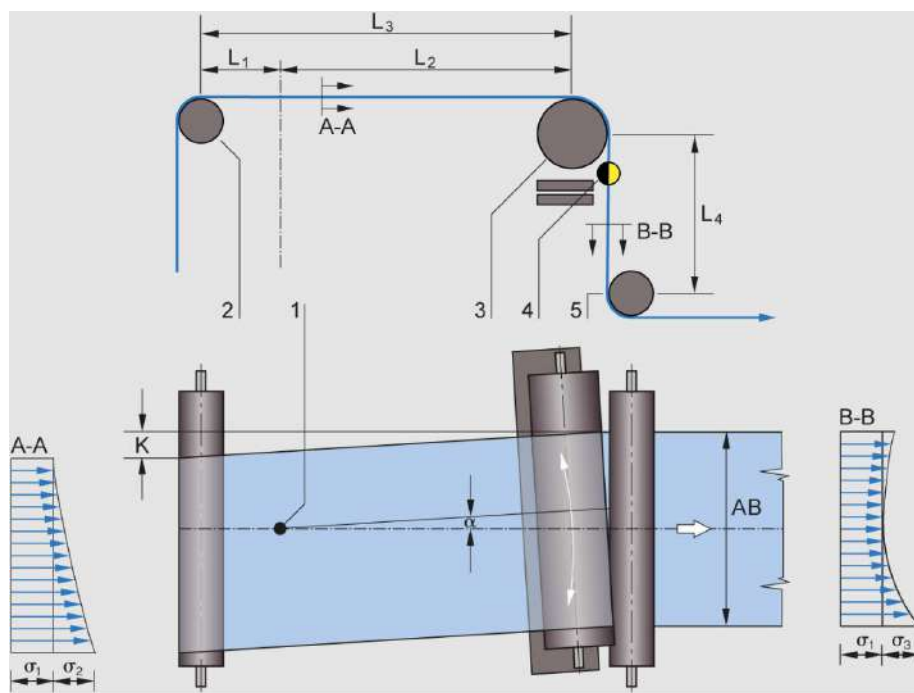


Рисунок 1.16 — Функциональная схема системы поворотных качающихся валов

На рисунке 1.16: А — распределение натяжения полотна на входе, В — распределение натяжения полотна на выходе, К — коррекция хода полотна, α — угол коррекции, σ_1 — основное натяжение полотна, σ_2 — распределение натяжения за счет поворотного движения рамы с валами на входе, σ_3 — распределение натяжения за счет поворотного движения рамы с валами на выходе, 1 — точка вращения, 2 — входной вал, 3 — исполнительный(-ые) вал(-ы), 4 — датчик, 5 — фиксирующий вал, L_1 — входная длина к точке вращения, L_2 — входная длина, точка вращения к поворотному качающемуся валу, L_3 — входная длина, L_4 — выходная длина.

Контроль натяжения полотна включает в себя получение информации о силе натяжения полотна материала. Существуют различные решения данного вопроса, но в общем их можно разделить на два класса: системы с плавающим (танцующим) валиком и системы с неподвижным сенсорным валом.

Рассмотрим сенсорный вал PD 30 (рисунок 1.17) [6].



Рисунок 1.17 — Сенсорный вал PD 30

В корпус этого вала интегрированы два датчика усилия. Принцип действия датчика усилия проиллюстрирован на рисунке 1.18. Здесь обозначено: F_1 и F_2 — проекции силы натяжения F на пару ортогональных

осей (на рисунке обозначены штрихпунктирными линиями), угол обхвата равен $\pi - \beta - \alpha$.

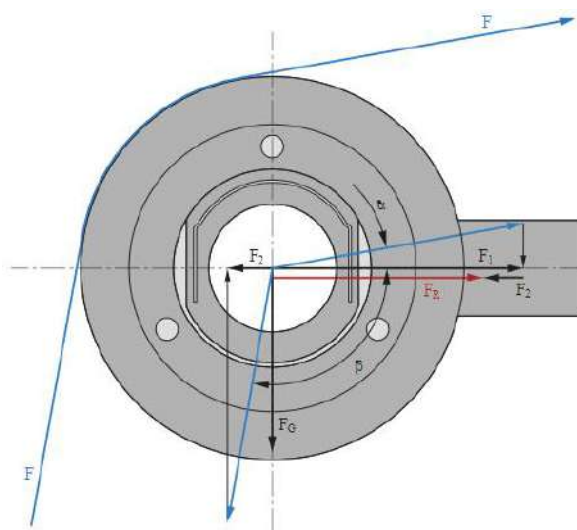


Рисунок 1.18 — функциональная схема датчика усилия

$$F_1 = F \cos \alpha, \quad F_2 = F \cos \beta, \quad F_R = F_1 + F_2.$$

Основываясь на приведённой схеме, можно сделать вывод, что датчик показывает значение результирующей силы натяжения. В силу того, что как показано в главе 2 в действительности силы натяжения полотна на участках до и после вала разные, одну из составляющих измерения имеет смысл убрать, чего можно достигнуть, если угол β будет прямым.

1.3 Анализ исследований, посвященных процессам перемотки рулонных материалов

1.3.1 Пути решения проблемы стабилизации натяжения полотна

Основные требования к лентопитающей системе включает в себя обеспечение постоянства силы натяжения и скорости полотна материала. Это обусловлено как необходимостью контролируемого движения полотна с целью, например, исключения неприводки полотна, приводящее к ухудшению качества печати, так и сохранением физико-механических параметров, нарушение которых также может привести к вышеупомянутым последствиям.

В случае недостаточной силы натяжения полотна, оно может провиснуть, а чрезмерное большое её значение повышает вероятность обрыва.

Проблема стабилизации силы натяжения полотна материала была исследована во множестве работ, например, [7-11]. Рулон является объектом с переменными параметрами, кроме того, вследствие, например, неправильного хранения, форма его поперечного сечения становится приближенной к овалу. Овальность может образоваться и как результат изначального отклонения формы поперечного сечения от круга. Следует отметить и отклонение оси вращения рулона от геометрической оси, проходящей через центры тяжести торцов, при установке его в механизм размотки. Все эти факторы неизбежно приводят к тому, что у скоростей точек полотна на сходе полотна материала с рулона, появляются периодические составляющие. В свою очередь, даже при идеальной форме поперечного сечения втулки и соблюдении прочих факторов, наличие одного только эксцентриситета оси вращения приводит к по сути таким же колебаниям. Например, одна из составляющих момента сил в уравнении вращательного движения рулона — это момент, создаваемый силой тяжести рулона.

Требуемая величина силы натяжения полотна материала может быть реализована посредством плавающего валика (рисунок 1.19).

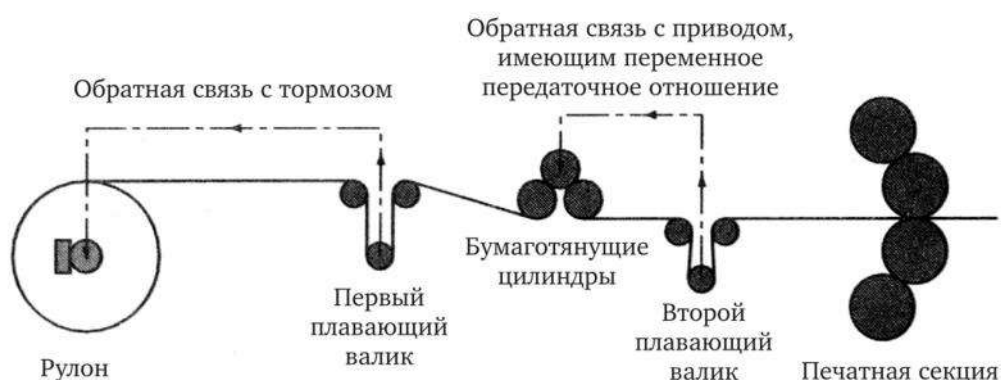


Рисунок 1.19 — Система натяжения бумажной ленты

В процессе размотки рулона ось плавающего валика совершает возвратно-поступательное движение. В работе [12] были исследованы динамические свойства пружинно-масляного амортизатора натяжения бумажной ленты (рисунок 1.20) и со свободным плавающим валиком.

Уравнение пружинного амортизатора с демпфером можно записать в следующем виде:

$$T_a^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2\zeta_a T_a \frac{d\alpha}{dt} + \alpha = k_a \varepsilon_0$$

где α — угол поворота штанги амортизатора, $T_a = \sqrt{\frac{J_a}{c_{np} l_a^2}}$ — постоянная

времени, $\zeta_a = \frac{k_\delta}{2l_a l_\delta^2 \sqrt{J_a c_{np}}}$ — степень демпфирования, $k_a = \frac{2b\delta E_\delta}{c_{np} l_a^2}$ —

коэффициент передачи, ε_0 — относительное удлинение, J_a — момент инерции, c_{np} — жёсткость пружины, k_δ — коэффициент демпфирования, l_a — длина штанги, l_δ — расстояние от точки подвеса демпфера до оси вращения.

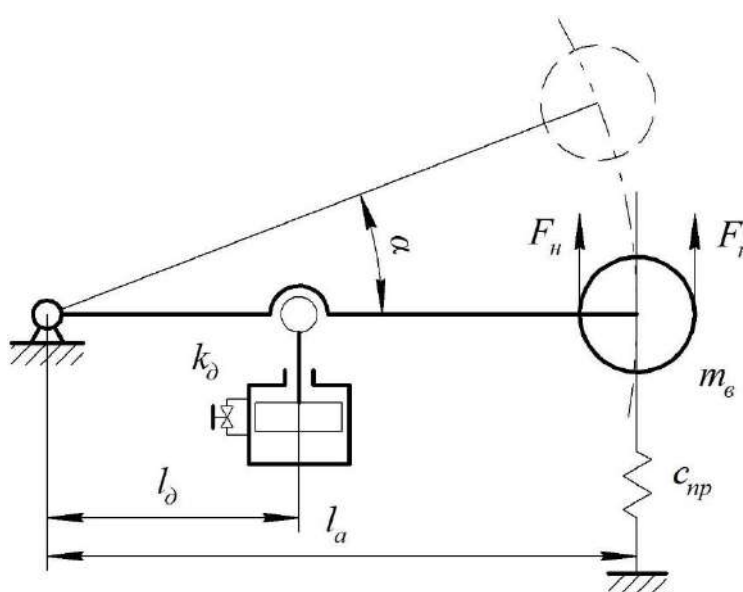


Рисунок 1.20 — Пружинно-масляный амортизатор с качающимся валиком

Несмотря на то, что уравнение динамики имеет второй порядок, показано, что при определённых сочетаниях параметров динамические свойства этого амортизатора с достаточной точностью соответствуют свойствам апериодического звена.

На колебания величины силы натяжения полотна кроме конструктивных факторов влияют и механические свойства самого полотна. Бумага является достаточно сложным материалом и процесс её деформации зависит от множества параметров. Как показано в работах [13-15], в качестве идеализированной модели, с достаточной точностью описывающей реологические свойства бумаги, может использоваться модель вязкоупругого тела (рисунок 1.21).

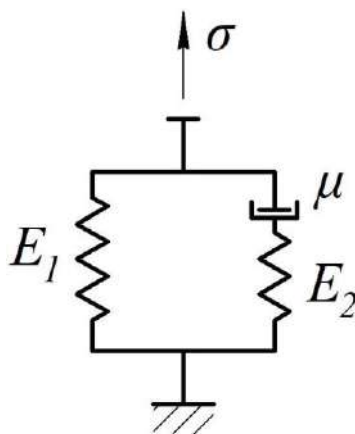


Рисунок 1.21 — Элементная модель вязкоупругого тела

Уравнение вязкоупругости, соответствующее этой модели, имеет вид:

$$\sigma + \frac{\mu}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} = E_1 \varepsilon + \frac{\mu}{E_2} (E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt},$$

где σ — механическое напряжение в полотне, ε — относительная деформация полотна, E_1 — статический модуль упругости, $E_1 + E_2$ —

динамический модуль упругости, μ — коэффициент вязкости. Поскольку время прохождения полотна бумаги по участкам машины достаточно мало в сравнении с постоянной времени релаксации, то вязкие свойства полотна можно не учитывать. Учитывая эти факторы, допустимо считать, что полотно является однородным, абсолютно упругим, гибким и невесомым, а деформация в нём происходит практически мгновенно.

Важность стабилизации силы натяжения полотна материала подтверждается ещё одним фактором. Как показано в [16-18], на участках свободного провисания могут возникнуть поперечные колебания полотна, инициированные продольными колебаниями (рисунок 1.22).

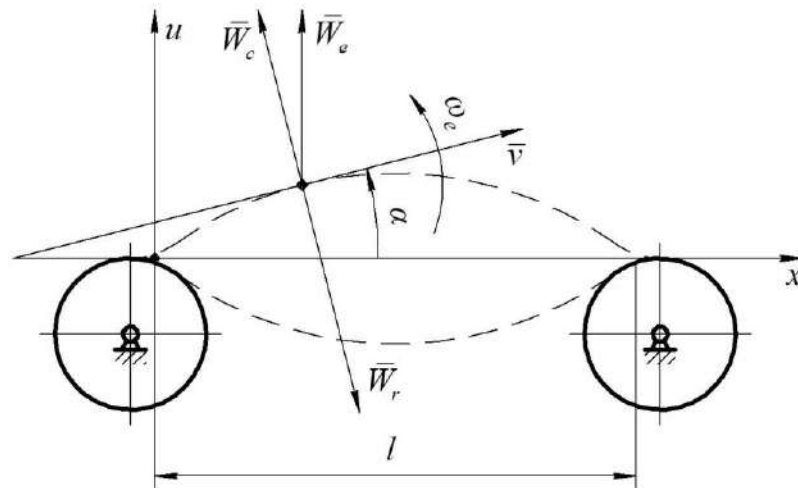


Рисунок 1.22 — Схема поперечных колебаний полотна

На рисунке 1.22 обозначено: $v = \text{const}$ — скорость полотна материала, $\bar{W}_c$ — кориолисово ускорение точек полотна, α — угол касания. Дифференциальное уравнение в частных производных, описывающие поперечные колебания можно записать в следующем виде:

$$u_{tt} + 2vu_{tx} + v^2u_{xx} - Du_{xxxx} = 0,$$

где $u = u(x, t)$ — функция, описывающая прогиб полотна, D — изгибная жёсткость материала. Как было установлено при анализе решений этого уравнения, при определённых сочетаниях условий существует возможность возникновения параметрического резонанса, что, безусловно, является нежелательным фактором в исследуемых процессах.

1.3.2 Исследования и управления работой ролевых машин

В работе [19] исследовано мехатронное устройство для размотки рулонных материалов в дискретном режиме. Рассматривается мехатронная система приводов с рекуперацией энергии, состоящая в том числе из пневмоцилиндра и пружинного аккумулятора. Особенностью этой системы является отсутствие тормоза на рулоне, обеспечивающего постоянное натяжение полотна.

В книге [15] приводятся исследования по динамике бумажного полотна, движущегося в бумагоподающих системах. Рассмотрены деформации полотна, его поперечные смещения и вибрации. Установлено, что возникающие на этапах разгона и выбега отклонения от номинала сил натяжения полотна носят ступенчатый характер и вызывают сложные переходные процессы. В установившемся режиме источниками колебаний служат дефекты разматываемого рулона, биения и прогибы бумаговедущих валов и колебания скорости приводов. Исследованы резонансные явления, обуславливающие вибрации полотна и его обрывы. Сопоставлены две модели колебаний: вынужденных и параметрических. Исследованы работы пассивных стабилизаторов натяжения. Изучены поперечные колебания полотна на участках его провисания.

Статья [20] посвящена вопросу моделирования системы автоматического моделирования (САУ) продольно-резательным станком бумагоделательной машины. Приводится структурная схема системы управления. В статье [21] авторами изучается моделирование колебаний

валов. Приводится система уравнений, описывающих колебания и анализ решений.

Исследования Е. А. Воронова [22], посвященные рулонным печатным машинам, показали, что дефекты печати («неприводка печати») во многом обусловлены чрезмерным растяжением бумажного полотна. Растяжения вызваны ошибками настройки печатной машины и динамическими процессами, порожденными вращением печатных пар, подающих полотно. Эти динамические процессы вызваны особенностями функционирования электромеханических систем приводов. В одноприводных машинах согласование угловых скоростей подающих пар осуществляется с помощью механических трансмиссий, податливость которых вызывает дополнительную подвижность пар. Установлено, что уменьшения неприводки легче добиться в машинах с индивидуальными приводами.

В работах [23,24] также установлено, что уменьшению неприводки способствует применение индивидуальных приводов, обеспеченное развитием компьютерных технологий.

К особенностям исследуемой системы можно отнести некоторую неопределённость параметров объекта управления. К примеру, характеристики электродвигателей, являющихся главными элементами систем прямого привода, обладают некоторым допуском, а коэффициенты трения подшипников можно считать случайными величинами в определённом диапазоне.

1.3.3 Исследования напряженно-деформированного состояния рулона

При размотке рулона натяжение примыкающего к рулону участка полотна связано с натяжением его в наружных слоях рулона, которое, в свою очередь, связано с натяжением внутренних слоев. Состояние разматываемого полотна определяется «историей» его хранения в рулоне, которая начинается во время намотки рулона. Таким образом, возникает проблема исследования

напряженно-деформированного состояния (НДС) рулона, а также создания оптимального режима намотки, обеспечивающего сохранение качества полотна во время хранения. Сжатие и возможное взаимное проскальзывание слоев полотна в рулоне обнаруживают признаки вязкопластической среды. Общие проблемы механики многослойной среды рассмотрены в монографиях Никишина и Болотина [25,26].

В статьях [27,28] анализируется распределение радиальных и тангенциальных напряжений, а также давления между слоями в зависимости от радиуса рулона. Авторы решают плоскопараллельную задачу деформации, рассматривая рулон как сплошное однородное цилиндрическое тело с переменным радиусом.

В статьях [29,30] представлен обзор исследований, посвящённых моделированию и анализу процесса формообразования многослойных рулонированных конструкций, например, цилиндрических, образованных по спирали Архимеда, витых спирально-рулонных конструкций и других. Исследования направлены на уменьшение внутренних напряжений и устранение дефектов намотки: телескопичности, морщинистости и т. д.

В статье [31] представлена слоистая модель рулона стального проката, в которой отдельный виток представляется полым цилиндром конечной длины, неравномерно нагруженным по образующим, состояние которого описывается уравнениями линейной упругости в терминах перемещений. Их решения позволяют найти перемещения наружной и внутренней поверхностей витков и далее радиальные и тангенциальные напряжения в рулоне. Работа [31] посвящена моделированию процесса намотки стальной полосы. Авторами исследуется метод определения совокупной жёсткости полосы и рулона при изменении радиуса рулона.

В работах [32-34] НДС рулона слоистой области рулона описано в терминах напряжений интегральным уравнением, которое решается в трех зонах. В первой (наружной) происходит скольжение ленты, во второй зоне

отсутствуют относительные смещения уплотненных слоев. Третья зона характеризуется дополнительными напряжениями как за счет уплотнения слоев при их относительном скольжении, так и за счет сжатия этой зоны давлением на ее внешней границе. В статье [27] приводится результат расчёта радиальных и касательных напряжений для изотропного рулона, сформированного при постоянном напряжении натяга:

$$\sigma_r = -\sigma_T \frac{\rho^2 + c_0}{2\rho^2} \ln \left| \frac{\rho^{*2} + c_0}{\rho^2 + c_0} \right|; \quad \sigma_\theta = \sigma_T \left[1 - \frac{\rho^2 - c_0}{2\rho^2} \ln \left| \frac{\rho^{*2} + c_0}{\rho^2 + c_0} \right| \right];$$

$$c_0 = \frac{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0) - \eta E_0}{(1 + \nu_0) + \eta E_0},$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_T$ — компоненты тензора напряжений, ν_0, E_0 — коэффициент Пуассона и модуль упругости материала рулона, $\rho = r/r_0$ — относительный радиус, r — расстояние от точки поперечного сечения рулона, для которой производятся расчёты, до оси втулки, r_0 — радиус втулки.

Отметим, что в упомянутых работах слои представлены не в форме спирали, а в виде концентрических замкнутых контуров, что искажает картину передачи напряжений вдоль полотна.

Начальное напряжения внутри рулона создается намоточными устройствами. Существует множество патентов на изобретения, касающиеся устройств и способов контроля качества наматываемых рулонов, особенно рулонов легкодеформируемых материалов, особенно тканей. Например, в патенте [35] акцент сделан на механическом способе уменьшения деформации наматываемого полотна за счет особой конструкции приводного барабана с прижимным звеном с роликами и оправкой, а также с равняющим валиком. В патенте [36] предлагается контролировать плотность намотки рулона путем логической обработки электронными блоками сигналов, поступающих от импульсных датчиков числа оборотов и радиуса рулона.

Рулон в общем случае является неоднородной и анизотропной средой благодаря переменной толщине и полотна, и модуля упругости. К тому же, эти параметры в общем случае тоже обладают допуском. Например, в статье [37] приводятся данные по упругим константам, полученные в результате испытаний целлюлозно-бумажных материалов (рисунок 1.23, E_{11} — модуль Юнга в машинном направлении, E_{22} — в поперечном).

Материал образца	Модуль упругости E_{11}/E_{22} , МПа	Коэффициент Пуассона (ν_{12}/ν_{21})	Модуль сдвига G_{12} , МПа
Офсетная бумага	5740 ± 360	$0,276 \pm 0,037$	1680 ± 140
	1930 ± 170	$0,130 \pm 0,043$	
Газетная бумага	4130 ± 280	$0,264 \pm 0,030$	1100 ± 120
	1010 ± 160	$0,165 \pm 0,021$	
Картон Топ-лайнер	5730 ± 320	$0,260 \pm 0,027$	1590 ± 180
	2160 ± 180	$0,153 \pm 0,022$	
Картон Тест-лайнер	3800 ± 350	$0,221 \pm 0,026$	1030 ± 220
	1530 ± 200	$0,161 \pm 0,023$	
Картон Крафт-лайнер	4230 ± 420	$0,344 \pm 0,025$	1050 ± 250
	1560 ± 210	$0,196 \pm 0,026$	

Рисунок 1.23 — Результаты измерения упругих констант образцов бумаги и картона

Как можно заметить, отклонение по модулю Юнга в машинном направлении для офсетной бумаги достигает чуть более 6%. Ранее было сказано о допустимости представления полотна материала как однородного материала и приведённый фактор можно учитывать именно как некоторую неопределённость постоянного значения.

1.4 Постановка задачи исследования

Исследуем процесс перемотки рулонного материала, осуществляемого перемоточными машинами. Они могут иметь узел размотки полотна, узел намотки, а также узел, в котором осуществляются специальные технологические операции: контроль качества полотна, окраска, печать,

перфорация и другие. Этот узел будем называть узлом (или участком) контроля.

Для исследования перемоточного процесса создадим математические модели узлов функционирования размотки, намотки, контроля, а также всей перемоточной машины, приводимой в движение электроприводами постоянного тока.

Поскольку на динамику перемотки влияет геометрия масс рулона, исследуем геометрическую структуру рулона как слоистой среды.

Высококачественная и производительная работа ПМ может быть обеспечена путём управления её приводом. В процессе перемотки требуется контролировать движение полотна при поддержании необходимого его натяжения. Большие возможности для решения этой проблемы предоставляются в соответствии с принципами мехатроники при использовании систем распределённого привода. Распределённый привод обладает рядом достоинств, одним из которых является минимизация вплоть до полного исключения механических передач, а значит, их недостатков.

В данной работе главной задачей исследования является синтез алгоритма управления процессом перемотки рулонного материала. Для выполнения этой задачи требуется разработать математические модели размотки и намотки рулонов, включая модель поперечного сечения рулона как эквидистантной спирали, создать алгоритмы для анализа процессов, происходящих при перемотке рулонных материалов и так далее.

Достоверность математических моделей узлов машины и справедливость проведённого синтеза алгоритма управления должны подтвердиться результатами компьютерного моделирования.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ДИНАМИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УЗЛОВ ПЕРЕМОТКИ РУЛОННОГО МАТЕРИАЛА ПОЛИГРАФИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

2.1 Динамическая модель узла размотки

Как было отмечено ранее, одним из общих узлов рассмотренных машин является узел размотки. Это неотъемлемая часть любой машины, в которой исходный материал представлен в рулевом виде. Кроме непосредственно рулона и удерживающей его конструкции, бумагоподающие (лентопитающие) системы включают в себя подсистемы контроля натяжения полотна и контроля положения полотна.

Рассмотрим узел размотки, основанный на схеме, представленной на рисунке 2.1 [38, 39], где: 1 и 1' — пара тянущих валиков, 2 — сенсорный вал (они же цилиндры размотки), 3 — рулон, 4 — втулка, 5 — полотно.

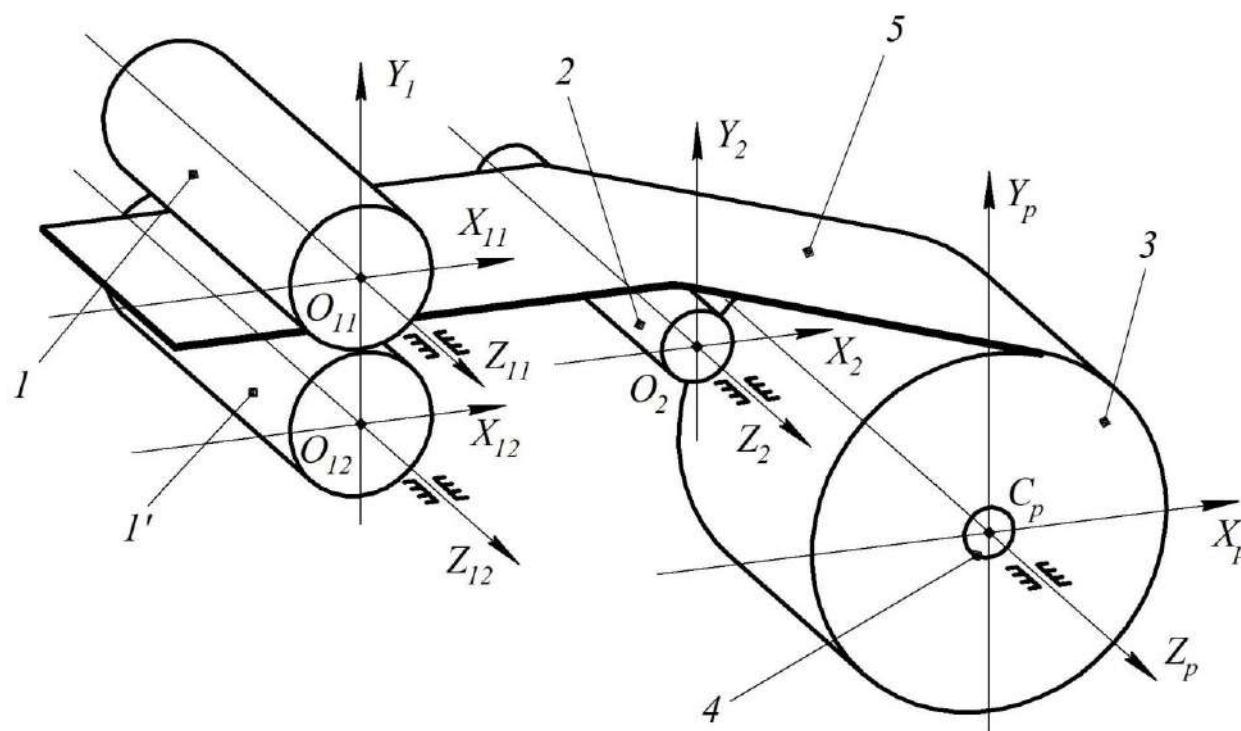


Рисунок 2.1 — Схема узла размотки, диметрия

Размотка рулона 3 происходит под действием силы натяжения (на рисунке 2.1 не показана) полотна материала, создаваемой в общем случае лентоведущими цилиндрами, вращающимися от своих индивидуальных приводов. Пара цилиндров 1 осуществляет подачу полотна материала за счёт возникающей силы трения при контакте поверхности цилиндров 1 и 1' с полотном 5. При этом индивидуальный привод обычно имеет только один из цилиндров 1, а второй 1' является прижимным валом и его основное предназначение заключается в обеспечении необходимого усилия прижима. При этом на разматываемом рулоне 3 (далее – рулон размотки) стоит тормозящее устройство, участвующее в обеспечении необходимой силы натяжения полотна материала. Измерение силы натяжения полотна материала осуществляется с помощью сенсорного вала 2.

Введём систему координат $C_p X_p Y_p Z_p$, ось $C_p Z_p$, которой связана с осью вращения рулона 3 и параллельна образующей рулона, $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ — система координат, связанная с сенсорным валом 2, $O_{1i} X_{1i} Y_{1i} Z_{1i}$, $i=1,2$ — системы координат, связанные с парой тянущих цилиндров 1 и 1' соответственно. При наличии системы равнения полотна (см. раздел 1.2) можно сделать следующие допущения: поперечное сечение полотна остаётся параллельным образующим рулона, сенсорного вала и тянущих цилиндров; оси $C_p Z_p$, $O_2 Z_2$, $O_{11} Z_{11}$, $O_{12} Z_{12}$ являются коллинеарными; образующая полотна в поперечном сечении является параллельной этим осям при выполнении указанного условия. С учётом сделанных предположений представим схему узла размотки в виде, показанном на рисунке 2.2.

В дальнейшем, при разработке математической модели (ММ) узла размотки будем считать, что пары цилиндров не меняют толщину полотна при прохождении области контакта, а движение полотна происходит без проскальзывания относительно тянущих цилиндров и сенсорного вала.

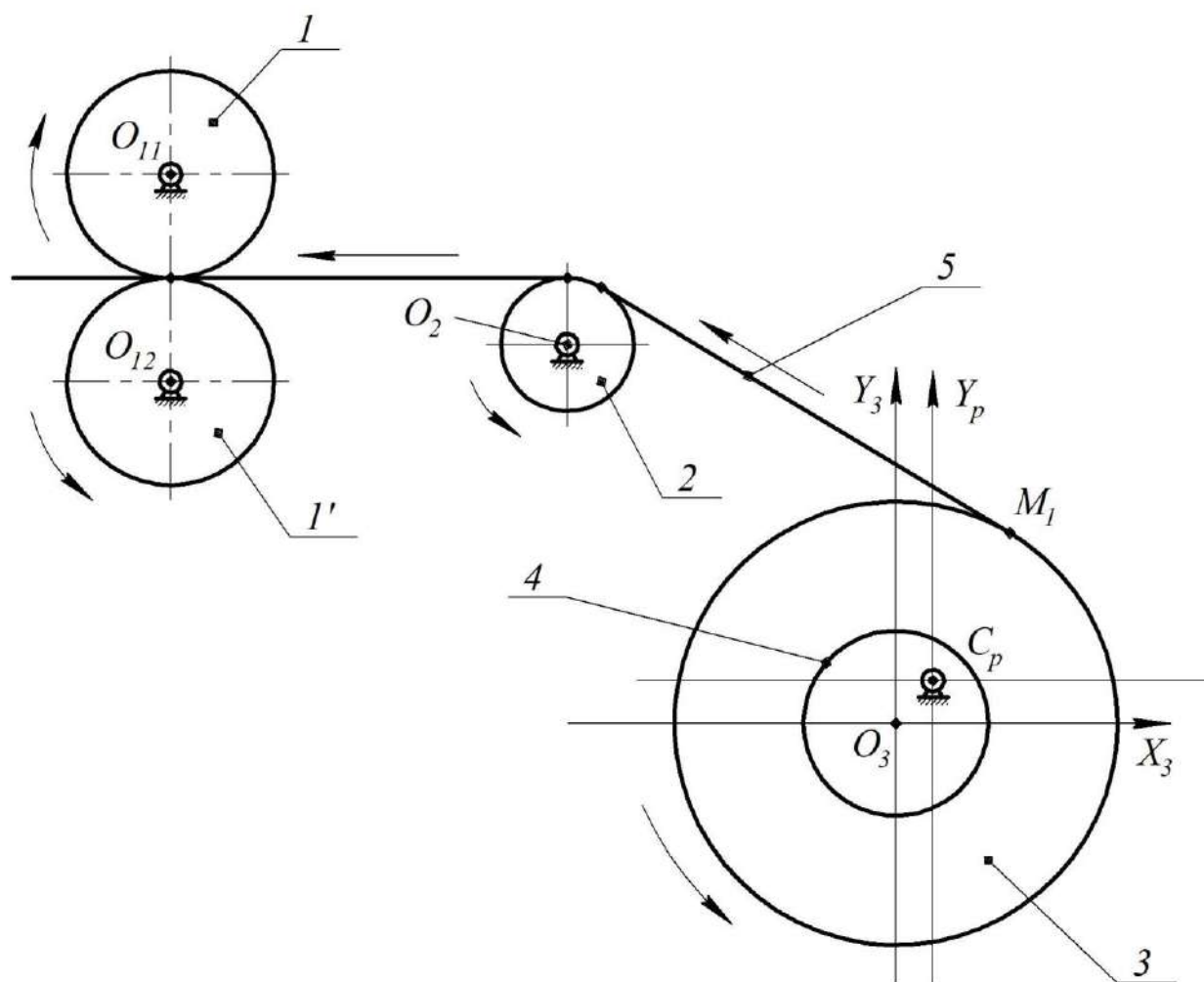


Рисунок 2.2 — Схема узла размотки

Центр масс O_3 сечения рулона может не находиться на оси вращения. Будем считать рулон телом вращения, имеющим возможность поворота вокруг оси с центром в точке C_p .

В процессе разматывания рулона происходит изменение диаметра рулона, его массы и момента инерции. Следует отметить, что из-за нелинейных свойств полотна намотанного материала, неидеальности формы втулки, эксцентриситета оси вращения в процессе перематывания возникают колебания силы натяжения полотна материала и скорости его размотки, что в свою очередь влияет на качество продукции и производительность оборудования.

Рассмотрим задачу разработки математической модели процесса размотки с целью определения скорости и силы натяжения полотна материала. Для этого представим рассматриваемую механическую систему в виде трех динамических моделей: рулон размотки, сенсорный вал размотки и пара цилиндров размотки. Будем считать цилиндры и сенсорный вал абсолютно твёрдыми телами, а рулон телом вращения с переменными параметрами. За обобщённые координаты примем углы поворотов цилиндров 1 и 1', сенсорного вала 2 и рулона 3 (рисунок 2.2).

На рисунке 2.3 представлена динамическая модель “рулон”.

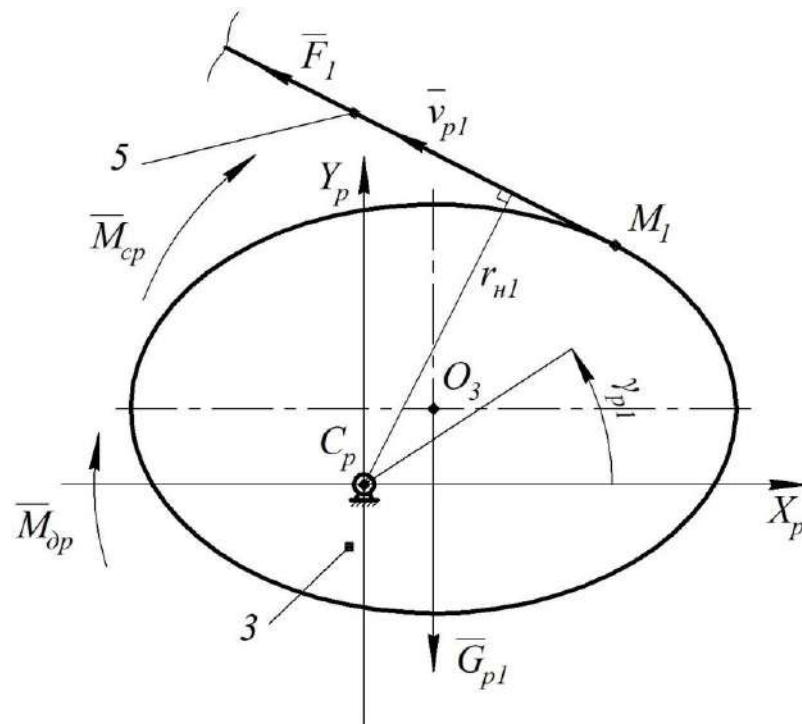


Рисунок 2.3 — Динамическая модель рулона размотки

Обозначим $\gamma_{p1} = \gamma_{p1}(t)$ — угол поворота “рулона”, отсчитываемый от горизонтальной оси $C_p X_p$ (обобщенная координата рулона), v_{p1} — скорость схода полотна с рулона. В процессе вращения рулон разматывается, в результате чего его масса и момент инерции $J_{p1}(\gamma_{p1})$ изменяются. В процессе разматывания полотна на рулон действуют следующие силы и моменты: M_{dp}

— момент, развиваемый двигателем (тормозным устройством); M_{cp} — момент сил трения в подшипниковых опорах рулона; F_1 — сила натяжения, действующая на рулон со стороны полотна 5; G_{p1} — сила тяжести рулона. Введём в рассмотрение плечо r_{n1} силы натяжения F_1 относительно полюса C_p и будем называть его радиусом натяжения (рисунок 2.3).

Рассмотрим динамическую модель “сенсорный вал” (рисунок 2.4).

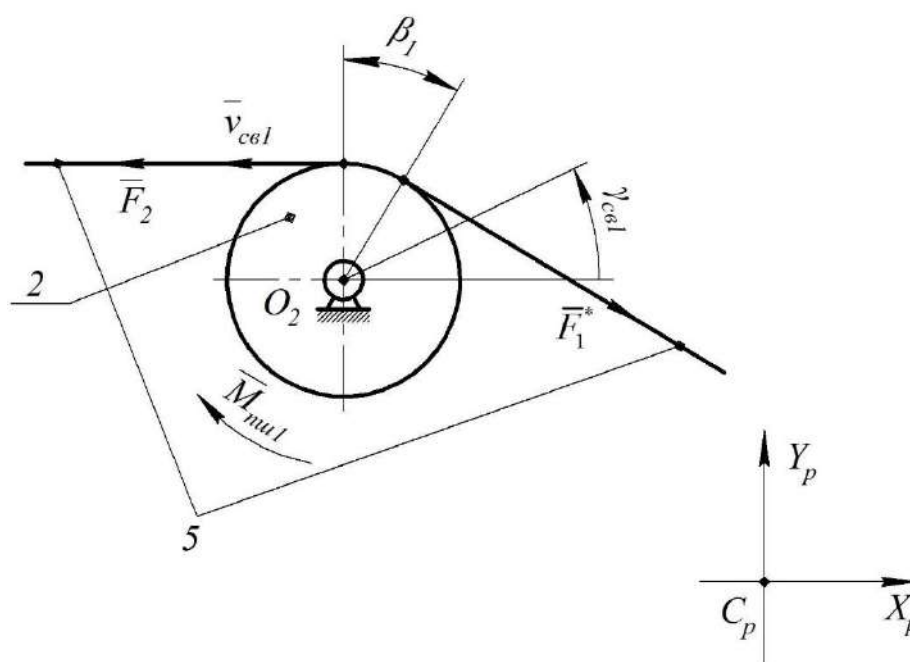


Рисунок 2.4 — Динамическая модель сенсорного вала размотки

Сенсорный вал вращается в подшипниковых опорах и взаимодействует с движущимся полотном. Конструкция сенсорного вала включает в себя датчики усилия. Будем считать сенсорный вал 2 абсолютно твердым телом. В качестве обобщенной координаты примем угол поворота $\gamma_{svl} = \gamma_{svl}(t)$ сенсорного вала вокруг от его вращения. На сенсорный вал действуют следующие силы и моменты: F_2 — сила натяжения, действующая на сенсорный валик со стороны полотна на участке от сенсорного вала до тянущих цилиндров; F_1^* — сила натяжения, действующая со стороны полотна

на участке между рулоном и сенсорным валиком ($|\bar{F}_1^*| = |\bar{F}_1|$), M_{mu1} — момент сопротивления в опорах.

Рассмотрим динамическую модель “пара цилиндров” (рисунок 2.5).

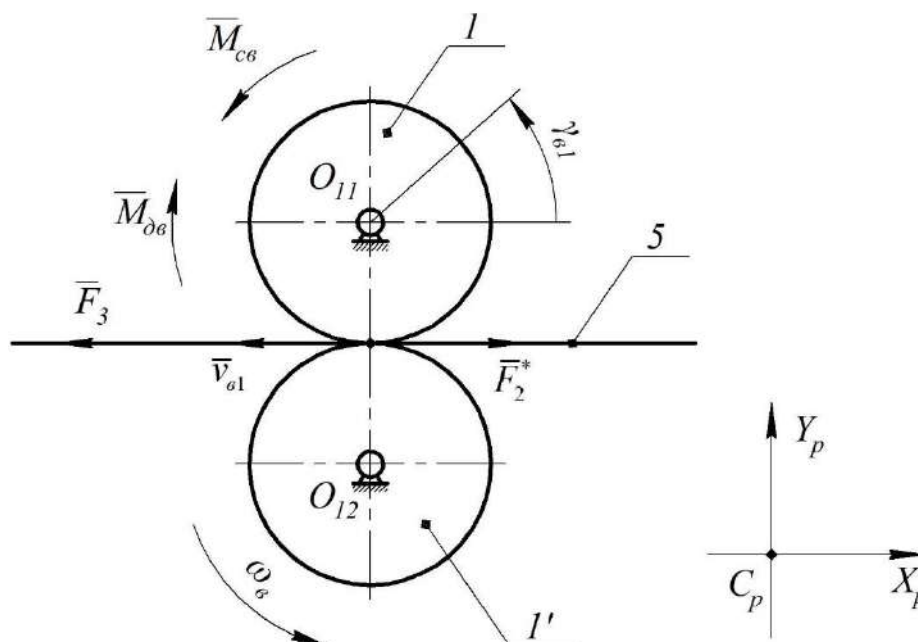


Рисунок 2.5 — Динамическая модель пары цилиндров размотки

Пара цилиндров 1 и 1' приводит в движение полотно 5. Цилиндр 1 имеет индивидуальный электродвигатель, а цилиндр 1' обеспечивает необходимое усилие прижима в области контакта поверхностей цилиндров с полотном для осуществления захвата полотна. Будем считать цилиндры абсолютно твёрдыми телами. В качестве обобщённой координаты примем угол поворота $\gamma_{01} = \gamma_{01}(t)$ цилиндра. На цилиндр 1 действуют: M_{oe} — момент, создаваемый электродвигателем, M_{ce} — момент сопротивления в подшипниковых опорах, F_3 — сила натяжения, действующая со стороны полотна на участке от пары цилиндров, F_2^* — сила натяжения, действующая со стороны полотна на участке между сенсорным валом и парой цилиндров ($|\bar{F}_2^*| = |\bar{F}_2|$). Условимся в дальнейшем учитывать только цилиндр 1 и будем называть его цилиндром размотки.

2.2 Математическая модель узла размотки

2.2.1 Уравнения движения

Для получения ММ узла размотки, соответствующей динамическим моделям, представленным на рисунках 2.3-2.5, воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода [40], которые представим в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_{p1}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma_{p1}} &= Q_{\gamma_{p1}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_{c\delta 1}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma_{c\delta 1}} &= Q_{\gamma_{c\delta 1}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_{\delta 1}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma_{\delta 1}} &= Q_{\gamma_{\delta 1}}.\end{aligned}$$

где T — кинетическая энергия системы, Q — обобщённые силы. Выражение кинетической энергии рассматриваемой механической системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} J_{p1} (\dot{\gamma}_{p1})^2 + \frac{1}{2} J_{c\delta 1} \dot{\gamma}_{c\delta 1}^2 + \frac{1}{2} J_{\delta 1} \dot{\gamma}_{\delta 1}^2.$$

Виртуальная работа активных сил и моментов на возможных перемещениях $\delta\gamma$ представима в виде:

$$\delta A = Q_{\gamma_{p1}} \delta\gamma_{p1} + Q_{\gamma_{c\delta 1}} \delta\gamma_{c\delta 1} + Q_{\gamma_{\delta 1}} \delta\gamma_{\delta 1},$$

и тогда соответствующие обобщённые силы записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}Q_{\gamma_{p1}} &= M_{C_p} (F_1) - M_{cp} - M_{dp} - M_{C_p} (G_{p1}); \\ Q_{\gamma_{c\delta 1}} &= M_{O_2} (F_2) - M_{O_2} (F_1^*) - M_{nu1}; \\ Q_{\gamma_{\delta 1}} &= M_{\delta\delta} + M_{O_{11}} (F_3) - M_{O_{11}} (F_2^*) - M_{c\delta}.\end{aligned}$$

Окончательно получим следующую математическую модель узла размотки:

$$J_{p1} \frac{d^2 \gamma_{p1}}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{p1}}{\partial \gamma_{p1}} \left(\frac{d \gamma_{p1}}{dt} \right)^2 = M_{C_p}(F_1) - M_{cp} - M_{dp} - M_{C_p}(G_{p1}), \quad (2.1)$$

$$J_{c\epsilon 1} \frac{d^2 \gamma_{c\epsilon 1}}{dt^2} = M_{O_2}(F_2) - M_{O_2}(F_1^*) - M_{nu1}, \quad (2.2)$$

$$J_{\epsilon 1} \frac{d^2 \gamma_{\epsilon 1}}{dt^2} = M_{\delta\epsilon} + M_{O_{11}}(F_3) - M_{O_{11}}(F_2^*) - M_{c\epsilon}, \quad (2.3)$$

где $J_{p1}, J_{c\epsilon 1}, J_{\epsilon 1}$ — моменты инерции рулона, сенсорного вала и цилиндра размотки соответственно, $M_C(F_1)$ — момент силы F_1 относительно оси вращения рулона $C_p Z_p$, $M_{O_2}(F_1^*), M_{O_2}(F_2)$ — моменты сил F_1^* и F_2 относительно оси вращения $O_2 Z_2$, $M_{O_{11}}(F_2^*), M_{O_{11}}(F_3)$ — моменты сил F_2^* и F_3 относительно оси вращения $O_{11} Z_{11}$.

Запишем начальные условия для системы (2.1-2.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma_{p1}(0) &= \gamma_{p1_0}, & \dot{\gamma}_{p1}(0) &= \dot{\gamma}_{p1_0}, \\ \gamma_{c\epsilon 1}(0) &= \gamma_{c\epsilon 1_0}, & \dot{\gamma}_{c\epsilon 1}(0) &= \dot{\gamma}_{c\epsilon 1_0}, \\ \gamma_{\epsilon 1}(0) &= \gamma_{\epsilon 1_0}, & \dot{\gamma}_{\epsilon 1}(0) &= \dot{\gamma}_{\epsilon 1_0}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система дифференциальных уравнений (2.1-2.3) с условиями (2.4) является нелинейной и описывает движение в узле размотки. Эту систему необходимо дополнить уравнениями механических характеристик электродвигателей.

2.2.2 Аналитические выражения сил и моментов, действующих в узле размотки

Запишем выражения моментов в уравнениях (2.1-2.3). Моменты сил натяжения определим как произведения соответствующих сил на их плечи:

$$\begin{aligned} M_{C_p}(F_1) &= F_1 r_{н1}, & M_{O_2}(F_1^*) &= F_1^* r_{св1}, & M_{O_2}(F_2) &= F_2 r_{св1}, \\ M_{O_{11}}(F_2^*) &= F_2^* r_{с1}, & M_{O_{11}}(F_3) &= F_3 r_{с1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $r_{св1}, r_{с1}$ — радиусы сенсорного вала 2 и цилиндра размотки 1.

Как уже было сказано ранее, цилиндр размотки 1 и рулон 3 соединены с электродвигателями. Для бесконтактных электродвигателей постоянного тока можно записать следующие соотношения [41]:

$$M_\delta = c_m i; \quad i = \frac{u \mp e}{R}; \quad e = c_e \omega,$$

где M_δ — момент, развиваемый электродвигателем, c_m, c_e — постоянная момента и константа противо-э.д.с. соответственно, i, R, u — сила тока, сопротивление и напряжение на обмотке якоря, ω — угловая скорость электродвигателя, e — противо-ЭДС. Знак «-» отвечает обычному режиму работы, а соответственно знак «+» — режиму противовключения. В дальнейшем будем считать, что используются системы прямого привода, то есть ротор электродвигателя напрямую соединён с рабочим органом. В таком случае, принимая во внимание то, что основное предназначение электродвигателя на рулоне размотки заключается в торможении рулона при необходимости, а угловая скорость является производной угла поворота, окончательно можем записать следующие выражения (в параметрах индекс 1 соответствует приводу рулона, а индекс 2 — приводу цилиндров размотки):

$$M_{\partial p} = c_{m1} \frac{u_1 + c_{e1} \dot{\gamma}_{p1}}{R_1} = \frac{c_{e1} c_{m1}}{R_1} \dot{\gamma}_{p1} + \frac{c_{m1}}{R_1} u_1, \quad (2.6)$$

$$M_{\partial s} = c_{m2} \frac{u_2 - c_{e2} \dot{\gamma}_{s1}}{R_2} = -\frac{c_{e2} c_{m2}}{R_2} \dot{\gamma}_{s1} + \frac{c_{m2}}{R_2} u_2. \quad (2.7)$$

Представим момент, создаваемый силой тяжести рулона, в виде:

$$M_{C_p}(G_{p1}) = G_{p1} e_1 \cos(\gamma_{p1} + \gamma_{e1}) = M_{p1} g e_1 \cos(\gamma_{p1} + \gamma_{e1}), \quad (2.8)$$

где M_{p1} — масса рулона размотки, g — ускорение свободного падения, $e_1 = C_p O_3$ — эксцентриситет оси вращения рулона размотки, $\gamma_{e1}|_{\gamma_{p1}=\gamma_{p10}}$ — угол $O_3 C_p X_p$ соответствующий начальному положению рулона размотки.

Момент трения в опорах рулона зависит от радиальной нагрузки F_r , которая в основном определяется массой рулона: $F_r \approx G_{p1} = M_{p1} g$.

Для подшипников качения:

$$M_{cp} = f_m F_r r_{nu} = f_m r_{nu} M_{p1} g = C_{nu1} M_{p1}, \quad (2.9)$$

где $f_m r_{nu}$ — коэффициент трения качения, r_{nu} — радиус подшипника.

Момент сил трения в опорах цилиндров размотки будем считать постоянной величиной и в дальнейшем не станем учитывать; при моделировании и синтезе алгоритма управления его можно будет считать неким постоянным возмущающим воздействием.

Три уравнения (2.1-2.3) следует дополнить уравнениями, описывающими изменения сил натяжения. Прежде всего, условимся считать, что сила натяжения в пределах участка полотна материала не меняется [15]. Под участком полотна будем подразумевать часть полотна, заключённую

между двумя соседними в продольном направлении областями контакта полотна с поверхностью цилиндров. Несложно увидеть, руководствуясь схемой на рисунке 2.2, что в анализируемом узле размотки есть два участка полотна, а именно — до и после сенсорного вала в соответствии с направлением движения полотна. Исходя из сказанного, можно записать, что:

$$|\bar{F}_1^*| = |\bar{F}_1|, \quad |\bar{F}_2^*| = |\bar{F}_2|.$$

Известно, что изменение деформации упругого полотна на некотором i – м участке его пути можно описать следующим уравнением [15,42-44]:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} + \frac{v_{i-1}}{L_i} \varepsilon_i \approx \frac{1}{L_i} \left[v_i - v_{i-1} + \left(v_i + \frac{dL_i}{dt} \right) \varepsilon_{i-1} + \frac{dL_i}{dt} \right], \quad (2.10)$$

где ε_i — относительное удлинение полотна на i - м участке, L_i — длина участка, v_i — скорость полотна на этом участке. Индекс $i-1$ соответствует предыдущему участку.

Между рулоном и парой разматывающих валиков находится неподвижный сенсорный вал, назначением которого является измерение силы натяжения. С учётом закона Гука для этого участка на основе (2.10) получим следующее уравнение:

$$\frac{dF_1}{dt} = -\frac{v_{p1}}{L_1} F_1 + \frac{SE}{L_1} (v_{c\phi 1} - v_{p1}) + \frac{SE}{L_1} \frac{dL_1}{dt} + \left(v_{c\phi 1} + \frac{dL_1}{dt} \right) \frac{F_p}{L_1}, \quad (2.11)$$

Здесь S, E, L_1 — площадь поперечного сечения, модуль упругости и длина рассматриваемого участка полотна соответственно, F_p — сила натяжения материала в месте схода полотна с рулона, v_{p1} — скорость точек

полотна в точках схода с рулона (точка M_1 на рисунках 2.2 и 2.3), которую в дальнейшем будем называть скоростью рулона. Выразим эту переменную через обобщённую координату рулона γ_{p1} (рисунок 2.6). Выберем относительное расположение точек C_p и O_3 , основываясь на упрощении расчётов.

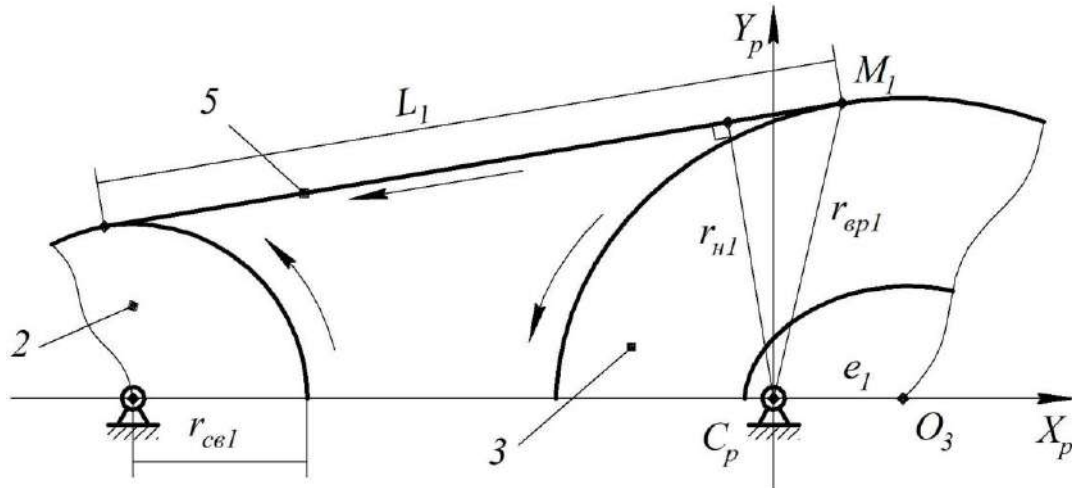


Рисунок 2.6 — Расчётная схема к определению v_{p1}

Определим переменную r_{ep1} как длину $C_p M_1$, то есть расстояние между центром вращения (проекция оси вращения) и точкой схода полотна с рулона. Тогда получим:

$$v_{p1} = \omega_{p1} r_{ep1} = \frac{d\gamma_{p1}}{dt} r_{ep1}. \quad (2.12)$$

Величина $\frac{dL_1}{dt}$ — характеризует изменение длины полотна во времени, что актуально для участков с использованием плавающего валика. В данной конструкции предполагается его замена на сенсорный неподвижный вал (рисунок 2.4); тем не менее, принимая во внимание предположительно широкий диапазон начальных данных, к примеру, неизвестность параметров

конструкции, оставим это слагаемое и преобразуем уравнение (2.11) с учётом (2.12):

$$\begin{aligned}\frac{dL_1}{dt} &= \frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} \dot{\gamma}_{p1}, \\ \frac{dF_1}{dt} &= -\frac{r_{ep1}}{L_1} \dot{\gamma}_{p1} F_1 + \frac{SE}{L_1} (v_{c\epsilon 1} - \dot{\gamma}_{p1} r_{ep1}) + \\ &+ \dot{\gamma}_{p1} \frac{SE}{L_1} \frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} + \left(v_{c\epsilon 1} + \frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} \dot{\gamma}_{p1} \right) \frac{F_{p1}}{L_1}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Свободно вращающийся сенсорный вал с точки зрения ТАУ в первом приближении можно рассматривать как элемент задержки по отношению к силе натяжения [15]. Пусть t_{01} — время прохождения полотном дуги охвата (рисунок 2.4), тогда: угол, соответствующий дуге охвата:

$$\beta_1 = \frac{1}{r_{c\epsilon 1}} \int_0^{t_{01}} v_{c\epsilon 1} dt,$$

а соответствующее дифференциальное уравнение для силы натяжения на втором участке можно записать в следующем виде:

$$\frac{dF_2}{dt} = -\frac{v_{c\epsilon 1}}{L_2} F_2 + \frac{SE}{L_2} (v_{\epsilon 1} - v_{c\epsilon 1}) + \frac{v_{\epsilon 1}}{L_2} F_1 (t - t_{01}(t)), \quad (2.14)$$

где L_2 — длина участка полотна между сенсорным валом и парой цилиндров размотки.

Итак, система уравнений (2.1-2.3, 2.13, 2.14) совместно с (2.5-2.9) и начальными условиями (2.4) является нелинейной математической моделью узла размотки.

2.3 Динамическая и математическая модели узла намотки

Как было отмечено в первой главе, среди полиграфического оборудования встречаются машины, которые используют схему «из рулона в рулон». В состав таких машин помимо узла размотки входит узел намотки, предназначение которого заключается в намотке полотна материала в рулон. Будем считать, что к узлу намотки применимы те же рассуждения касательно плоской задачи (рисунок 2.7).

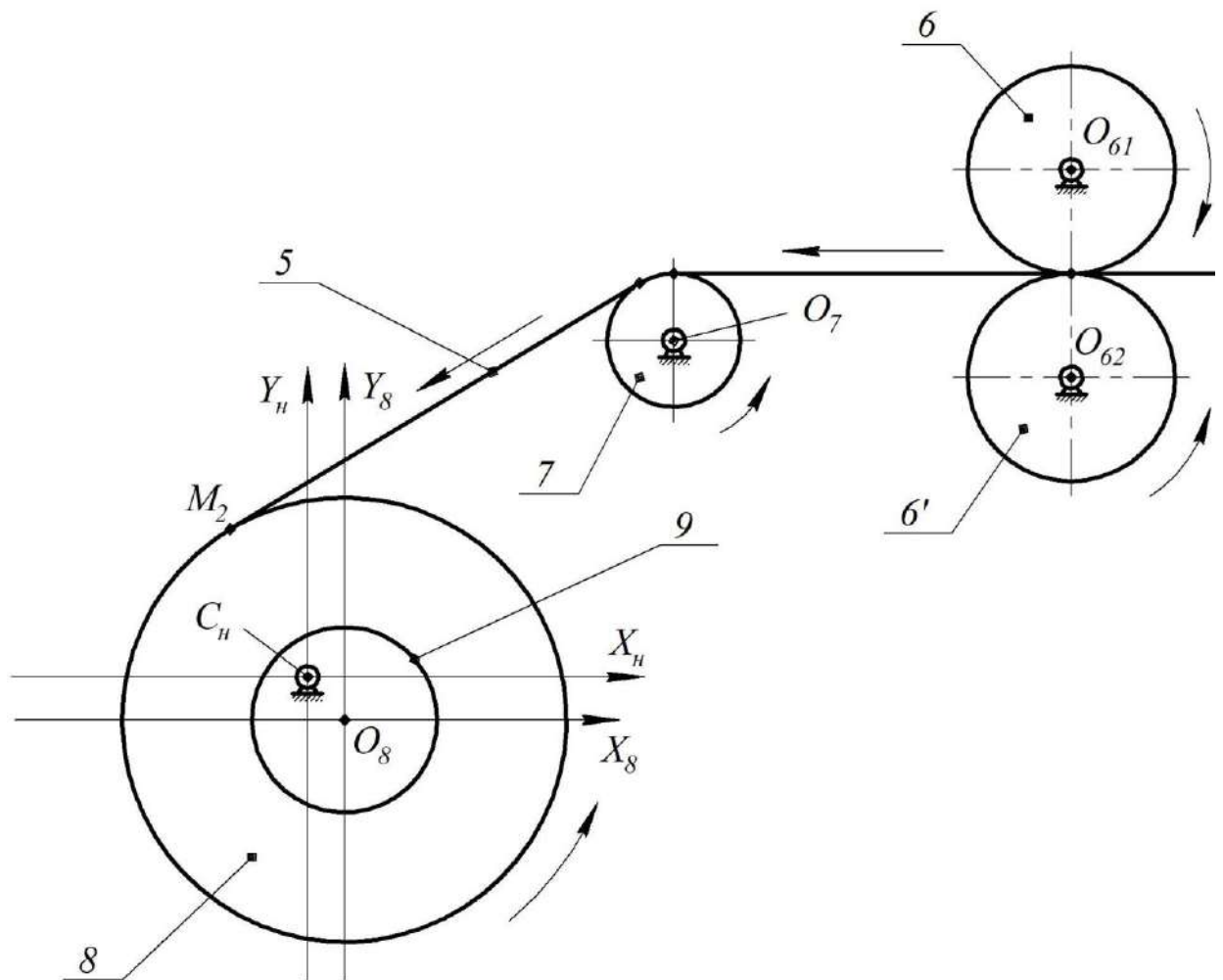


Рисунок 2.7 — Схема узла намотки

Аналогично узлу размотки введём неподвижную систему координат $C_n X_n Y_n$, центр которой — точка C_n — совмещен с центром вращения рулона (проекция оси вращения на плоскость поперечного сечения рулона), точка O_8

центр масс сечения рулона. Будем считать рулон телом вращения, имеющим возможность поворота вокруг оси с центром в точке C_n .

Намотка рулона 8 (рисунок 2.7) происходит при помощи электродвигателя (на рисунке не показан), установленного соосно с рулоном (система прямого привода). Для обеспечения контролируемого движения полотна материала 5 создаётся сила натяжения, в первую очередь за счёт пары подающих цилиндров 6 и 6', которые в дальнейшем будем именовать цилиндрами намотки. В состав узла намотки также входит сенсорный вал 7 для измерения силы натяжения полотна материала.

В ряде работ была проанализирована связь между напряжённо-деформированным состоянием рулона и силой натяжения полотна материала, с которой непосредственно осуществлялся процесс намотки [27,28]. В связи с этим, для определения скорости и силы натяжения полотна составим математическую модель узла намотки; как и в случае с узлом размотки, начнём с динамической модели и аналогично воспользуемся методом декомпозиции (рисунки 2.8-2.10).

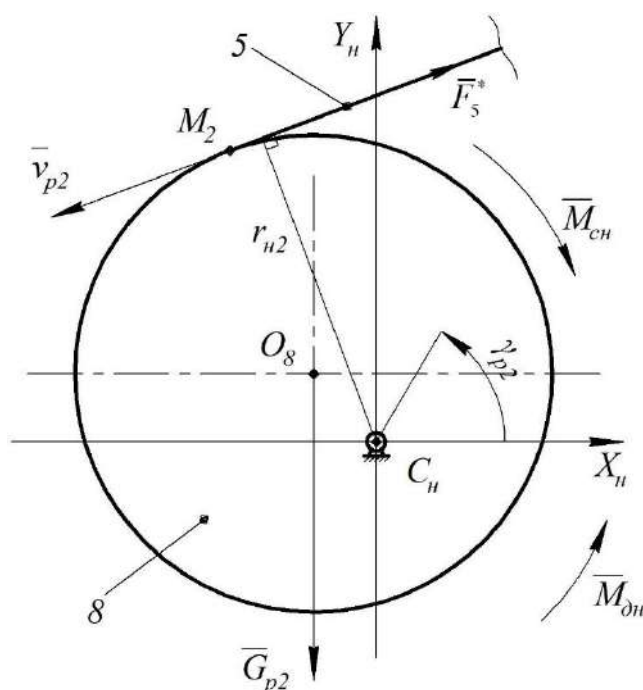


Рисунок 2.8 — Динамическая модель рулона намотки

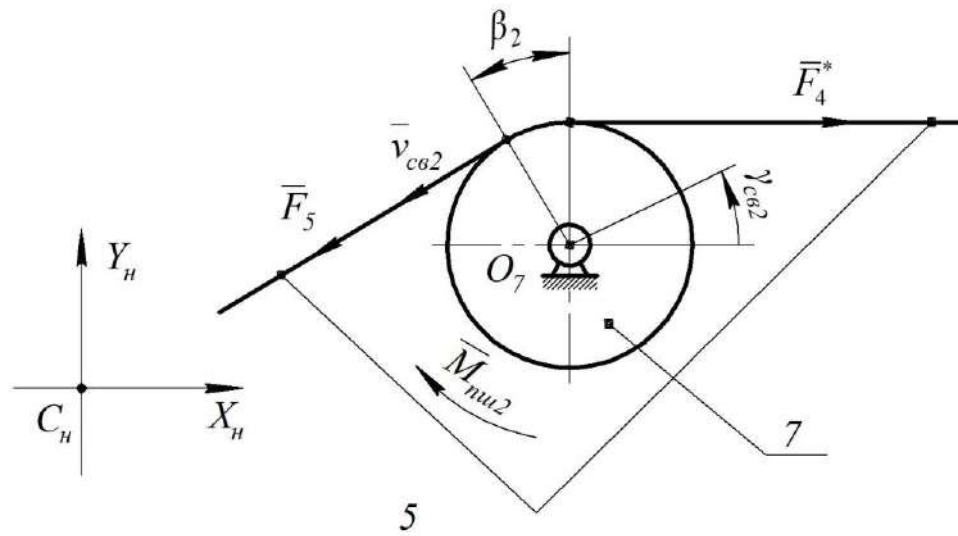


Рисунок 2.9 — Динамическая модель сенсорного вала намотки

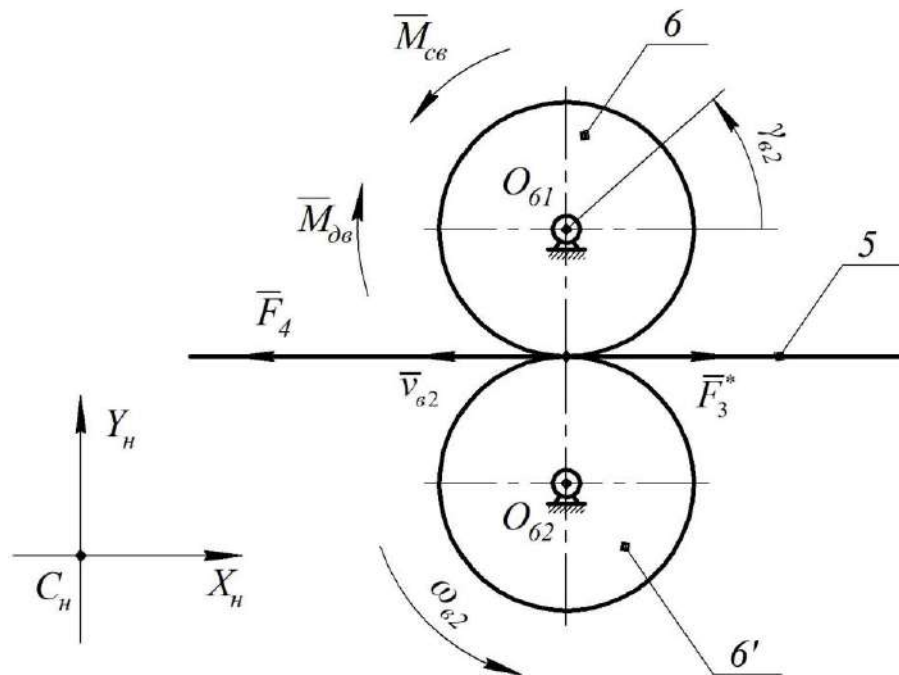


Рисунок 2.10 — Динамическая модель пары цилиндров намотки

Обозначим $\gamma_{p2} = \gamma_{p2}(t)$ — угол поворота рулона намотки, отсчитываемый в положительном направлении от оси $C_n X_n$ (обобщенная координата рулона), v_{p2} — скорость точек полотна в линии касания полотна и рулона. В процессе вращения рулон наматывается, в результате чего, его масса

и момент инерции массы изменяются. Обозначим $J_{p2}(\gamma_{p2})$ — момент инерции рулона. В процессе разматывания полотна на рулон действуют следующие силы и моменты: $M_{\partial n}$ — момент, развиваемый двигателем рулона; M_{cn} — момент сил трения в опорах рулона; F_5^* — сила натяжения, действующая на рулон со стороны полотна 5; G_{p2} — сила тяжести рулона. Введём в рассмотрение плечо силы натяжения F_5^* — переменную r_{n2} (см. рисунок 2.8) и условимся в дальнейшем называть её радиусом натяжения намотки.

Динамические модели сенсорного вала намотки и пары цилиндров намотки (рисунки 2.9-2.10) суть аналогичны динамическим моделям сенсорного вала размотки и пары цилиндров размотки (рисунки 2.4-2.5), поэтому их детально расписывать не будем.

Составим математическую модель узла намотки. Основываясь на сходстве конструкций узлов размотки и намотки, воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода и проведём рассуждения, аналогичные предыдущим. Рулон намотки совместно со своим ЭД образует систему прямого привода, при этом ЭД работает в «двигательном» режиме и соответствующий момент входит в состав уравнения со знаком «+». Для сенсорного вала намотки и пары цилиндров намотки принципиально ничего не меняется. Окончательно получим следующую математическую модель узла намотки:

$$J_{p2} \frac{d^2 \gamma_{p2}}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{p2}}{\partial \gamma_{p2}} \left(\frac{d \gamma_{p2}}{dt} \right)^2 = -M_{C_n}(F_5^*) - M_{cn} + M_{\partial n} - M_{C_n}(G_{p2}), \quad (2.15)$$

$$J_{c\partial 2} \frac{d^2 \gamma_{c\partial 2}}{dt^2} = M_{O_7}(F_5) - M_{O_7}(F_4^*) - M_{nu2}, \quad (2.16)$$

$$J_{\partial 2} \frac{d^2 \gamma_{\partial 2}}{dt^2} = M_{\partial \partial} + M_{O_{61}}(F_4) - M_{O_{61}}(F_3^*) - M_{c\partial}, \quad (2.17)$$

Запишем аналитические выражения сил и моментов, действующих в узле намотки. Для моментов сил натяжения получим:

$$\begin{aligned} M_{C_n}(F_5^*) &= F_5^* r_{n2}, & M_{O_7}(F_4^*) &= F_4^* r_{c62}, & M_{O_7}(F_5) &= F_5 r_{c62}, \\ M_{O_{61}}(F_3^*) &= F_3^* r_{62}, & M_{O_{61}}(F_4) &= F_4 r_{62}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где r_{c62}, r_{62} — радиусы сенсорного вала 7 и цилиндра размотки 6 (рисунок 2.7, радиусы на рисунке не показаны).

Выразим моменты, развиваемые ЭД (см. раздел 2.3.1), руководствуясь тем же условием, согласно которому используются системы прямого привода (индекс 3 соответствует приводу цилиндров намотки):

$$M_{\partial 6} = c_{m3} \frac{u_3 - c_{e3} \dot{\gamma}_{62}}{R_3} = -\frac{c_{e3} c_{m3}}{R_3} \dot{\gamma}_{62} + \frac{c_{m3}}{R_3} u_3, \quad (2.19)$$

$$M_{\partial n} = c_{m4} \frac{u_4 - c_{e4} \dot{\gamma}_{p2}}{R_4} = -\frac{c_{e4} c_{m4}}{R_4} \dot{\gamma}_{p2} + \frac{c_{m4}}{R_4} u_4. \quad (2.20)$$

Аналогично запишем моменты силы тяжести рулона намотки и силы трения в подшипниковых опорах рулона намотки (см. (2.8) и (2.9)):

$$M_{C_n}(G_{p2}) = G_{p2} e_2 \cos(\gamma_{p2} + \gamma_{e2}) = M_{p2} g e_2 \cos(\gamma_{p2} + \gamma_{e2}), \quad (2.21)$$

$$M_{cn} = f_m F_r r_{nu} = f_m r_{nu} M_{p2} g = C_{nu2} M_{p2}, \quad (2.22)$$

В узле намотки также можно выделить два участка полотна (рисунок 2.7). С учётом тех же условий, что и для узла размотки (см. раздел 2.3.2) для участка полотна между парой цилиндров намотки 6 и 6' и сенсорным валом намотки 7, и участком полотна между сенсорным валом

намотки 7 и рулоном намотки 8 можно записать соответственно следующее уравнение:

$$\frac{dF_4}{dt} = -\frac{v_{\epsilon 2}}{L_4} F_4 + \frac{SE}{L_4} (v_{\epsilon 2} - v_{\epsilon 2}) + \frac{v_{\epsilon 2}}{L_4} F_3, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_5}{dt} = & -\frac{v_{\epsilon 2}}{L_5} F_5 + (r_{\epsilon p 2} \dot{\gamma}_{p 2} - v_{\epsilon 2}) \frac{SE}{L_5} + \\ & + \left(r_{\epsilon p 2} \dot{\gamma}_{p 2} + \dot{\gamma}_{p 2} \frac{dL_5}{d\gamma_{p 2}} \right) \frac{F_4(t - t_{02}(t))}{L_5} + \dot{\gamma}_{p 2} \frac{SE}{L_5} \frac{dL_5}{d\gamma_{p 2}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Запишем начальные условия для узла намотки:

$$\begin{aligned} \gamma_{p 2}(0) &= \gamma_{p 2_0}, & \dot{\gamma}_{p 2}(0) &= \dot{\gamma}_{p 2_0}, \\ \gamma_{\epsilon 2}(0) &= \gamma_{\epsilon 2_0}, & \dot{\gamma}_{\epsilon 2}(0) &= \dot{\gamma}_{\epsilon 2_0}, \\ \gamma_{\epsilon 2}(0) &= \gamma_{\epsilon 2_0}, & \dot{\gamma}_{\epsilon 2}(0) &= \dot{\gamma}_{\epsilon 2_0}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Итак, система уравнений (2.15-2.17, 2.23, 2.24) совместно с (2.18-2.22) и условиями (2.25) является нелинейной математической моделью узла намотки.

Дополним модель уравнением для расчёта времени запаздывания (уравнение для обоих узлов):

$$\int_0^{t_{01,02}} \omega_{\epsilon 1,2} dt = r_{\epsilon 1,2} \beta_{1,2}, \quad (2.26)$$

где t_{02} — время прохождения полотном дуги охвата (рисунок 2.9).

Как несложно увидеть, даже в случае постоянства угловой скорости сенсорного вала при меняющемся угле обхвата время запаздывания не будет постоянным.

2.4 Математическая модель перемоточной машины

Как отмечалось в первой главе, нередко возникают задачи, связанные как с обычной перемоткой рулонов, так и имеющие в своём составе участок, на котором проводятся какие-либо технологические операции с полотном. Для дальнейших исследований выберем машину со схемой «из рулона в рулон», то есть имеющую в своём составе узлы размотки и намотки, и которую далее будем называть перемоточной машиной (рисунок 2.11, обозначения см. на рисунках 2.2 и 2.7).

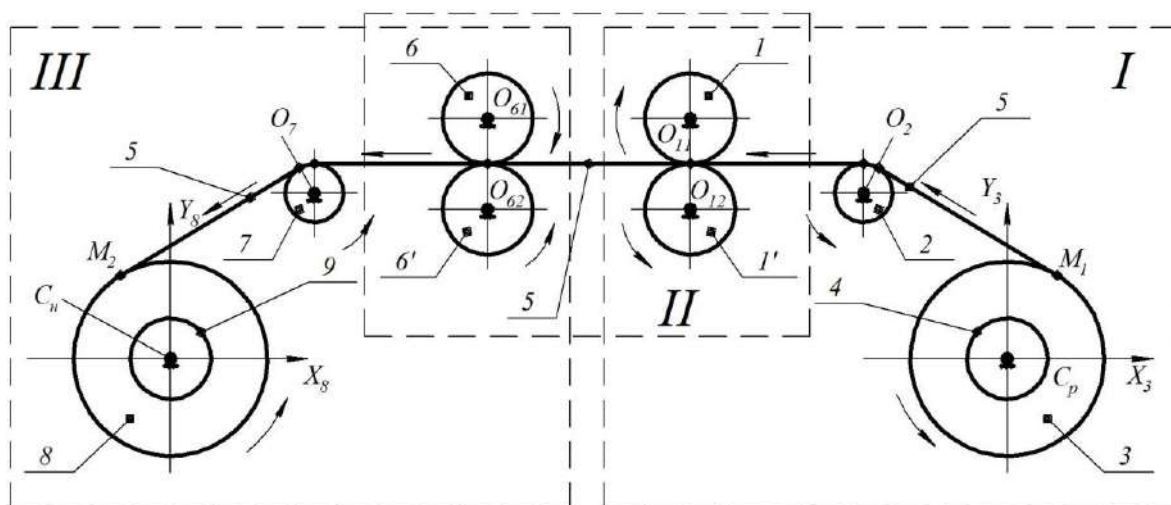


Рисунок 2.11 — Схема перемоточной машины

На рисунке 2.11 римскими цифрами обозначено: *I* — узел размотки (участок размотки), *III* — узел намотки (участок намотки). Будем считать, что на участке *II* могут проводиться определённые технологические операции с полотном материала, но главной задачей является контроль каких-либо параметров, связанных с полотном и обусловленных поставленной задачей перед перемоткой. Участок *II* будем именовать участком контроля.

С целью определения скоростей и сил натяжения участков полотна, составим математическую модель перемоточной машины. Отметим, что участок контроля содержит по две пары цилиндров — размотки и намотки. В силу этого, достаточно объединить математические модели узлов размотки и намотки:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& \frac{d^2 \gamma_{p1}}{dt^2} = -\frac{1}{2J_{p1}} \frac{dJ_{p1}}{d\gamma_{p1}} \left(\frac{d\gamma_{p1}}{dt} \right)^2 - \frac{c_{e1} c_{m1}}{J_{p1} R_1} \frac{d\gamma_{p1}}{dt} + \frac{r_{\#1}}{J_{p1}} F_1 - \\
& \quad - \frac{c_{m1}}{J_{p1} R_1} u_1 - \frac{ge_1 \cos \gamma_{p1} + C_{nu1}}{J_{p1}} M_{p1}, \\
& \frac{d^2 \gamma_{p2}}{dt^2} = -\frac{1}{2J_{p2}} \frac{dJ_{p2}}{d\gamma_{p2}} \left(\frac{d\gamma_{p2}}{dt} \right)^2 - \frac{c_{e4} c_{m4}}{J_{p2} R_4} \frac{d\gamma_{p2}}{dt} - \frac{r_{\#2}}{J_{p2}} F_5 + \\
& \quad + \frac{c_{m4}}{J_{p2} R_4} u_4 - \frac{ge_2 \cos \gamma_{p2} + C_{nu2}}{J_{p2}} M_{p2}, \\
& \frac{dF_1}{dt} = -\frac{r_{ep1}}{L_1} \frac{d\gamma_{p1}}{dt} F_1 + \frac{SE}{L_1} \left(v_{c\epsilon 1} - \frac{d\gamma_{p1}}{dt} r_{ep1} \right) + \\
& \quad + \frac{d\gamma_{p1}}{dt} \frac{SE}{L_1} \frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} + \left(v_{c\epsilon 1} + \frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} \frac{d\gamma_{p1}}{dt} \right) \frac{F_{p1}}{L_1}, \\
& \frac{dF_2}{dt} = -\frac{v_{c\epsilon 1}}{L_2} F_2 + \frac{SE}{L_2} (v_{\epsilon 1} - v_{c\epsilon 1}) + \frac{v_{\epsilon 1}}{L_2} F_1 (t - t_{01}(t)), \\
& \frac{dF_3}{dt} = -\frac{v_{\epsilon 1}}{L_3} F_3 + \frac{SE}{L_3} (v_{\epsilon 2} - v_{\epsilon 1}) + \frac{v_{\epsilon 2}}{L_3} F_2, \\
& \frac{dF_4}{dt} = -\frac{v_{\epsilon 2}}{L_4} F_4 + \frac{SE}{L_4} (v_{c\epsilon 2} - v_{\epsilon 2}) + \frac{v_{c\epsilon 2}}{L_4} F_3, \\
& \frac{dF_5}{dt} = -\frac{v_{c\epsilon 2}}{L_5} F_5 + \frac{SE}{L_5} \left(r_{ep2} \frac{d\gamma_{p2}}{dt} - v_{c\epsilon 2} \right) + \frac{d\gamma_{p2}}{dt} \frac{SE}{L_5} \frac{dL_5}{d\gamma_{p2}} + \\
& \quad + \left(r_{ep2} + \frac{dL_5}{d\gamma_{p2}} \right) \frac{F_4 (t - t_{02}(t))}{L_5} \frac{d\gamma_{p2}}{dt}, \\
& \frac{dv_{c\epsilon 1}}{dt} = \frac{r_{c\epsilon 1}^2}{J_{c\epsilon 1}} (F_2 - F_1) - \frac{M_{nu1} r_{c\epsilon 1}}{J_{c\epsilon 1}}, \\
& \frac{dv_{c\epsilon 2}}{dt} = \frac{r_{c\epsilon 2}^2}{J_{c\epsilon 2}} (F_5 - F_4) - \frac{M_{nu2} r_{c\epsilon 2}}{J_{c\epsilon 2}}, \\
& \frac{dv_{\epsilon 1}}{dt} = -\frac{c_{e2} c_{m2}}{J_{\epsilon 1} R_2} v_{\epsilon 1} + \frac{r_{\epsilon 1}^2}{J_{\epsilon 1}} (F_3 - F_2) + \frac{c_{m2} r_{\epsilon 1}}{J_{\epsilon 1} R_2} u_2, \\
& \frac{dv_{\epsilon 2}}{dt} = -\frac{c_{e3} c_{m3}}{J_{\epsilon 2} R_3} v_{\epsilon 2} + \frac{c_{m3} r_{\epsilon 2}}{J_{\epsilon 2} R_3} u_3 + \frac{r_{\epsilon 2}^2}{J_{\epsilon 2}} (F_4 - F_3).
\end{aligned} \right. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

В системе (2.27), во-первых, добавлено уравнение для силы натяжения F_3 полотна на участке контроля, а во-вторых, выполнено преобразование уравнений сенсорных валов и пар цилиндров в соответствии с формулой Эйлера. Предполагается, что выполняемые с полотном различные технологические операции в том числе на участке контроля, не меняют существенно физико-механических свойств материала. Кроме того, углы, соответствующие начальному положению рулонов, полагаем равными нулю.

Итак, система уравнений (2.27) является математической моделью рассматриваемой перемоточной машины. В сущности, как уже было сказано ранее, эта модель является нелинейной; коэффициенты уравнений зависят от переменных состояния. Наличие элементов задержки в уравнениях (2.14 и 2.24) значительно усложняет модель, поскольку время запаздывания не является постоянной величиной, более того, оно заранее неизвестно и определяется из уравнения (2.26).

Вне зависимости от алгоритма управления требуется знать задание — задающие воздействия. Составим математическую модель номинального, то есть идеального режима, представив переменные состояния в виде суммы номинальных значений и отклонений с последующим обнулением последних [40]. Формально это сводится к замене исходных переменных на их номинальные значения. Будем исходить из следующих соображений. Согласно результатам вышеупомянутых исследований, сила натяжения полотна материала в наматываемом рулоне в общем случае является непостоянной величиной, зависящей в том числе от силы натяжения материала при намотке [27]. Во внимание также принимается и существование режимов разгона и торможения. В силу вышеперечисленных пунктов, не будем обнулять какие-либо производные переменных состояния заранее. Обозначим номинальные переменные горизонтальной чертой сверху.

Прежде всего отметим, что запаздывания в номинальной модели для данной задачи остаются в силе, потому как номинальные функции сил

натяжения на этом этапе неизвестны. Начнём определять величины с конца, то есть с уравнений, относящихся к узлу намотки. Из седьмого уравнения системы (2.27) составим новое дифференциальное уравнение, разрешив его относительно желаемой функции угла поворота рулона намотки:

$$\frac{d\bar{\gamma}_{p2}}{dt} = \frac{\bar{L}_5 \frac{d\bar{F}_5}{dt} + \bar{v}_{c62} (\bar{F}_5 + SE)}{[\bar{F}_4(t - t_{02}) + SE] \left(\frac{d\bar{L}_5}{d\bar{\gamma}_{p2}} + \bar{r}_{ep2} \right)}$$

Поскольку в общем случае желаемую силу натяжения полотна $\bar{F}_5$ можно представить как некую функцию номинального угла поворота рулона намотки $\bar{\gamma}_{p2}$, то необходимо выполнить преобразование:

$$\frac{d\bar{\gamma}_{p2}}{dt} = \frac{\bar{v}_{c62} (\bar{F}_5 + SE)}{[\bar{F}_4(t - t_{02}) + SE] \left(\bar{L}'_5(\bar{\gamma}_{p2}) + \bar{r}_{ep2} \right) - \bar{L}_5 \bar{F}'_5(\bar{\gamma}_{p2})} \quad (2.28)$$

Нетрудно заметить, что, если умножить обе части уравнения (2.28) на радиус вращения $\bar{r}_{ep2}$, то получим желаемую угловую скорость рулона как нелинейную функцию t . Сила натяжения $\bar{F}_4$ подлежит определению, для чего воспользуемся девятым уравнением системы (2.27):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{c62}}{dt} &= \frac{r_{c62}^2}{J_{c62}} (\bar{F}_5 - \bar{F}_4) - \frac{M_{nu2} r_{c62}}{J_{c62}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{F}_4 &= \bar{F}_5 - \frac{M_{nu2}}{r_{c62}} - \frac{J_{c62}}{r_{c62}^2} \frac{d\bar{v}_{c62}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из (2.29) понятно, что наличие ненулевого момента силы трения подшипников качения неизбежно даст меньшую номинальную силу

натяжения на следующем участке. Аналогичный эффект даст режим разгона. На данном этапе оставим формулу именно в таком виде. Далее, из второго уравнения системы (2.27) найдём номинальное управляющее воздействие (напряжение), подаваемое на электродвигатель привода рулона намотки:

$$\begin{aligned} \bar{u}_4 = & \frac{\bar{J}_{p2} R_4}{c_{m4}} \frac{d^2 \bar{\gamma}_{p2}}{dt^2} + \frac{R_4}{2c_{m4}} \frac{d\bar{J}_{p2}}{d\bar{\gamma}_{p2}} \left(\frac{d\bar{\gamma}_{p2}}{dt} \right)^2 + \\ & + c_{e4} \frac{d\bar{\gamma}_{2p}}{dt} + \frac{R_4 \bar{r}_{n2}}{c_{m4}} \bar{F}_5 + \frac{R_4 (ge_2 \cos \bar{\gamma}_{p2} + C_{nu2})}{c_{m4}} \bar{M}_{p2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Шестое уравнение в (2.27) даёт соотношение между скоростями сенсорного вала и парой подающих цилиндров узла намотки:

$$\bar{v}_{c\phi 2} = \frac{L_4 \frac{d\bar{F}_4}{dt} + \bar{v}_{\phi 2} (\bar{F}_4 + SE)}{\bar{F}_3 + SE}. \quad (2.31)$$

Равенство этих скоростей при постоянном номинальном значении $\bar{F}_4$ возможно только при равенстве желаемых значений сил натяжения на участке контроля качества — $\bar{F}_3$ и на участке между парой подающих цилиндров и сенсорным валом — $\bar{F}_4$. Отметим, что при учёте момента силы трения подшипников сенсорного вала имеем $\bar{F}_3 \neq \bar{F}_5$.

Из уравнений (2.29) и (2.31) составим дифференциальное уравнение относительно силы натяжения $\bar{F}_4$:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \bar{F}_4}{dt^2} + \frac{\bar{v}_{\epsilon 2}}{L_4} \frac{d\bar{F}_4}{dt} + \bar{F}_4 \left(\frac{1}{L_4} \frac{d\bar{v}_{\epsilon 2}}{dt} + \frac{(\bar{F}_3 + SE)r_{\epsilon 2}^2}{L_4 J_{\epsilon 2}} \right) = \\
& = \frac{\bar{F}_5 (\bar{F}_3 + SE)r_{\epsilon 2}^2}{L_4 J_{\epsilon 2}} - \frac{SE}{L_4} \frac{d\bar{v}_{\epsilon 2}}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Дифференциальное уравнение второго порядка (2.32) является линейным уравнением с переменными коэффициентами. Очевидно, что его решение даже для режима стабилизации при постоянстве скорости цилиндров намотки будет некой в общем виде нелинейной функцией, зависящей напрямую от желаемой силы натяжения $\bar{F}_5$.

Следующим шагом станет нахождение номинального управляющего воздействия для электродвигателя привода пары подающих цилиндров:

$$\bar{u}_3 = \frac{J_{\epsilon 2} R_3}{c_{m3} r_{\epsilon 2}} \frac{d\bar{v}_{\epsilon 2}}{dt} + \frac{c_{\epsilon 3}}{r_{\epsilon 2}} \bar{v}_{\epsilon 2} - R_3 \frac{r_{\epsilon 2}}{c_{m3}} (\bar{F}_4 - \bar{F}_3). \tag{2.33}$$

Рассмотрим уравнение, описывающее изменение силы натяжения в номинальном режиме на участке контроля — связующем участке между узлами размотки и намотки:

$$L_3 \frac{d\bar{F}_3}{dt} + \bar{v}_{\epsilon 1} \bar{F}_3 - \bar{v}_{\epsilon 2} \bar{F}_2 = SE (\bar{v}_{\epsilon 2} - \bar{v}_{\epsilon 1}). \tag{2.34}$$

В случае равенства скоростей пар цилиндров при постоянном значении $\bar{F}_3$ получится равенство $\bar{F}_3 = \bar{F}_2$, то есть сила натяжения на участке контроля будет создаваться за счёт силы натяжения на участке между парой разматывающих цилиндров и сенсорным валом узла размотки. В случае формирования желаемой силы натяжения именно за счёт разности скоростей на границах участка, можно найти номинальную скорость пары

разматывающих цилиндров. В любом случае, номинальное управляющее воздействие для электродвигателя привода пары разматывающих цилиндров определяется следующим образом:

$$\bar{u}_2 = \frac{J_{\epsilon 1} R_2}{c_{m2} r_{\epsilon 1}} \frac{d\bar{v}_{\epsilon 1}}{dt} + \frac{c_{e2}}{r_{\epsilon 1}} \bar{v}_{\epsilon 1} - R_2 \frac{r_{\epsilon 1}}{c_{m2}} (\bar{F}_3 - \bar{F}_2). \quad (2.35)$$

Номинальное значение силы натяжения $\bar{F}_2$ найдём из восьмого уравнения системы (2.27):

$$\bar{F}_2 = \bar{F}_1 + \frac{M_{nu1}}{r_{\epsilon 1}} + \frac{J_{\epsilon 1}}{r_{\epsilon 1}^2} \frac{d\bar{v}_{\epsilon 1}}{dt}. \quad (2.36)$$

Очевидно, как и в случае узла намотки (2.29), в действительности силы натяжения на обоих участках полотна в пределах одного узла не могут быть равны ввиду ненулевого момента силы трения подшипников. Определим значение номинальной скорости сенсорного вала:

$$\bar{v}_{\epsilon 1} = \frac{-L_2 \frac{d\bar{F}_2}{dt} + \bar{v}_{\epsilon 1} (\bar{F}_1 (t - t_1) + SE)}{\bar{F}_2 + SE}. \quad (2.37)$$

Из оставшихся двух уравнений — первого и третьего — в системе (2.27) можно найти номинальную функцию угла поворота этого рулона размотки и номинальное управляющее воздействие для электродвигателя привода этого рулона:

$$\frac{d\bar{\gamma}_{p1}}{dt} = \frac{\bar{L}_1 \frac{d\bar{F}_1}{dt} - \bar{v}_{\epsilon 1} (\bar{F}_{p1} + SE)}{-\bar{r}_{\epsilon p1} (\bar{F}_1 + SE) + \frac{d\bar{L}_1}{d\bar{\gamma}_{p1}} (\bar{F}_{p1} + SE)}. \quad (2.38)$$

$$\bar{u}_1 = -\frac{\bar{J}_{p1} R_1}{c_{m1}} \frac{d^2 \bar{\gamma}_{1p}}{dt^2} - \frac{R_1}{c_{m1}} \frac{d\bar{J}_{p1}}{d\bar{\gamma}_1} \left(\frac{d\bar{\gamma}_{1p}}{dt} \right)^2 - c_{e1} \frac{d\bar{\gamma}_{1p}}{dt} + \frac{R_1 \bar{r}_{n1}}{c_{m1}} \bar{F}_1 - \frac{R_1 C_{nu1}}{c_{m1}} \bar{M}_{p1}. \quad (2.39)$$

Уравнения и формулы (2.28-2.39) определяют соотношения номинальных параметров режима работы перемоточной машины.

Выясним примерное значение момента силы трения подшипников сенсорного вала. К примеру, рассмотрим сенсорный вал PD 3010 со следующими характеристиками [45]:

Таблица 2.1. Параметры сенсорного вала PD 3010

Длина рабочей поверхности, макс., мм	1800
Диаметр, мм	100
Скорость, макс, <i>об/мин</i>	3000
Масса при длине рабочей поверхности 600 мм – 10 кг, каждый сектор по 100 мм, кг	1.05

Примем рабочую длину максимальной и рассчитаем массу вала:
 $1.05 \cdot \frac{1800 - 600}{100} + 10 = 22.6 \text{ кг}$. Наибольший момент инерции при равных массах и радиусах имеет полый цилиндр. Разумеется, в действительности вся масса не может быть сосредоточена в стенках вала и потому истинное значение будет меньше. В этом случае величину разности между силами натяжения оценим на основе (2.29) и (2.36) следующим образом:

$$\Delta F = M_{nu} / r_{cs} = g f_m r_{nu} m_{cs} / r_{cs}.$$

Коэффициент трения при радиальной нагрузке оценивается в диапазоне $f_m \in [0.001 \ 0.01]$. Выберем максимальный f_m , тогда, если радиус подшипника равен 10 мм, $\Delta \approx 0.452 \text{ Н}$. При желаемых значениях силы натяжения порядка сотен ньютонов, это разность несущественна. Кроме того, следует учесть возможные изменения коэффициента трения в процессе работы

и неточность предварительного измерения момента силы трения. В силу этих причин, при дальнейшей работе с математической моделью, включая синтез алгоритма управления, моменты сил трения в сенсорных валах не будут приняты во внимание, однако при моделировании они, безусловно, будут учтены.

В процессе работы машины желательно выдерживать постоянную скорость полотна и постоянную силу натяжения, это обеспечит контролируемое движение полотна. Однако, как уже было сказано ранее, изменением силы натяжения на намотке можно влиять на параметры рулона намотки, в частности, на касательные и радиальные напряжения, силу натяжения полотна внутри рулона. Исходя из этого, примем первым основным заданием для перемоточной машины функцию $\bar{F}_5$.

В уравнении (2.29) обнуляется слагаемое с моментом трения подшипников, и сила натяжения $\bar{F}_4$ может быть постоянной, только если скорость сенсорного вала будет меняться по закону, напрямую зависящему от задания $\bar{F}_5$. Согласно уравнению (2.31), при этом условии обеспечить такой закон изменения скорости можно за счёт изменения силы натяжения $\bar{F}_3$ и/или скорости пар цилиндров намотки. Дальнейшие рассуждения приводят к другим непостоянным величинам.

Изменим порядок рассуждений. Задание $\bar{F}_5$ остаётся в силе, но теперь добавим к нему условие постоянства скорости пар цилиндров размотки и намотки и силы натяжения на участке контроля $\bar{F}_3$. В таком случае, как легко заметить из уравнения (2.34), номинальная сила натяжения $\bar{F}_2$ должна быть постоянной, что в свою очередь, исходя из уравнения (2.36) при обнулении момента трения подшипников, означает либо постоянство силы натяжения $\bar{F}_1$ и скорости сенсорного вала, либо их функциональную связь. На данном этапе рассмотрим вариант с постоянством, а уравнение (2.37) подтверждает возможность этого варианта. Обратим внимание, что при задании силы

натяжения участка контроля и скорости пар цилиндров намотки в уравнении (2.34) остаются неизвестными скорость пар цилиндров размотки и сила натяжения $\bar{F}_2$. Заданием силы натяжения на первом участке размотки $\bar{F}_1$ можно определить как $\bar{F}_2$, так и скорость сенсорного вала намотки. Уравнениями (2.38) и (2.39) определяются желаемый закон угла поворота рулона размотки и номинальное управляющее воздействие его привода соответственно.

2.5 Редукция математической модели пермоточной машины

Математическая модель всей системы (2.27) содержит одиннадцать дифференциальных уравнений. Исследуем возможность редукции модели, основываясь на следующем предположении. Как уже было показано, разность сил натяжения на участках до и после сенсорных валов составляет порядка долей ньютона и очевидно, что чем меньше будет трение в подшипниках сенсорных валов, тем меньше будет разность; при значениях сил натяжения на участках полотна порядка сотен ньютонов имеет смысл рассмотреть редукцию математической модели путём исключения дифференциальных уравнений, описывающих динамику сенсорных валов. В таком случае, функциональную схему можно представить в следующем виде (рисунок 2.12, обозначения см. на рисунках 2.2 и 2.7):

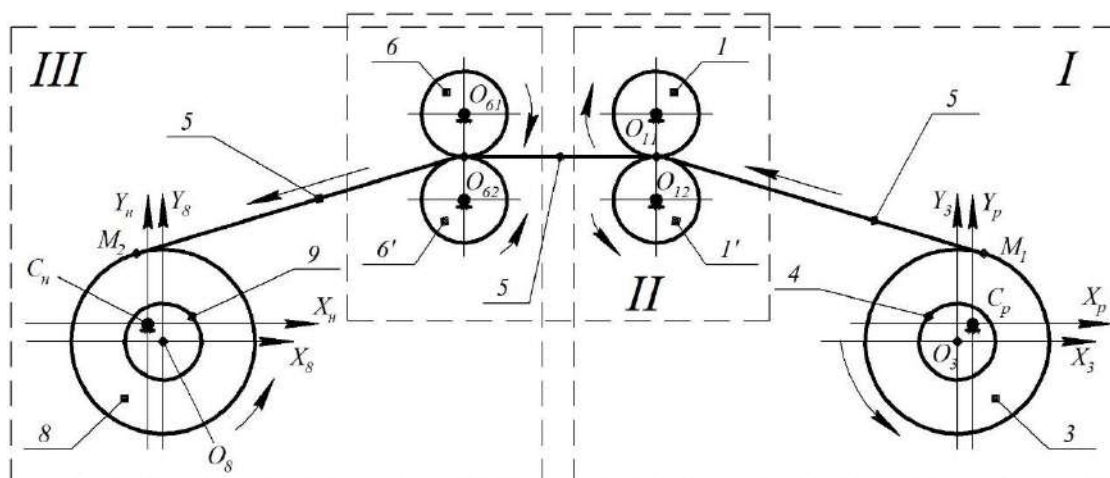


Рисунок 2.12 — Схема пермоточной машины

При преобразовании математической модели учтём, что: во-первых, объединение первого и второго, а также четвёртого и пятого участков полотна в соответствующих уравнениях приведёт к суммированию их длин, во-вторых, в этих же уравнениях меняются члены, содержащие скорости, а в-третьих, исчезает запаздывание, заложенное сенсорными валами. В результате редуцирования математической модели получим следующую систему уравнений (2.40):

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{d^2\gamma_{p1}}{dt^2} &= -\frac{1}{2J_{p1}} \frac{dJ_{p1}}{d\gamma_{p1}} \left(\frac{d\gamma_{p1}}{dt} \right)^2 - \frac{c_{e1}c_{m1}}{J_{p1}R_1} \frac{d\gamma_{p1}}{dt} + \frac{r_{n1}}{J_{p1}} F_1 - \\
 &\quad - \frac{c_{m1}}{J_{p1}R_1} u_1 - \frac{ge_1 \cos \gamma_{p1} + C_{nu1}}{J_{p1}} M_{p1}, \\
 \frac{d^2\gamma_{p2}}{dt^2} &= -\frac{1}{2J_{p2}} \frac{dJ_{p2}}{d\gamma_{p2}} \left(\frac{d\gamma_{p2}}{dt} \right)^2 - \frac{c_{e4}c_{m4}}{J_{p2}R_4} \frac{d\gamma_{p2}}{dt} - \frac{r_{n2}}{J_{p2}} F_5 + \\
 &\quad + \frac{c_{m4}}{J_{p2}R_4} u_4 - \frac{ge_2 \cos \gamma_{p2} + C_{nu2}}{J_{p2}} M_{p2}, \\
 \frac{dF_1}{dt} &= -\frac{r_{ep1}}{L_1 + L_2} \frac{d\gamma_{p1}}{dt} F_1 + \frac{SE}{L_1 + L_2} \left(v_{e1} - \frac{d\gamma_{p1}}{dt} r_{ep1} \right) + \\
 &\quad + \frac{d\gamma_{p1}}{dt} \frac{SE + F_{p1}}{L_1 + L_2} \frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} + v_{e1} \frac{F_{p1}}{L_1 + L_2}, \\
 \frac{dF_3}{dt} &= -\frac{v_{e1}}{L_3} F_3 + \frac{SE}{L_3} (v_{e2} - v_{e1}) + \frac{v_{e2}}{L_3} F_2, \\
 \frac{dF_5}{dt} &= -\frac{v_{e2}}{L_4 + L_5} F_5 + \frac{SE}{L_4 + L_5} \left(r_{ep2} \frac{d\gamma_{p2}}{dt} - v_{e2} \right) + \\
 &\quad + \frac{d\gamma_{p2}}{dt} \frac{SE + F_3}{L_4 + L_5} \frac{dL_5}{d\gamma_{p2}} + r_{ep2} \frac{d\gamma_{p2}}{dt} \frac{F_3}{L_4 + L_5}, \\
 \frac{dv_{e1}}{dt} &= -\frac{c_{e2}c_{m2}}{J_{e1}R_2} v_{e1} + \frac{r_{e1}^2}{J_{e1}} (F_3 - F_1) + \frac{c_{m2}r_{e1}}{J_{e1}R_2} u_2, \\
 \frac{dv_{e2}}{dt} &= -\frac{c_{e3}c_{m3}}{J_{e2}R_3} v_{e2} + \frac{c_{m3}r_{e2}}{J_{e2}R_3} u_3 + \frac{r_{e2}^2}{J_{e2}} (F_5 - F_3).
 \end{aligned} \right. \quad (2.40)$$

Для этой модели повторим процедуру определения задающих воздействий с верхнего уровня управления и расчёта внутренних задающих воздействий. Через пятое уравнение системы найдём желаемый закон изменения угла поворота рулона намотки:

$$\frac{d\bar{\gamma}_{p2}}{dt} = \frac{(L_4 + \bar{L}_5) \frac{d\bar{F}_5}{dt} + \bar{v}_{e2} (\bar{F}_5 + SE)}{[\bar{F}_3 + SE] \left(\frac{d\bar{L}_5}{d\bar{\gamma}_{p2}} + \bar{r}_{ep2} \right)},$$

или

$$\frac{d\bar{\gamma}_{p2}}{dt} = \frac{\bar{v}_{e2} (\bar{F}_5 + SE)}{[\bar{F}_3 + SE] \left(\frac{d\bar{L}_5}{d\bar{\gamma}_{p2}} + \bar{r}_{ep2} \right) - (L_4 + \bar{L}_5) \frac{d\bar{F}_5}{d\bar{\gamma}_{p2}}}. \quad (2.41)$$

Будем по-прежнему считать силу натяжения $\bar{F}_5$ одним из задающих воздействий. Считая эту функцию известной и найдя численное решение (2.41), можем из второго уравнения системы (2.40) найти необходимое номинальное управляющее воздействие, подаваемое на электродвигатель, вращающий рулон намотки (2.30). Следующие однозначно «верхние» задания, то есть задания с верхнего уровня управления — скорость и сила натяжения полотна на участке контроля. Эту скорость будем определять, как и прежде, через скорость цилиндров намотки. Желаемую зависимость угла поворота рулона размотки от времени найдём из третьего уравнения системы (2.40):

$$\frac{d\bar{\gamma}_{p1}}{dt} = \frac{(\bar{L}_1 + L_2) \frac{d\bar{F}_1}{dt} - \bar{v}_{e1}(\bar{F}_{p1} + SE)}{-\bar{r}_{ep1}(\bar{F}_1 + SE) + \frac{d\bar{L}_1}{d\bar{\gamma}_{p1}}(\bar{F}_{p1} + SE)}.$$

Из четвертого уравнения системы (2.40) найдём скорость пары цилиндров размотки при известном $\bar{F}_1$:

$$\bar{v}_{e1} = \frac{\bar{v}_{e2}(\bar{F}_1 + SE) - L_3 \frac{d\bar{F}_3}{dt}}{\bar{F}_3 + SE}.$$

Очевидно, что при желаемой постоянной силе натяжения полотна на участке контроля, пропорциональность номинальной скорости цилиндров размотки скорости цилиндров намотки зависит от силы натяжения полотна на участке размотки. Расчёт номинальных управляющих воздействий аналогичен соответствующим расчётам исходной модели с поправкой на часть коэффициентов.

Итак, набор задающих воздействий для модели (2.40) содержит задания сил натяжения на всех трёх участках полотна и задания скорости цилиндров намотки.

Следует отметить, что функции, являющиеся решением дифференциальных уравнений, описывающих изменение сил натяжения, могут принимать как положительные значения, так и отрицательные. Отрицательное значение соответствует противоположному от принятого изначально направлению, что соответствует, например, ситуации при намотке полотна на рулон в узле размотки и соответственно наоборот в узле намотки. Как следствие, учёт направления движения полотна вкупе с условием оперировать только неотрицательными значениями сил натяжения, приводит к

необходимости корректирования дифференциальных уравнений сил натяжения.

Как и прежде, вывод уравнения базируется на балансе длины рассматриваемого участка. Начнём с простейшего случая, при котором окружные скорости цилиндров на границах участка положительны: $v_i, v_{i-1} > 0$, где v_i, v_{i-1} — скорости полотна в конце и начале участка. Обозначим длину растянутого полотна L_i , а длину ненатянутого — L_0 . Введя в рассмотрение относительное удлинение полотна $\varepsilon_i = (L_i - L_0)/L_0$, найдём L_0 :

$$L_0 = \frac{L_i}{1 + \varepsilon_i}. \quad (2.42)$$

При удлинении полотна в пределах упругости его поперечное сечение практически не изменяется. Тогда изменение количества бумаги на некотором участке можно оценивать изменением длины ненатянутого полотна на этом участке. Найдём приращение длины ненатянутого полотна за время Δt со стороны начала участка:

$$\Delta L_{01} = \frac{v_{i-1} \Delta t}{1 + \varepsilon_{i-1}},$$

а для конца участка соответствующее приращение будет:

$$\Delta L_{02} = \frac{v_i \Delta t}{1 + \varepsilon_i}.$$

Рассчитаем приращение длины ненатянутого полотна на анализируемом участке

$$\Delta L_0 = \Delta L_{01} - \Delta L_{02} = \left(\frac{v_{i-1}}{1 + \varepsilon_{i-1}} - \frac{v_i}{1 + \varepsilon_i} \right) \Delta t$$

и вычислим предел отношения приращений:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L_0}{\Delta t} = \frac{dL_0}{dt} = \frac{v_{i-1}}{1 + \varepsilon_{i-1}} - \frac{v_i}{1 + \varepsilon_i}. \quad (2.43)$$

С другой стороны, продифференцировав по времени (2.42), получим следующее выражение:

$$\frac{dL_0}{dt} = \frac{\frac{dL_i}{dt}(1 + \varepsilon_i) - L_i \frac{d\varepsilon_i}{dt}}{(1 + \varepsilon_i)^2}. \quad (2.44)$$

Приравняем правые части (2.43) и (2.44), после преобразования получим:

$$v_{i-1} \frac{(1 + \varepsilon_i)^2}{1 + \varepsilon_{i-1}} - v_i (1 + \varepsilon_i) = \frac{dL_i}{dt} (1 + \varepsilon_i) - L_i \frac{d\varepsilon_i}{dt}.$$

Выполним линеаризацию уравнения по относительным удлинениям, руководствуясь дополнительными соображениями о том, что модуль упругости бумаги составляет величину порядка нескольких гигапаскалей, а силу натяжения ограничим максимальным значением примерно в один килоньютон. В данном случае необходимо выполнить разложение в ряд

Макларена слагаемого $\varepsilon = \frac{(1 + \varepsilon_i)^2}{1 + \varepsilon_{i-1}}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}) &\approx \varepsilon(0,0) + \varepsilon_i \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\substack{\varepsilon_i=0, \\ \varepsilon_{i-1}=0}} + \varepsilon_{i-1} \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{i-1}} \right|_{\substack{\varepsilon_i=0, \\ \varepsilon_{i-1}=0}} = \\
&= 1 + \varepsilon_i \left. \frac{2(1+\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{i-1}} \right|_{\substack{\varepsilon_i=0, \\ \varepsilon_{i-1}=0}} - \varepsilon_{i-1} \left. \frac{(1+\varepsilon_i)^2}{(1+\varepsilon_{i-1})^2} \right|_{\substack{\varepsilon_i=0, \\ \varepsilon_{i-1}=0}} = 1 + 2\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}.
\end{aligned}$$

С учётом закона Гука $\sigma = F/S = E\varepsilon$ окончательно получим:

$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{1}{L_i} \left[\left(v_i - v_{i-1} + \frac{dL_i}{dt} \right) (SE + F_i) - v_{i-1} (F_i - F_{i-1}) \right]. \quad (2.45)$$

Уравнение (2.45) будет использоваться в окончательной математической модели и в дальнейших расчётах при определении параметров номинального режима.

Следующий вариант с отрицательными скоростями, что соответствует ситуации с вращением в противоположную сторону. Выражение (2.43) преобразуется к виду $\frac{dL_0}{dt} = \frac{|v_i|}{1+\varepsilon_{i+1}} - \frac{|v_{i-1}|}{1+\varepsilon_i}$, а значит, соответствующее дифференциальное уравнение силы натяжения имеет вид:

$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{1}{L_i} \left[\left(|v_{i-1}| + \frac{dL_i}{dt} \right) (SE + F_i) - |v_i| (SE + 2F_i - F_{i+1}) \right].$$

Как можно заметить, в дифференциальном уравнении относительно L_0 скорости, а также относительное расположение предыдущего и последующего участков полотна поменялись местами. Смоделируем вариант движения полотна на участке с противоположно направленными скоростями на

границах участка, причём $v_{i-1} < 0$. Очевидно, что (2.43) будет иметь вид

$$\frac{dL_0}{dt} = -\frac{v_i + |v_{i-1}|}{1 + \varepsilon_i}, \text{ а итоговое уравнение для силы натяжения:}$$

$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{1}{L_i} \left(v_i + |v_{i-1}| + \frac{dL_i}{dt} \right) (SE + F_i).$$

Наконец, рассмотрим последний вариант с $v_i < 0$. Производная (2.43)

$$\text{меняется на } \frac{dL_0}{dt} = \frac{v_{i-1}}{1 + \varepsilon_{i-1}} + \frac{|v_i|}{1 + \varepsilon_{i+1}}, \text{ а уравнение для силы соответственно:}$$

$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{1}{L_i} \left[\frac{dL_i}{dt} (SE + F_i) - |v_i| (SE + 2F_i - F_{i+1}) - v_{i-1} (SE + 2F_i - F_{i-1}) \right].$$

Формально ещё есть вариант с нулевыми скоростями на границах.

$$\text{Уравнение для силы натяжения имеет вид } \frac{dF_i}{dt} = \frac{dL_i}{dt} \frac{SE + F_i}{L_i}.$$

Итак, приняв вариант с движением полотна, соответствующий положительным значениям скоростей на границах участка, составим дифференциальные уравнения для всех трёх участков и запишем новую систему дифференциальных уравнений (2.46).

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{d^2\gamma_{p1}}{dt^2} &= -\frac{1}{2J_{p1}} \frac{dJ_{p1}}{d\gamma_{p1}} \left(\frac{d\gamma_{p1}}{dt} \right)^2 - \frac{c_{e1}c_{m1}}{J_{p1}R_1} \frac{d\gamma_{p1}}{dt} + \frac{r_{n1}}{J_{p1}} F_1 - \\
&\quad - \frac{c_{m1}}{J_{p1}R_1} u_1 - \frac{ge_1 \cos \gamma_{p1} + C_{nu1}}{J_{p1}} M_{p1}, \\
\frac{d^2\gamma_{p2}}{dt^2} &= -\frac{1}{2J_{p2}} \frac{dJ_{p2}}{d\gamma_{p2}} \left(\frac{d\gamma_{p2}}{dt} \right)^2 - \frac{c_{e4}c_{m4}}{J_{p2}R_4} \frac{d\gamma_{p2}}{dt} - \frac{r_{n2}}{J_{p2}} F_5 + \\
&\quad + \frac{c_{m4}}{J_{p2}R_4} u_4 - \frac{ge_2 \cos \gamma_{p2} + C_{nu2}}{J_{p2}} M_{p2}, \\
\frac{dF_1}{dt} &= \frac{1}{L_1 + L_2} \left[\left(v_{e1} - \dot{\gamma}_{p1} r_{ep1} + \dot{\gamma}_{p1} \frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} \right) (SE + F_1) - \dot{\gamma}_{p1} r_{ep1} (F_1 - F_p) \right] \\
\frac{dF_3}{dt} &= \frac{1}{L_3} \left[(v_{e2} - v_{e1}) (SE + F_3) - v_{e1} (F_3 - F_1) \right], \\
\frac{dF_5}{dt} &= \frac{1}{L_4 + L_5} \left[\left(\dot{\gamma}_{p2} r_{ep2} - v_{e2} + \dot{\gamma}_{p2} \frac{dL_5}{d\gamma_{p2}} \right) (SE + F_5) - v_{e2} (F_5 - F_3) \right], \\
\frac{dv_{e1}}{dt} &= -\frac{c_{e2}c_{m2}}{J_{e1}R_2} v_{e1} + \frac{r_{e1}^2}{J_{e1}} (F_3 - F_1) + \frac{c_{m2}r_{e1}}{J_{e1}R_2} u_2, \\
\frac{dv_{e2}}{dt} &= -\frac{c_{e3}c_{m3}}{J_{e2}R_3} v_{e2} + \frac{c_{m3}r_{e2}}{J_{e2}R_3} u_3 + \frac{r_{e2}^2}{J_{e2}} (F_5 - F_3).
\end{aligned} \right. \quad (2.46)$$

Окончательно определим задание для перемоточной машины. Сила натяжения полотна $\bar{F}_3$ на участке контроля как и скорость цилиндров намотки $\bar{v}_{e2}$ задаются с верхнего уровня управления. Сила натяжения полотна на участке размотки $\bar{F}_1$ либо также задаётся изначально, либо определяется по известным соотношениям. Далее из четвёртого уравнения системы (2.46) находим желаемую скорость цилиндров размотки $\bar{v}_{e1}$, а затем из третьего и пятого уравнений несложно получить желаемые функции углов поворотов рулонов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_{e1} = \frac{-L_3 \dot{\bar{F}}_3 + \bar{v}_{e2} (SE + \bar{F}_3)}{SE + 2\bar{F}_3 - \bar{F}_1}, \\ \frac{d\bar{\gamma}_{p1}}{dt} = \frac{(\bar{L}_1 + L_2) \dot{\bar{F}}_1 - \bar{v}_{e1} (SE + \bar{F}_1)}{(\bar{L}'_1(\gamma_{p1}) - \bar{r}_{ep1})(SE + \bar{F}_1) - \bar{r}_{ep1}(\bar{F}_1 - \bar{F}_p)}, \\ \frac{d\bar{\gamma}_{p2}}{dt} = \frac{(L_4 + \bar{L}_5) \dot{\bar{F}}_5 + \bar{v}_{e2} (SE + 2\bar{F}_5 - \bar{F}_3)}{(\bar{r}_{ep2} + \bar{L}'_5(\gamma_{p2}))(SE + \bar{F}_5)}. \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Дополним систему начальными условиями:

$$\begin{array}{l} \gamma_{p1}(0) = \gamma_{p1_0}, \quad \dot{\gamma}_{p1}(0) = \dot{\gamma}_{p1_0}, \\ \gamma_{p2}(0) = \gamma_{p2_0}, \quad \dot{\gamma}_{p2}(0) = \dot{\gamma}_{p2_0}, \end{array} \quad F_i(0) = F_{i_0}, i = \overline{1,3}, \quad v_{ej}(0) = v_{ej_0}, j = 1,2. \quad (2.48)$$

Итак, система дифференциальных уравнений (2.46) совместно с условиями (2.48) является нелинейной математической моделью перемоточной машины.

2.6 Выводы по главе 2

1. Разработаны динамические и математические модели узлов размотки и намотки, учитывающие особенности схемы проводки полотна и его упругость, а также изменения в процессе работы инерционных характеристик рулонов и геометрических параметров узлов.

2. Разработана математическая модель перемоточной машины, включающей в себя узлы размотки, контроля и намотки. Выполнен анализ номинального режима работы. Определен приоритет заданий переменных состояния.

3. Составлены дифференциальные уравнения, решения которых определяют номинальные функции углов поворотов рулонов, скоростей

цилиндров, и управляющих воздействий, подаваемых на индивидуальные приводы.

4. Было установлено по предварительным расчётам, что разность сил натяжения на участках полотна до и после сенсорного вала составляет порядка долей ньютонов. В соответствии с этим, была проведена редукция математической модели пермоточной машины.

5. Для редуцированной математической модели пермоточной машины были переопределены взаимосвязи между номинальными функциями переменных состояния.

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕМАТЫВАЕМОГО РУЛОНА ПОЛОТНА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССО-ЦЕНТРОВОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ

3.1 Геометрическая модель поперечного сечения рулона как эквидистантной спирали

В предыдущей главе была получена математическая модель (ММ) (2.46) перемоточной машины. В этой ММ есть два уравнения, описывающие движение рулонов размотки и намотки. Как уже было ранее заявлено, рулоны являются приблизительно телами вращения с переменными массо-центровочными характеристиками. Для анализа этих характеристик, принимая во внимание фактор плоской задачи, необходимо описать поперечное сечение рулона. Далее будет рассматриваться рулон размотки; все полученные основные результаты также справедливы и для рулона намотки.

Рассмотрим втулку с первым (начальным) витком при значении угла поворота $\gamma_{p1} = 0$ (рисунок 3.1, γ_{p1} — угол поворота рулона, см. рисунки 2.3, 2.8). Пусть $f = f(\varphi + \varphi_1)$ — гладкая функция, описывающая координаты точек на замкнутом контуре втулки, где $\varphi_1 = \text{const}$ — некоторый начальный угол, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда полярные координаты точек, расположенных на первом витке полотна в поперечном сечении рулона, могут быть связаны равенством:

$$r_0(\varphi + \varphi_1) = f(\varphi + \varphi_1) + g(\varphi + \varphi_1),$$

где $g(\varphi + \varphi_1)$ — функция, описывающая первый виток рулона. Для функции $f(\varphi + \varphi_1)$ потребуем выполнение условий:

$$f(\varphi_1) = f(\varphi_1 + 2\pi), \quad f'(\varphi_1) = f'(\varphi_1 + 2\pi) \quad (3.1)$$

Пусть $h = \text{const}$ — шаг витка (толщина полотна). Структура витков в поперечном сечении рулона представляет собой спираль. Обычно последовательность витков представляется спиралью Архимеда [27-31]. Однако витки спирали Архимеда не являются строго эквидистантными кривыми. В качестве примера, исследуем первые несколько витков спирали Архимеда, когда поперечное сечение втулки представлено окружностью: $r = r_{01} + h\varphi$, где r_{01} — радиус окружности. Перейдём к декартовым координатам и найдём выражение тангенса угла наклона касательной:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{h \sin \varphi + r \cos \varphi}{h \cos \varphi - r \sin \varphi}.$$

Определяя значение производной для $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi + 2\pi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, получаем:

$$\frac{dy(\varphi_1)}{dx(\varphi_1)} = \frac{h \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{h \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi}, \quad \frac{dy(\varphi_2)}{dx(\varphi_2)} = \frac{h \sin \varphi + r(\varphi + 2\pi) \cos \varphi}{h \cos \varphi - r(\varphi + 2\pi) \sin \varphi},$$

$$\frac{dy(\varphi_1)}{dx(\varphi_1)} \neq \frac{dy(\varphi_2)}{dx(\varphi_2)}.$$

Как видим, условие эквидистантности нарушается.

Будем строить эквидистантную спираль. Потребуем, чтобы начальная и конечная точки радиус-вектора $\vec{r}_0$ лежали на одной прямой, проходящей через точку O_3 , причём касательные к кривой $r_0(\varphi + \varphi_1)$ в указанных точках перпендикулярны к этой же прямой (рисунок 3.1). Это условие можно записать в виде:

$$r_0(\varphi_1) + h = r_0(\varphi_1 + 2\pi); \quad \left. \frac{x'_\varphi}{y'_\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1} = \left. \frac{x'_\varphi}{y'_\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1+2\pi} = \operatorname{tg}(\varphi_1), \quad (3.2)$$

где $x = r_0 \cos(\varphi + \varphi_1)$; $y = r_0 \sin(\varphi + \varphi_1)$.

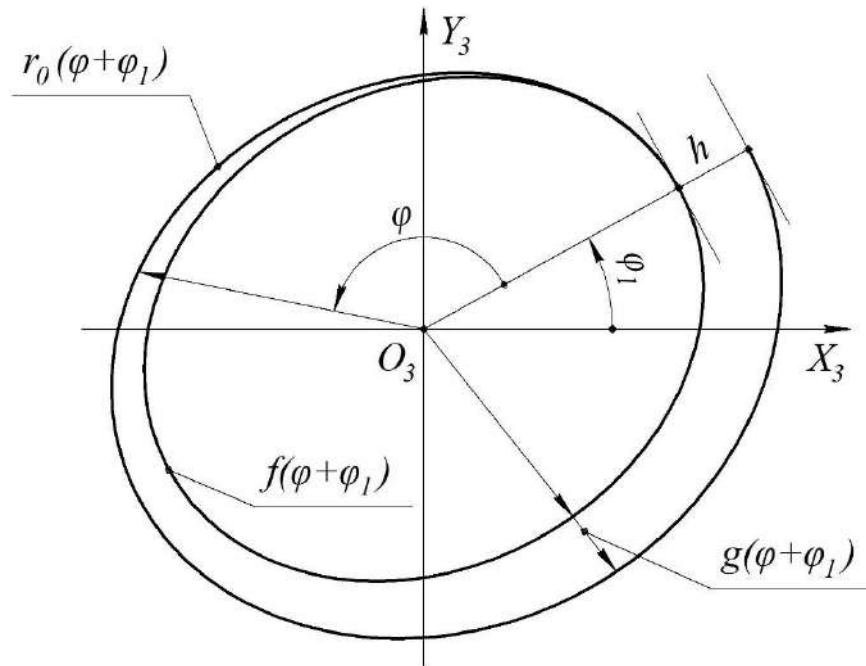


Рисунок 3.1 — Расчётная схема к определению функции первого витка

Следует отметить, что желательным, но необязательным условием является также неотрицательность производной искомой функции $r_0(\varphi)$. Будем считать, что начало первого витка рулона соответствует величине $\varphi_1 = 0$.

Из (3.1) и (3.2) нетрудно получить следующие условия, накладываемые на искомую функцию $g(\varphi)$:

$$g(0) = 0, \quad g(2\pi) = h, \quad g'(0) = g'(2\pi), \quad g'(0) = -f'(0). \quad (3.3)$$

Одним из вариантов функции $g(\varphi)$ является полином степени m , причём, исходя из (3.3), $m \geq 3$.

Будем конструировать функцию $g(\varphi)$ как кусочно-заданную функцию, описываемую полиномами m -й степени, если форма втулки незначительно отличается от окружности, в противном случае следует создавать функцию $g(\varphi)$ иначе, соблюдая условия (3.1) и (3.2).

Покажем, что при соблюдении определённых условий длина витка вне зависимости от выбранной функции будет ограничена сверху и снизу. Рассмотрим две функции:

$$r_1(\varphi) = f(\varphi), \quad r_2(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi).$$

Далее аргумент не будет указываться. Определение функций f, g было дано ранее. На рисунке 3.2 показана первая четверть декартовой плоскости с двумя исследуемыми функциями. В общем случае рассматривается участок изменения переменной φ такой, что обе функции имеют на нём производную dy/dx отрицательную или равную нулю.

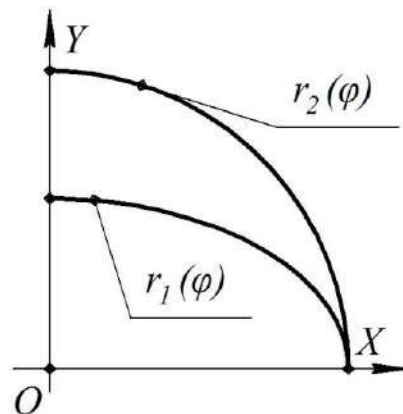


Рисунок 3.2 — Расчётная схема

Известны формулы для вычисления длины кривой в полярных и декартовых координатах:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Обозначим здесь $L_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r_1'^2 + r_1^2} d\varphi$, $L_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r_2'^2 + r_2^2} d\varphi$, где $r' = dr/d\varphi$.

Учитывая равенство пределов интегрирования для обеих кривых и то, что подынтегральные функции неотрицательны, сравним подкоренные выражения:

$$\begin{aligned} r_1'^2 + r_1^2 &= f'^2 + f^2, \\ r_2'^2 + r_2^2 &= f'^2 + 2fg' + g'^2 + f^2 + 2fg + g^2. \end{aligned}$$

Однозначный вывод о неравенстве длин $L_2 \geq L_1$ можно будет сделать, если:

$$2fg' + g'^2 + 2fg + g^2 \geq 0.$$

Воспользуемся введённым условием по производной: $\frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} \leq 0$; как следствие, очевидно, что $dx/d\varphi \leq 0$. Применяя полученный результат далее, находим, что:

$$\frac{dx}{d\varphi} = (r \cos \varphi)' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \leq 0 \Rightarrow r' \leq r \operatorname{tg} \varphi.$$

Аналогично несложно получить, что $f' \leq f \operatorname{tg} \varphi$. Выполним преобразование этого выражения:

$$f' \leq f \operatorname{tg} \varphi \Leftrightarrow -f' \geq -f \operatorname{tg} \varphi \Leftrightarrow -2f'g' \geq -2fg' \operatorname{tg} \varphi.$$

Исследуем исходное неравенство разности подкоренных выражений в соответствии с полученными результатами:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2f'g' + g'^2 + 2fg + g^2 \geq 0, \\ -2f'g' \geq -2g'f \operatorname{tg} \varphi. \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2f'g' + g'^2 + 2fg + g^2 - 2f'g' \geq -2g'f \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \\ & \Rightarrow g'^2 + 2fg + g^2 + 2g'f \operatorname{tg} \varphi \geq 0. \end{aligned}$$

Приняв $g' \geq 0$, в силу того, что $\operatorname{tg} \varphi \geq 0$, получаем верное неравенство. Нетрудно получить идентичные результаты и для других трёх оставшихся четвертей, после чего делается обобщающий вывод о неравенстве длин рассматриваемых кривых. В сущности, тем же методом доказывается и существование верхней границы длины витка.

В качестве примера приведем два варианта добавочной функции $g(\varphi)$ и их графики в развёрнутой полярной системе координат (рисунок 3.3):

$$g_1(\varphi) = \frac{h}{2} \sin\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right) + \frac{h}{2}, \quad g_2(\varphi) = \begin{cases} -\frac{h}{\pi^3} \varphi^3 + \frac{3h}{2\pi^2} \varphi^2, & \varphi \leq \pi, \\ -\frac{h}{\pi^3} \varphi^3 + \frac{9h}{2\pi^2} \varphi^2 - \frac{6h}{\pi} \varphi + 3h, & \varphi \geq \pi. \end{cases}$$

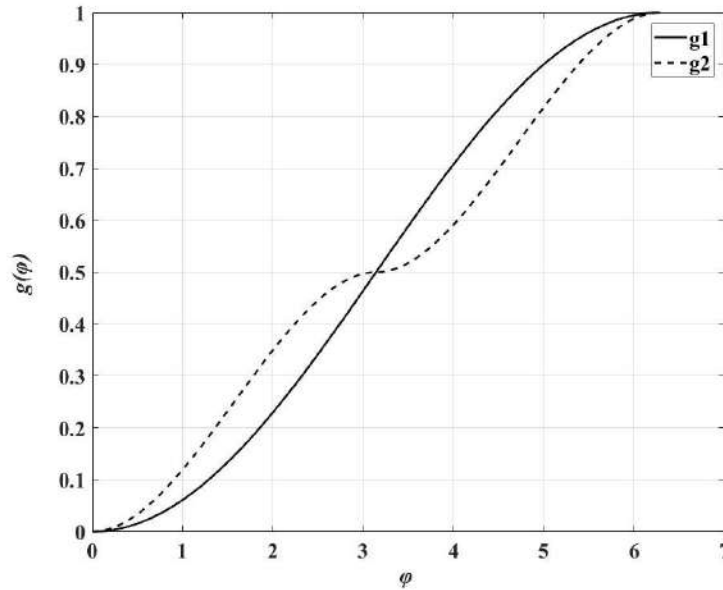


Рисунок 3.3 — Графики функций $g_1(\varphi)$ и $g_2(\varphi)$

Если длина первого витка не меньше длины $l_{\text{вт}}$ контура поперечного сечения втулки и не больше длины эквидистантной профилю кривой на расстоянии h , то общая длина полотна $L_{\text{общ}}$ удовлетворяет неравенствам (вывод формулы приведён далее):

$$\frac{2l_{\text{вт}} + k(N-1)}{2} N \leq L_{\text{общ}} \leq \frac{2(l_{\text{вт}} + \Delta) + k(N-1)}{2} N,$$

где k — разность длин любой пары соседних витков спирали (как будет показано далее, эта разность является константой), N — количество витков в рулоне, Δ — разность длин контура поперечного сечения втулки и его эквидистантной кривой на расстоянии h .

Отсюда следует, что разность между возможным максимальным и минимальным значениями общей длины равна $N\Delta$. Например, если количество витков в рулоне 5000, а толщина полотна материала (шаг спирали) — 80 мкм, то искомая разность составит 0.4 м, что, безусловно, при общей длине порядка нескольких километров незначительно. Руководствуясь

полученными результатами, в дальнейшем будем конструировать функцию первого витка, игнорируя фактор общей длины полотна материала в рулоне.

Составим уравнения n -го витка как кривой, эквидистантной кривой $n-1$ -го витка, для чего воспользуемся известными формулами [46,47]:

$$x_n = r_0 \cos(\varphi) + h(n-1)(r'_0 \sin(\varphi) + r_0 \cos(\varphi)) / \sqrt{(r'_0)^2 + (r_0)^2},$$

$$y_n = r_0 \sin(\varphi) - h(n-1)(r'_0 \cos(\varphi) - r_0 \sin(\varphi)) / \sqrt{(r'_0)^2 + (r_0)^2}.$$

Очевидно, что для всех $n \geq 2$ и $r'_0 \neq 0$, $\arctg(y_n/x_n) \neq \varphi$, то есть величина φ для всех витков, кроме первого, не является полярным углом. Рассмотрим поперечное сечение рулона с частью намотки (рисунок 3.4).

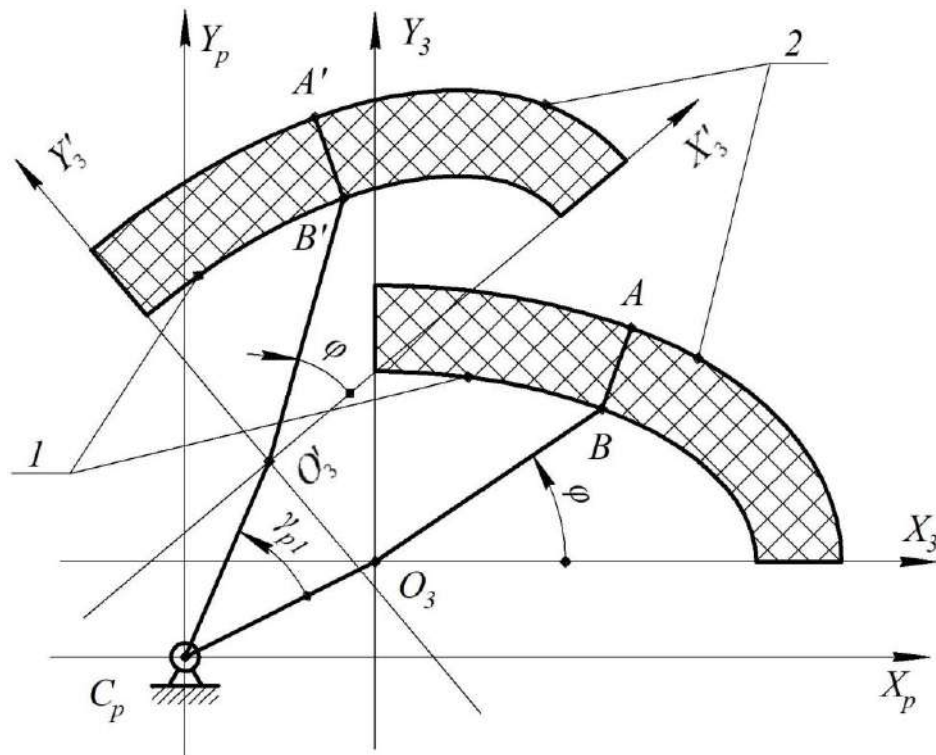


Рисунок 3.4 — Часть поперечного сечения рулона

На рисунке 3.4 обозначено: 1 — первый виток спирали, 2 — параллельный ему n -й виток. Точки A и B n -го и первого витков,

соответствующие углу φ , принадлежат общей к ним нормали. После поворота рулона на угол γ_{p1} вокруг оси, проходящей через центр C_p , локальная система координат $X_3O_3Y_3$, связанная с рулоном, преобразуется в систему $X'_3O'_3Y'_3$. Точки A и B переходят в точки A' и B' ; при этом $AB = A'B' = h(n-1)$.

Найдём квадрат расстояния между центром системы координат и точками спирали:

$$x_0 = r_0 \cos \varphi, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi, \quad k_n = h(n-1),$$

$$d_n^2 = x_n^2 + y_n^2 = r_0^2 + k_n^2 + k_n \frac{2r_0^2}{\sqrt{(r'_0)^2 + (r_0)^2}}.$$

Пусть любым двум значениям φ_1, φ_2 в пределах $X'_3O'_3Y'_3 [0; 2\pi]$ соответствуют значения d_1 и d_2 . Нетрудно заметить, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max(x_n^2 + y_n^2)}{\min(x_n^2 + y_n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d_2)_n'}{(d_1)_n'} = 1,$$

то есть вне зависимости от вида функции $f(\varphi)$, задающей форму втулки с учётом поставленных ранее условий, форма витков с ростом числа n приближается к форме окружности (рисунок 3.5).

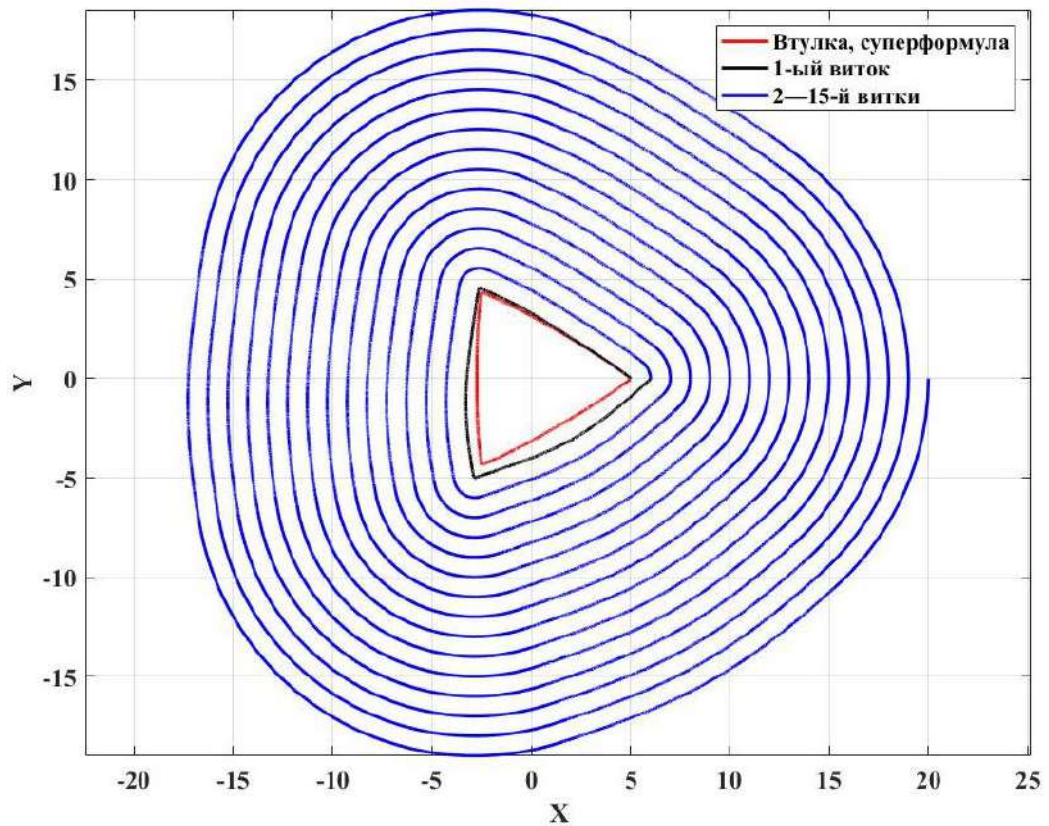


Рисунок 3.5 — Пример эквидистантной спирали

Длина n -го витка может быть определена через функцию первого витка из выражения:

$$L(n) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx_n}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{d\varphi}\right)^2} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(h(n-1) \frac{r_0^2 - r_0 r_0'' + 2(r_0')^2}{(r_0')^2 + (r_0)^2} + \sqrt{(r_0')^2 + (r_0)^2} \right) d\varphi.$$

Нетрудно показать, что разность длин соседних двух витков постоянна, то есть:

$$L(n+1) - L(n) = h \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r_0 r_0'' + 2(r_0')^2}{(r_0')^2 + (r_0)^2} d\varphi = k.$$

Тогда общая длина полотна в рулоне может быть определена по формуле:

$$L = \frac{2L(1) + k(N-1)}{2} N,$$

где $L(1)$ — длина первого витка, N — количество витков. Определить количество витков можно, либо зная значение внешнего радиуса рулона в какой-нибудь части, рассчитав расстояние от геометрического центра до этой части и соответствующий радиус втулки, либо через толщину и общую длину полотна.

3.2 Определение положения центра масс, массы и момента инерции рулона перематываемого полотна

В процессе размотки и намотки рулонов происходит изменение их массо-центровочных характеристик. Составим необходимые зависимости и начнём с определения координат центра масс (центра тяжести) (X_{cp}, Y_{cp}) поперечного сечения рулона (рисунок 3.6) [48,49].

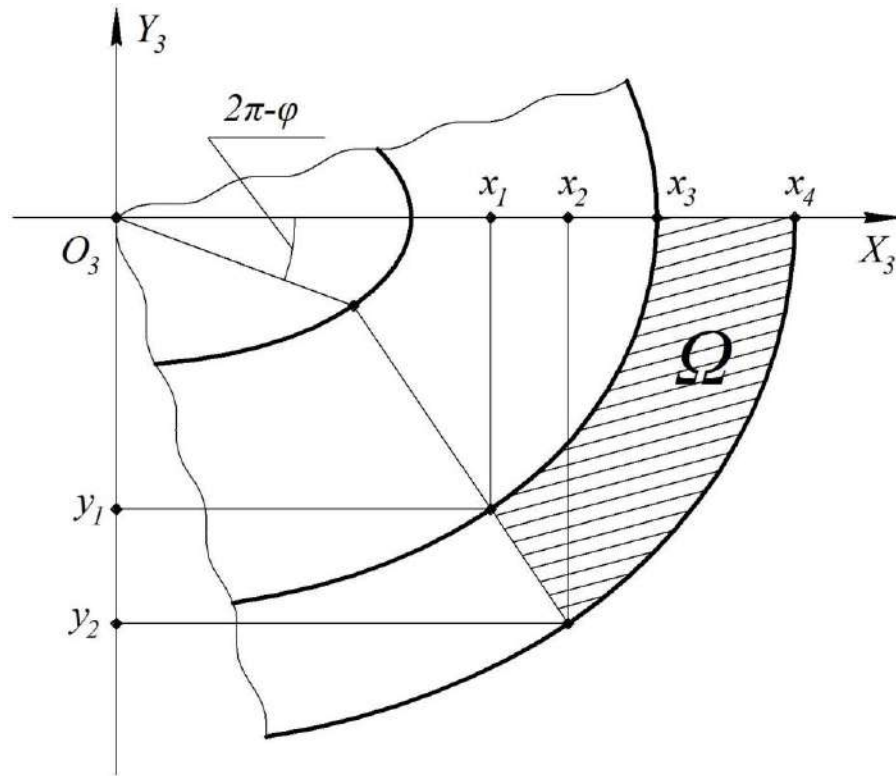


Рисунок 3.6 — Расчётная схема к определению (X_{cp}, Y_{cp}) , J_{p1} , M_{p1}

На рисунке 3.6 показан фрагмент Ω сечения полотна между витками с номерами $n-1$ и n . Будем определять координаты центра тяжести сечения рулона из следующих соображений. Во-первых, будем считать, что рулон представляет собой сплошную и однородную среду, а во-вторых, примем, что центр тяжести сечения втулки находится в точке O_3 . В таком случае, абсциссу центра тяжести можно записать в следующем виде (в этом подразделе $X_3 = x, Y_3 = y$ с целью упрощения записи):

$$X_{cp} = \frac{\iint_D x dD}{S_n - S_{em}},$$

где S_{em} — площадь, ограниченная контуром втулки, D — область интегрирования, ограниченная контуром n -го витка спирали, S_n — площадь области D . По мере размотки удаляется материал, заключённый в области Ω

(для рулона намотки соответственно он прибавляется), определяемой параметром φ (рисунок 3.6). Преобразуем двойной интеграл с учётом этого фактора. Обозначим: y_n, y_{n-1} — функции, описывающие витки с номерами n и $n-1$; a — абсцисса точки n -го витка спирали, соответствующей $\varphi = \pi$; $y = kx + b$ — уравнение прямой, проходящей через точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Получим:

$$\begin{aligned}
 \iint_D x dD &= \int_a^{x_3} dx \int_0^{y_n} x dy + \int_a^{x_4} dx \int_{y_n}^0 x dy - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{kx+b}^0 x dy - \int_{x_2}^{x_4} dx \int_{y_n}^0 x dy + \int_{x_1}^{x_3} dx \int_{y_{n-1}}^0 x dy = \\
 &= \int_a^{x_3} xy_n dx - \int_a^{x_4} xy_n dx + \int_{x_1}^{x_2} x(kx+b) dx + \int_{x_2}^{x_4} xy_n dx - \int_{x_1}^{x_3} xy_{n-1} dx = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} x(kx+b) dx + \int_{\pi}^0 \alpha_n \beta_n \alpha'_n d\varphi - \int_{\pi}^{2\pi} \alpha_n \beta_n \alpha'_n d\varphi + \int_{\varphi}^{2\pi} \alpha_n \beta_n \alpha'_n d\varphi - \int_{\varphi}^{2\pi} \alpha_{n-1} \beta_{n-1} \alpha'_{n-1} d\varphi = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} x(kx+b) dx - \int_0^{\varphi} \alpha_n \beta_n \alpha'_n d\varphi - \int_{\varphi}^{2\pi} \alpha_{n-1} \beta_{n-1} \alpha'_{n-1} d\varphi,
 \end{aligned}$$

где $\alpha_n = \alpha_n(\varphi) = x_n$, $\beta_n = \beta_n(\varphi) = y_n$. Запишем выражение для абсциссы центра тяжести:

$$X_{cp} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x(kx+b) dx - \int_0^{\varphi} \alpha_n \beta_n \alpha'_n d\varphi - \int_{\varphi}^{2\pi} \alpha_{n-1} \beta_{n-1} \alpha'_{n-1} d\varphi}{S_n - S_{em}}. \quad (3.4)$$

Ордината центра тяжести:

$$Y_{cp} = \frac{\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (kx+b)^2 dx - \int_0^{\varphi} \beta_n^2 \alpha'_n d\varphi - \int_{\varphi}^{2\pi} \beta_{n-1}^2 \alpha'_{n-1} d\varphi}{S_n - S_{em}}. \quad (3.5)$$

Площади в формулах (3.4) и (3.5) рассчитываются на основе тех же рассуждений касательно области интегрирования. С использованием полученных выражений была составлена программа в пакете MATLAB для анализа зависимостей $X_{cp}(n, \varphi)$ и $Y_{cp}(n, \varphi)$ (рисунки 3.7-3.8) [50]. В процессе исследования использовались следующие начальные данные: толщина полотна $h = 83 \cdot 10^{-6}$ м, поперечное сечение втулки представлено эллипсом с полуосями $A_{вт} \approx 0.0444$ м и $B_{вт} \approx 0.0381$ м, $n \in [1, 15]$. Поскольку ранее было показано, что форма витка спирали с ростом n стремится к окружности, то ожидаемые наибольшие по модулю значения координат будут соответствовать малому количеству витков, что актуально как для рулона размотки в конце процесса разматывания, так и для рулона намотки в начале процесса.

Как можно заметить по рисункам 3.7-3.8, наибольшее смещение абсциссы центра тяжести от нуля соответствует значениям параметра $\varphi \approx 90^\circ$ и $\varphi \approx 270^\circ$, а для ординаты — $\varphi \approx 0^\circ$ и $\varphi \approx 180^\circ$. При этом абсолютные значения координат не превышают 11 мм. В соответствии с полученными результатами будем считать, что положения центра тяжести и геометрического центра поперечного сечения рулона практически не меняются в процессе размотки/намотки, и в дальнейшем примем, что эти центры совпадают с центром тяжести сечения втулки, то есть имеет координаты $(0; 0)$.

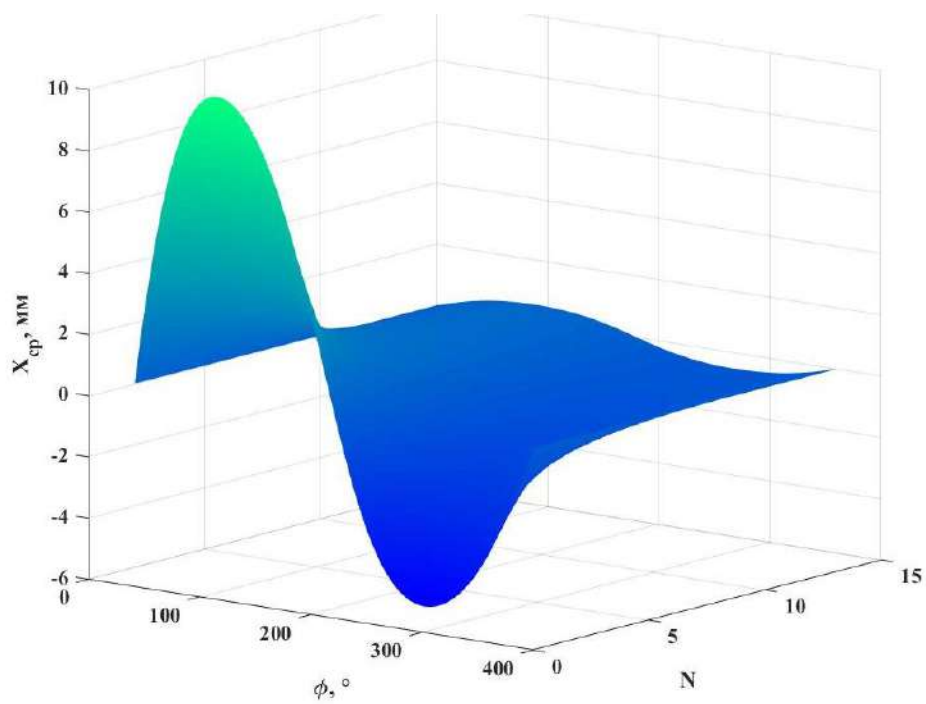


Рисунок 3.7 — Поверхность $X_{cp}(n, \phi)$

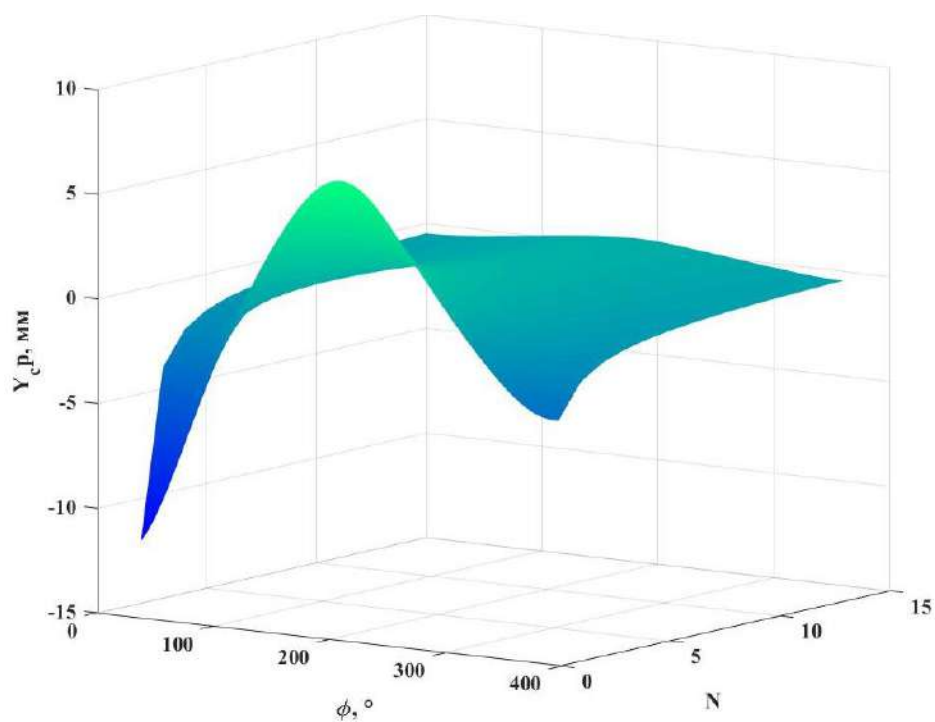


Рисунок 3.8 — Поверхность $Y_{cp}(n, \phi)$

Массу рулона M_{p1} рассчитывается через тройной интеграл по всему объёму.

$$M_{p1} = \iiint_V \rho(x, y, z) dV,$$

где объёмную плотность с учётом ранее поставленного условия об однородности примем постоянной: $\rho(x, y, z) = \rho_o = const$. Обозначив ширину полотна w , получим:

$$M_{p1} = w\rho_o(S_n - S_{em}), \quad (3.6)$$

где $S_n = S_n(\varphi)$ определяется аналогично в соответствии со схемой на рисунке 3.6.

Несколько иначе дело обстоит с моментом инерции. Поскольку ранее было обговорено, что центр тяжести сечения рулона находится в точке O_3 , то момент инерции рулона относительно оси O_3Z_3 будет являться центральным. На основе тех же соображений, что и при расчёте координат центра тяжести, определим зависимость $J_{центр}(\varphi)$ в пределах одного витка спирали следующим образом (рисунок 3.6):

$$J_{центр} = J_{n0} - w\rho_o \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega,$$

где J_{n0} — центральный момент инерции рулона, соответствующий $\varphi = 2\pi$. Найдём для втулки с поперечным сечением в виде эллипса с полуосями A_{em} и B_{em} момент инерции:

$$J_{em} = w\rho_o \iint_Q (x^2 + y^2) dQ = w\rho_o \pi \frac{1}{4} (A_{em}^3 B_{em} + A_{em} B_{em}^3).$$

Выполним преобразования и рассчитаем $J_{центр}$ при известном $J_{см}$:

$$\begin{aligned}
 J_{центр} &= -J_{см} + w\rho_o \iint_D (x^2 + y^2) dD - w\rho_o \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega = \\
 &= -J_{см} + w\rho_o \left(-\int_0^{\varphi} \left(\alpha_n^2 \beta_n + \frac{\beta_n^3}{3} \right) \alpha'_n d\varphi - \int_{\varphi}^{2\pi} \left(\alpha_{n-1}^2 \beta_{n-1} + \frac{\beta_{n-1}^3}{3} \right) \alpha'_{n-1} d\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{x_1}^{x_2} \left(x^2 (kx + b) + \frac{(kx + b)^3}{3} \right) dx \right). \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

В исследуемой системе предполагается, что ось вращения рулона не проходит через центр тяжести рулона. Поскольку рассматривается плоская задача (см. раздел 2.1), оси O_3Z_3 и C_pZ_p параллельны. В таком случае, согласно теореме Гюйгенса–Штейнера, момент инерции рулона относительно оси C_pZ_p равен [40]:

$$J_{p1} = J_{центр} + M_{p1}e_1^2, \tag{3.8}$$

где e_1 — эксцентриситет оси вращения (см. подраздел 2.3.1 и рисунок 3.9).

С использованием полученных зависимостей были выполнены расчёты начального главного момента инерции при условии, что поперечное сечение втулки является эллипсом.

Величины в (3.6-3.7) зависят от параметра φ , а значит, и момент инерции рулона (3.8) определяется как функция φ . С другой стороны, φ , очевидно, зависит от угла поворота γ_{p1} , и потому момент инерции рулона окончательно будем представлять как суперпозицию функций:

$J_{p1} = J_{p1} \circ \varphi \circ \gamma_{p1}$. Аналогичной суперпозицией можно представить массу рулона.

3.3 Исследование геометрии участка полотна между рулоном и сенсорным валом

Как масса и момент инерции рулона, так и ряд других переменных в ММ (2.46) зависят от параметра φ , так что для внешнего витка спирали конечное значение φ будет зависеть от угла поворота рулона. Найдём зависимость $\varphi(\gamma_{p1})$. Часть полотна 5, заключённого между сенсорным валом 2 и рулоном 3 (см. рисунок 3.9), касается вала и рулона. В силу того, что определить точно взаимное расположение центра вращения, центра сечения сенсорного вала и геометрического центра сечения рулона не представляется возможным, выберем схему, основываясь на упрощении расчётов. Рассмотрим расчётную схему, изображающую поперечное сечение рулона 3 и сенсорного вала 2, представленную на рисунке 3.9, где: $x_{cв1}$ — абсцисса центра окружности сечения сенсорного вала, в данном случае расстояние между геометрическими центрами сечений вала и рулона в системе координат $X_p C_p Y_p$; $r_{cв1}$ — радиус вала.

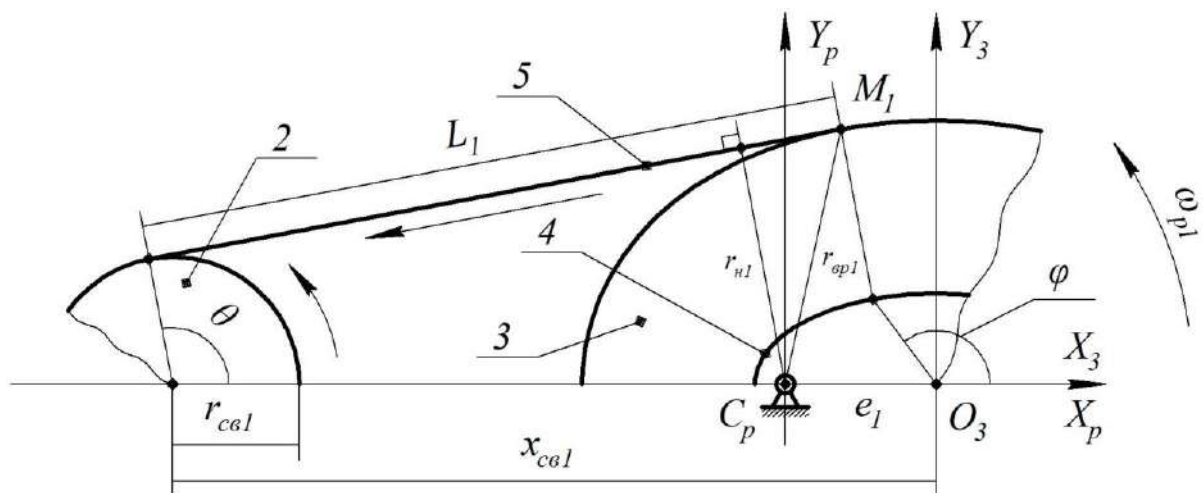


Рисунок 3.9 — Расчётная схема к определению $\varphi(\gamma_{p1})$

Найдём координаты (X_x, Y_y) точек витков при повороте поперечного сечения на угол γ_{p1} при помощи преобразований сдвига и поворота:

$$\begin{aligned} X_x &= x_n \cos \gamma_{p1} - y_n \sin \gamma_{p1} + e_1 \cos \gamma_{p1} - e_1, \\ Y_y &= x_n \sin \gamma_{p1} + y_n \cos \gamma_{p1} + e_1 \sin \gamma_{p1}. \end{aligned}$$

Полотно 5 считаем натянутым по общей касательной к сечениям сенсорного вала и рулона. Составим систему уравнений для этой касательной. Пусть θ — угол, определяющий точку касания сенсорного вала. Уравнение касательной к сечению этого вала имеет вид:

$$y = r_{c\phi 1} \sin \theta - (x - x_{c\phi 1} - r_{c\phi 1} \cos \theta) \operatorname{ctg} \theta.$$

С другой стороны, для поперечного сечения рулона эта же прямая записывается следующим образом:

$$y = Y_y(\varphi) + (x - X_x(\varphi)) \frac{dY_y(\varphi)}{dX_x(\varphi)},$$

откуда, воспользовавшись равенством параметров касательных, нетрудно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg} \theta = \frac{dY_y(\varphi)}{dX_x(\varphi)}, \\ Y_y(\varphi) - \frac{dY_y(\varphi)}{dX_x(\varphi)} X_x(\varphi) = r_{c\phi 1} \sin \theta + (x_{c\phi 1} + r_{c\phi 1} \cos \theta) \operatorname{ctg} \theta. \end{cases} \quad (3.9)$$

Исключив θ из (3.9), получим нелинейное уравнение относительно φ :

$$r_{c\phi 1}^2 \left(1 + \left[\frac{dY_y(\varphi)}{dX_x(\varphi)} \right]^2 \right) - \left(\frac{dY_y(\varphi)}{dX_x(\varphi)} [x_{c\phi 1} - X_x(\varphi)] + Y_y(\varphi) \right)^2 = 0. \quad (3.10)$$

Отметим, что с целью обеспечения надлежащей точности, в том числе и на граничных значениях φ , а также для ускорения расчётов, данное уравнение решалось методом Хаусхолдера [51,52]. Обозначим правую часть (3.10) как F , тогда итерационная схема для нахождения корня имеет вид:

$$\varphi_{l+1} = \varphi_l + d \frac{(1/F)^{(d-1)}(\varphi_l)}{(1/F)^{(d)}(\varphi_l)},$$

где d — порядок используемой производной. В данной работе $d = 5$.

Полученное уравнение позволяет найти значение параметра φ для дальнейшего вычисления радиусов вращения $r_{\phi p 1}$, требуемого для расчёта скорости полотна на участке схода с рулона, и радиуса натяжения r_{n1} для определения момента сила натяжения:

$$r_{n1} = \frac{Y_y(\varphi) - \frac{dY_y(\varphi)}{dX_x(\varphi)} (X_x(\varphi) + e_1)}{\sqrt{1 + \left[\frac{dY_y(\varphi)}{dX_x(\varphi)} \right]^2}}.$$

Аналогично, используя схему на рисунке 3.9, можно определить длину полотна на первом участке L_1 . Следует отметить, что длина участка полотна зависит не только от φ , но и напрямую от γ_{p1} :

$$\frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} = \frac{\partial L_1}{\partial \gamma_{p1}} + \frac{\partial L_1}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\gamma_{p1}}, \quad \frac{d\varphi}{d\gamma_{p1}} = -\frac{\partial F / \partial \gamma_{p1}}{\partial F / \partial \varphi}$$

С использованием полученных выражений была составлена программа в MATLAB [50] для анализа зависимостей ранее полученных величин от угла γ_{p1} , для первых трёх оборотов рулона (рисунки 3.10-3.13). В процессе исследования использовались следующие начальные данные: параметры полотна бумаги: поверхностная плотность — $\rho_n = 0.060 \text{ кг/м}^2$, толщина $h = 83 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, ширина — $w = 1.2 \text{ м}$; параметры сенсорного вала: $x_{св1} = -1 \text{ м}$; $r_{св1} = 0.05 \text{ м}$; разность полуосей эллипса $B_{em} - A_{em} = 0.0099 \text{ м}$, эксцентриситет оси вращения — $e_1 = 0.0047 \text{ м}$. Масса рулона $M_{p1} \approx 700 \text{ кг}$; номер внешнего витка спирали 5624.

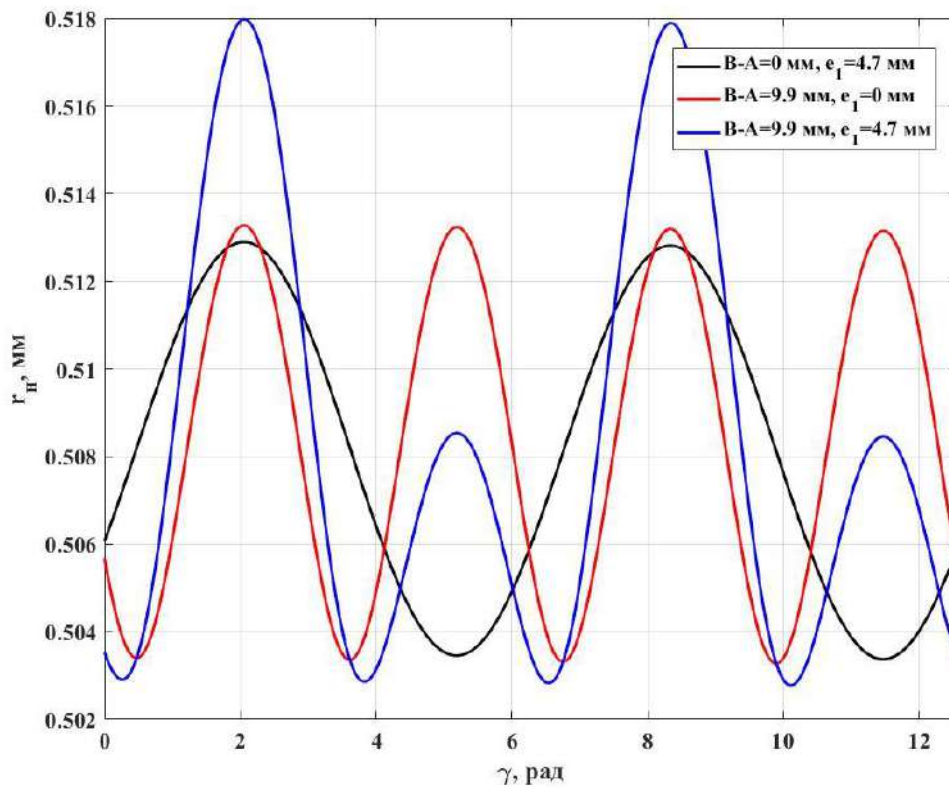


Рисунок 3.10 — Зависимость $r_{n1}(\gamma_{p1})$

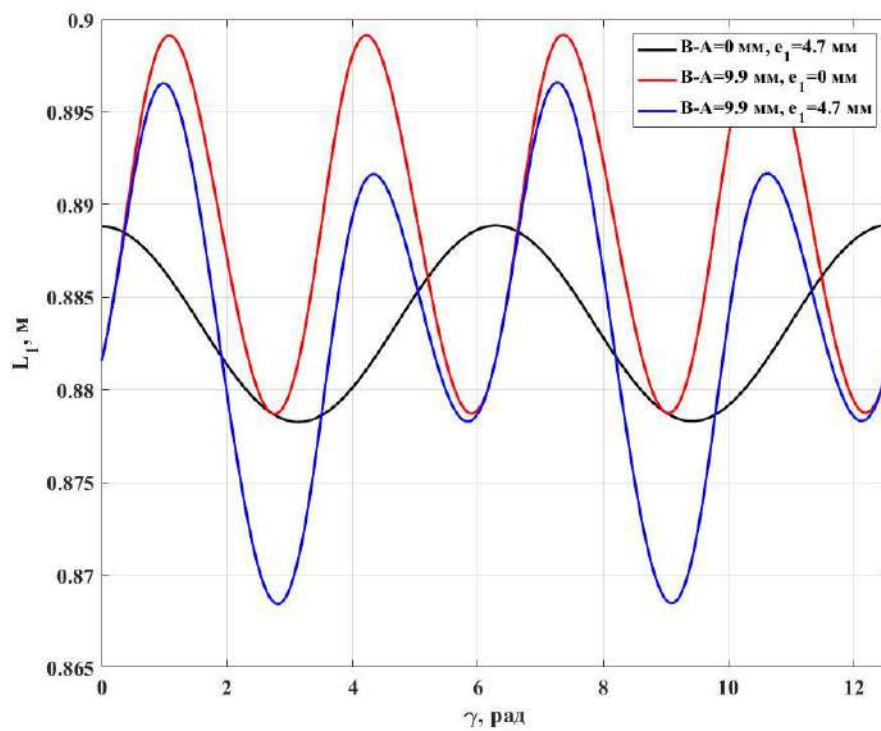


Рисунок 3.11 — Зависимость $L_1(\gamma_{p1})$

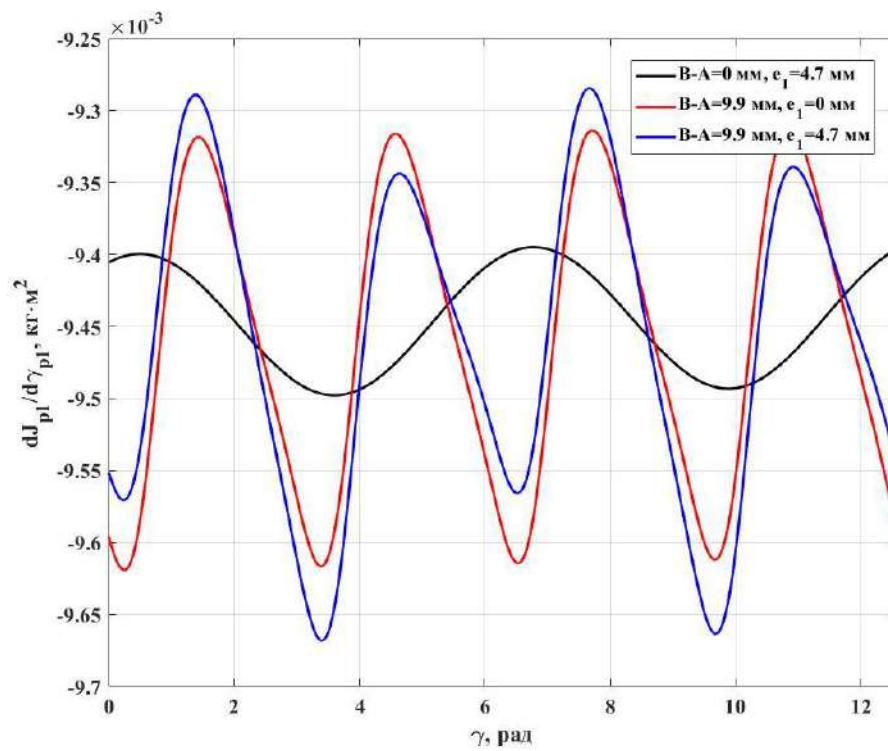


Рисунок 3.12 — Зависимость $dJ_{p1}/d\gamma_{p1}$ от γ_{p1}

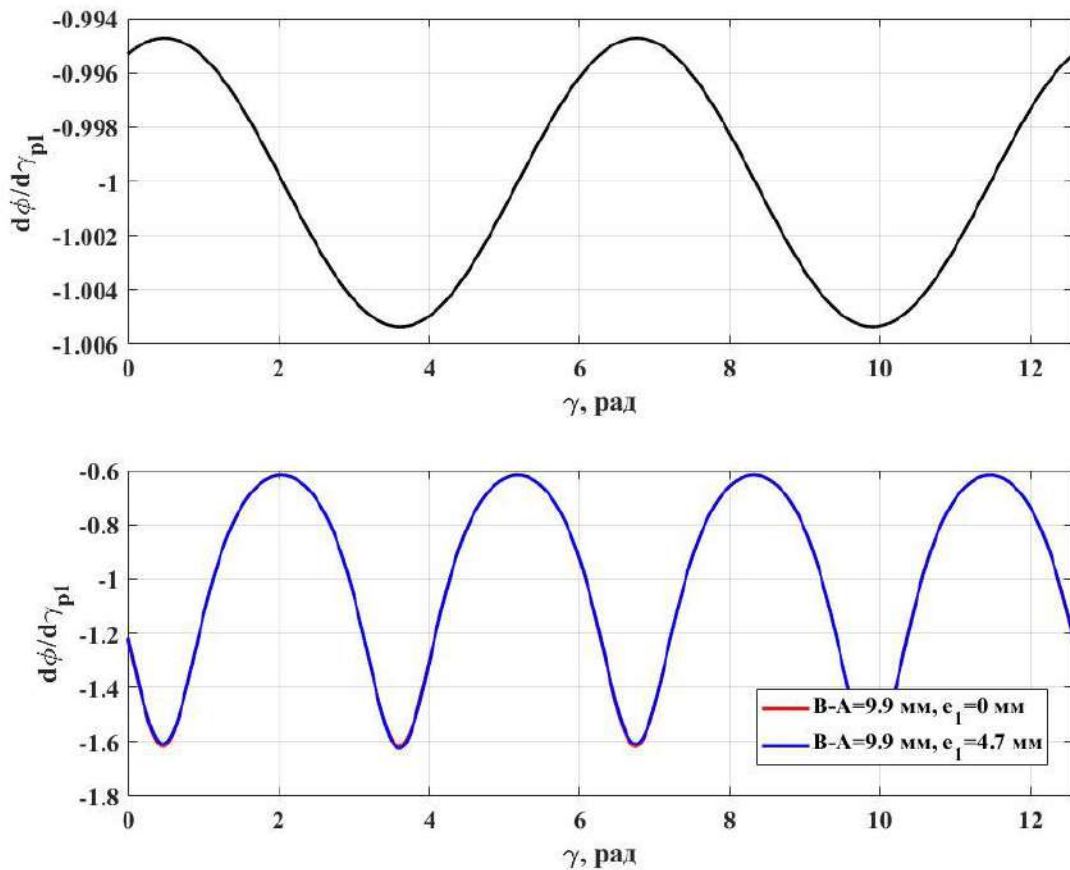


Рисунок 3.13 — Зависимость $d\phi/d\gamma_{p1}$ от γ_{p1}

Из полученных результатов (рисунок 3.10) видно, что r_{n1} является сложной нелинейной функцией, имеющей локальные экстремумы, что означает наличие колебаний силы натяжения. Зависимость $d\phi/d\gamma_{p1}$ (рисунок 3.13) имеет колебательный характер, и именно она определяет колебания в производной момента инерции рулона.

3.4 Выводы по главе 3

1. Разработана геометрическая модель поперечного сечения рулона как эквидистантной спирали. Сформулированы условия, которым должна удовлетворять функция, описывающая первый виток спирали.

2. Проанализировано влияние функции первого витка, описывающей спираль, на общую длину полотна в рулоне. Показано, что при соблюдении

некоторых условий, разность между значениями верхней и нижней границ общей длины полотна в рулоне прямо пропорциональна количеству витков и разности длин контура поперечного сечения втулки и его эквидистанты на расстоянии шага спирали.

3. Выполнены расчёты массо-инерционных характеристик рулона с поперечным сечением в форме эквидистантной спирали. Проанализировано отклонение положения центра тяжести поперечного сечения рулона от центра тяжести контура втулки.

4. Разработана алгоритмическое и программное обеспечение для расчёта массо-инерционных характеристик рулона с поперечным сечением в форме эквидистантной спирали.

5. Выполнено исследование геометрии участка полотна, заключённого между рулоном и сенсорным валом. Выведено уравнение, связывающее угол поворота рулона и параметр спирали, определяющего границу внешнего витка спирали.

6. Проведено моделирование геометрических параметров и массо-инерционных характеристик узла размотки.

ГЛАВА 4. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ РАЗМОТКИ И ПЕРЕМОТКИ РУЛОННОГО МАТЕРИАЛА

4.1 Предварительные замечания. Анализ режима разгона

Полученные в предыдущих главах результаты используем для постановки и решения задачи управления перемоточной машиной. Итак, формы рулонов являются главными источниками колебаний различных параметров и переменных модели. И как было сказано, задача обеспечения необходимых требований технологического процесса решается созданием соответствующей системы управления четырьмя индивидуальными приводами (рисунок 4.1).

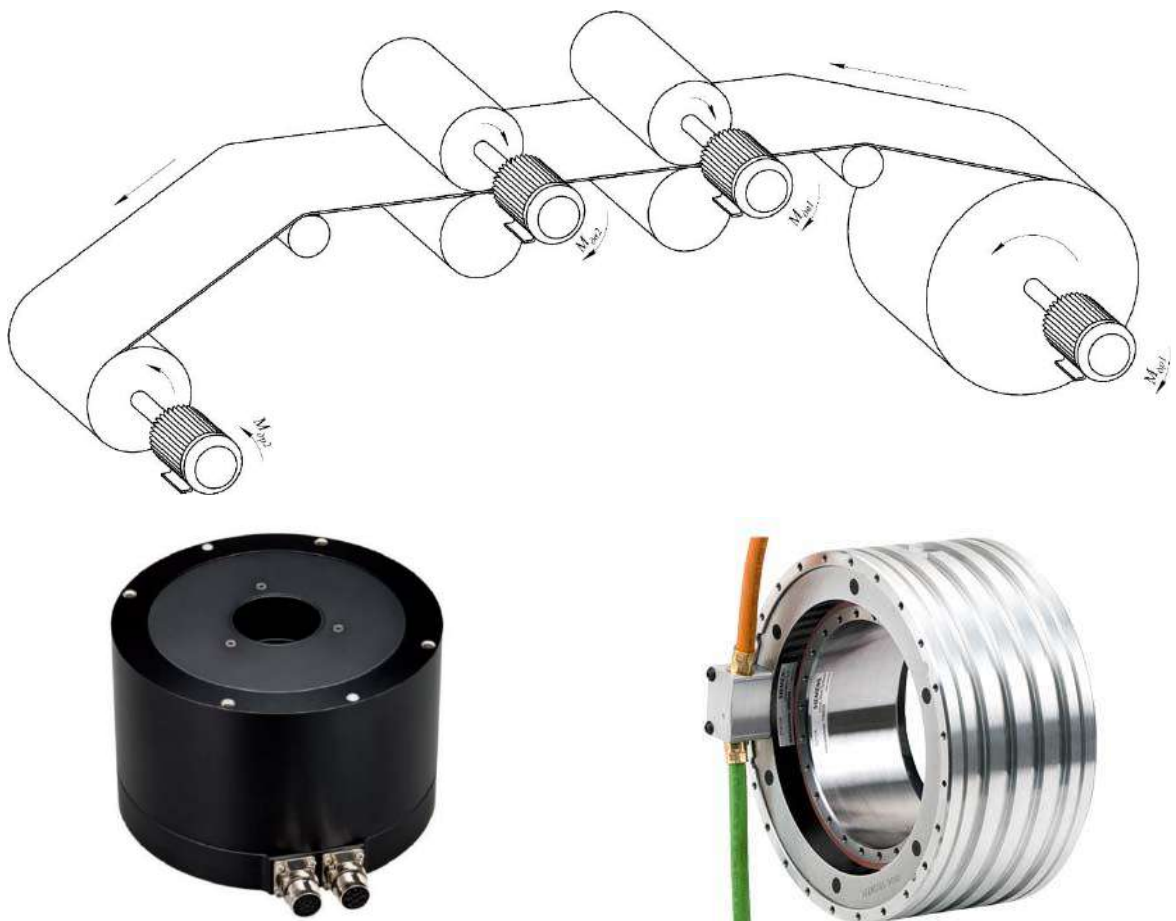


Рисунок 4.1 — Схема перемоточной машины с индивидуальными приводами; примеры электродвигателей [53]

Будем считать, что рулоны и пары цилиндров приводятся во вращение своими индивидуальными электродвигателями. Пусть машина включает в себя сенсорные валы, которые являются датчиками силы натяжения полотна. Машина может содержать датчики скоростей и других параметров. Рассмотрим функциональную схему системы управления перемоточной машиной (рисунок 4.2).

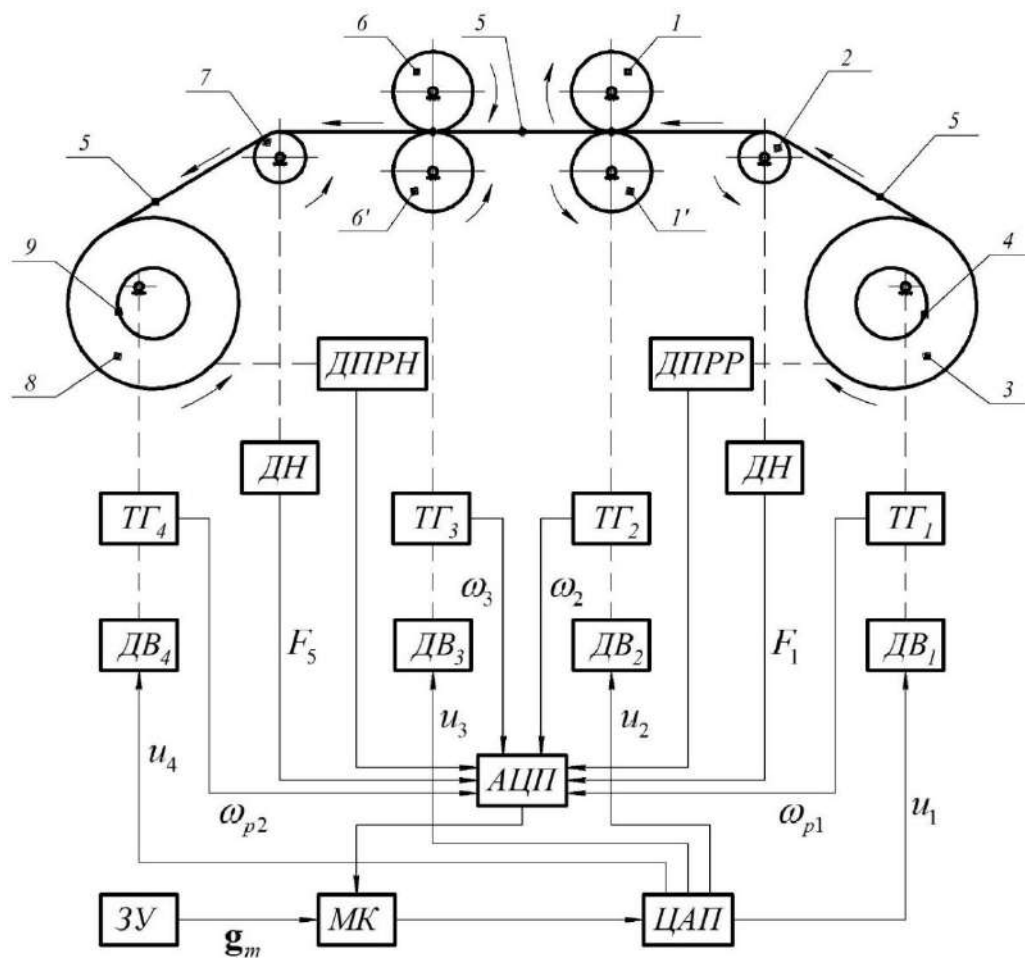


Рисунок 4.2 — Функциональная схема системы управления перемоточной машиной

На рисунке 4.2 обозначено: ДВ — индивидуальные электродвигатели, ЦАП — цифро-аналоговый преобразователь, АЦП — аналого-цифровой преобразователь, ТГ — тахогенератор, ДН — датчик силы натяжения, ДПРР и ДПРН — собирательное название датчиков, измеряющих различные

параметры рулонов размотки и намотки, МК — микроконтроллер, ЗУ — задающее устройство. В процессе работы системы управления происходит опрос датчиков ДН, ДПРР, ДПРН и других (на рисунке не показаны) с последующим преобразованием полученных сигналов через АЦП. В соответствии с заданием, сформированным в ЗУ как с верхнего уровня управления, так и внутренними условиями, в МК рассчитываются необходимые управляющие воздействия, которые после преобразования через ЦАП подаются на ДВ [54,55].

Как было ранее отмечено в предыдущих главах, во время перемотки полотна необходимо обеспечить его контролируемое движение. При этом одной из ключевых задач является стабилизация силы натяжения полотна материала. В силу того, что натяжение полотна на определённом участке зависит от его скоростей на границах участка, и принимая во внимание фактор производительности, в задание с верхнего управления включим также скорость полотна на каком-либо участке.

Если общее задание по силе натяжения достаточно очевидно, то для задания по скорости требуется уточнение. Связано это в том числе с тем, что рулоны невозможно мгновенно разогнать до заданной скорости. Так, электродвигатель привода рулона размотки должен изначально работать в режиме противовключения, и его обязанностью является поддержание силы натяжения F_1 с начала движения и, как следствие, устранение колебаний натяжения полотна, инициированных рулоном. В силу этого разгон рулона размотки будет осуществляться в основном за счёт силы натяжения, которая, в свою очередь, безусловно, ограничена, причём не разрывным усилием, а некоторым меньшим значением от максимального допустимого, при котором может начаться изменение каких-либо физических свойств или структуры материала. Меньшее значение необходимо для обеспечения запаса натяжения ввиду работы системы управления. Во избежание ряда проблем, связанных, к примеру, с колебаниями полотна, скорость рулона ближе к концу перемотки,

когда условный радиус рулона приблизится к радиусу втулки, должна быть снижена. Аналогичные рассуждения применимы и к разгону и торможению рулона намотки. Все эти обстоятельства приводят к рассмотрению поведения системы в режимах разгона и торможения.

Исследуем режим разгона. Этот анализ сопряжён с трудностями, вызванными сложной зависимостью между значением силы натяжения полотна и угловой скоростью рулона (2.1, 2.13).

Возьмём за основу уравнение (2.1) и сделаем ряд допущений. Будем считать, что во время разгона рулон представляет собой толстостенный цилиндр с постоянными параметрами, во-вторых, в соответствии с ранее сказанным, моменты, создаваемые силой тяжести и ЭД, не будут учитываться. В таком случае, при $F_1 = \text{const}$ получим, что $J_{p1} = \text{const}$, $\varepsilon_{p1} = \ddot{\gamma}_{p1} = \text{const}$. Как следствие, далее примем, что угловое ускорение рулона не может превышать некоего постоянного значения:

$$\frac{d^2\gamma_{p1}}{dt^2} \leq \frac{F_1 r_{n1} - C_{nu1} M_{p1}}{J_{p1}}. \quad (4.1)$$

Воспользуемся первым и вторым уравнениями системы (2.47) и будем считать, что $L_1 = \text{const}$, $F_3 = \text{const}$:

$$v_{e1} = \frac{v_{e2}(SE + F_3)}{SE + 2F_3 - F_1}, \quad (4.2)$$

$$\frac{d\gamma_{p1}}{dt} = \frac{v_{e1}(SE + F_1)}{r_{ep1}(SE + 2F_1 - F_p)}. \quad (4.3)$$

Исключим промежуточную переменную v_{e1} , подставив (4.2) в (4.3):

$$\frac{d\gamma_{p1}}{dt} = \frac{(SE + F_1)(SE + F_3)}{r_{ep1}(SE + 2F_1 - F_p)(SE + 2F_3 - F_1)} v_{e2}.$$

Продифференцируем последнее выражение по времени, тогда с учётом (4.1) получим после преобразований и привлечения условия $r_{n1} \approx r_{ep1}$:

$$a_0 \leq \frac{r_{ep1}(F_1 r_{ep1} - C_{nu1} M_{p1})(SE + 2F_1 - F_p)(SE + 2F_3 - F_1)}{J_{p1}(SE + F_1)(SE + F_3)}, \quad (4.4)$$

где $a_0 = \frac{dv_{e2}}{dt}$ — ускорение точек полотна материала в области контакта с поверхностью цилиндров намотки. Это при постоянном радиусе цилиндров намотки даёт возможность найти их соответствующее угловое ускорение.

Итак, найденное ограничение (4.4), во-первых, базируется на ключевом предположении о пренебрежимо малых изменениях параметров рулона размотки на период разгона, во-вторых, касается непосредственно функции v_{e2} . Условимся в дальнейшем называть эту функцию на этапе разгона кривой скорости разгона (КСР). Отметим, что ограничение на ускорение может быть также обусловлено и иными факторами, например, характеристиками движения со стороны рулона намотки.

Оценим предположение о малости изменений параметров рулона размотки в течении периода разгона, для чего построим зависимости $r_{ep1}(\gamma_{p1})$, $M_{p1}(\gamma_{p1})$, $J_{p1}(\gamma_{p1})$ (см. п. 3.2-3.3). Оценим их средние значения по формуле $\langle f \rangle = \frac{1}{\gamma_k} \int_0^{\gamma_k} f d\gamma_{p1}$, где $\gamma_k \approx N \cdot 2\pi$ — конечное значение диапазона угла поворота рулона, N — число оборотов рулона размотки (рисунок 4.3). Параметры рулона приведены в п. 3.1.3, при этом $e_1 = 0$.

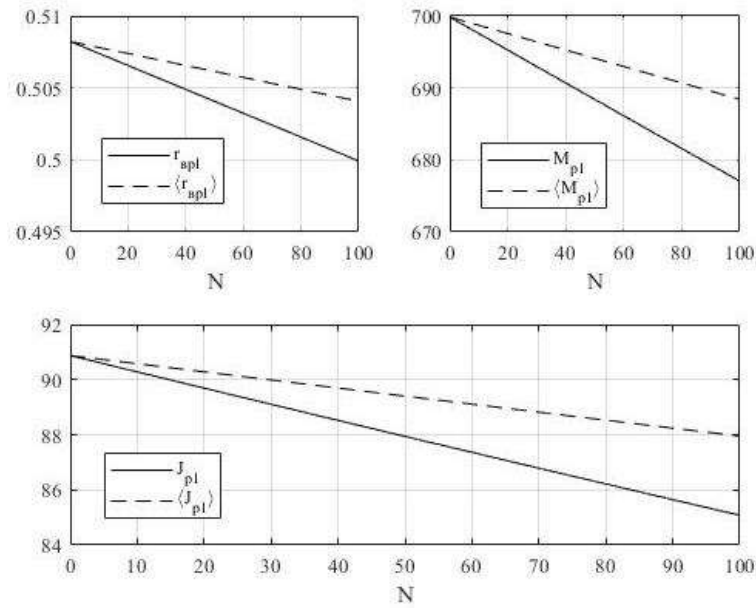


Рисунок 4.3 — Зависимости r_{apl} , M_{pl} , J_{pl} , $\langle r_{apl} \rangle$, $\langle M_{pl} \rangle$, $\langle J_{pl} \rangle$ от N

Для уточнения оценки построим относительное отклонение в процентах

$$q_i = 100 \frac{f_i - \langle f_i \rangle}{f_i} \%, i = 1, 2, 3, \text{ где индексы } 1, 2, 3 \text{ соответствуют радиусу}$$

вращения, массе и моменту инерции рулона (рисунок 4.4).

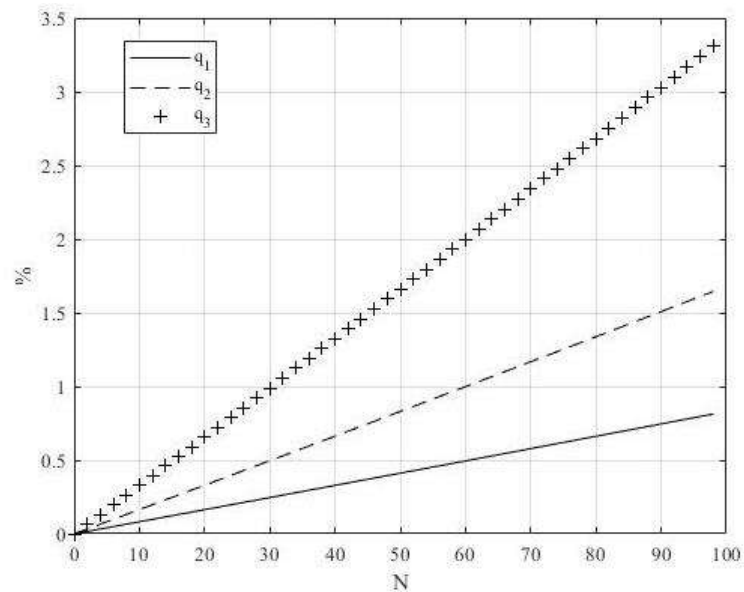


Рисунок 4.4 — Зависимость $q_i(N)$, $i = \overline{1,3}$

Как можно заметить из рисунков 4.3-4.4 наибольшее отклонение наблюдается у момента инерции. Если выбрать максимальное отклонение в 2%, то это будет соответствовать приблизительно 60 оборотам рулона или ≈ 194 м размотанного полотна.

Построим зависимость $a_0 = \max a_0(\gamma_{p1})$; примем, что сила натяжения на участке контроля $F_3 = 360$ Н, а на предшествующем участке — $F_1 = 310$ Н (рисунок 4.5).

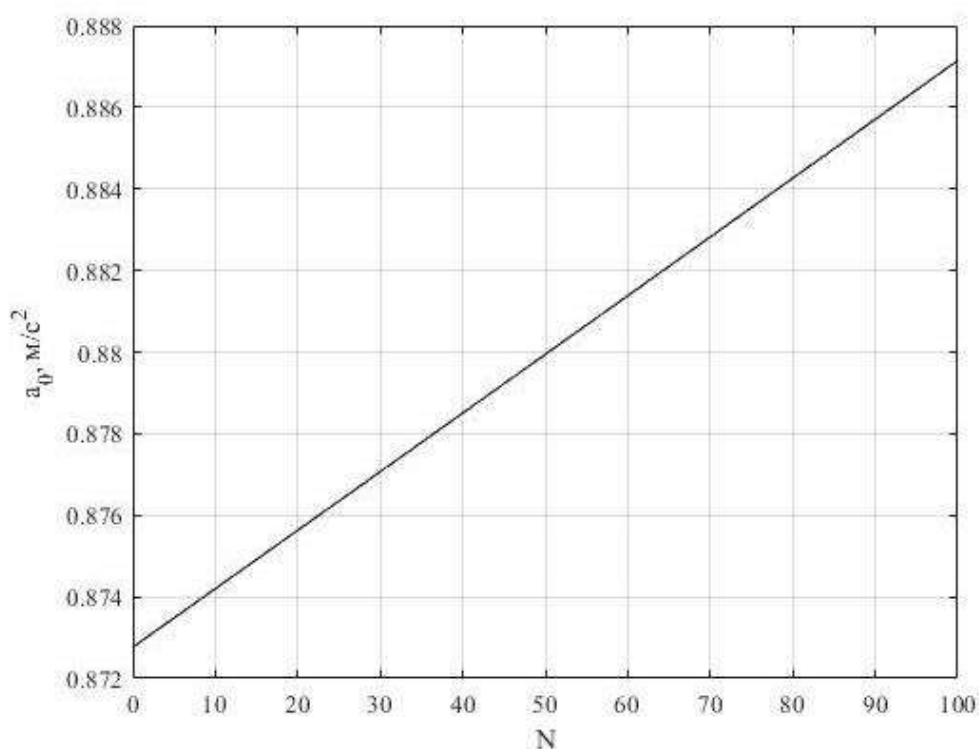


Рисунок 4.5 — Зависимость $a_0(N)$

Из рисунка 4.5 видно, что максимальная величина, обусловленная неравенством (4.4), достаточно большая. Необходимо, впрочем, отметить, что наличие тормозящего момента со стороны ЭД может значительно снизить эту величину.

Найдём условия со стороны узла намотки. В соответствии с третьим уравнением системы (2.47) при $F_5 = \text{const}$ и $L_5 = \text{const}$ имеем:

$$\frac{d\gamma_{p2}}{dt} = \frac{v_{\theta 2}(SE + 2F_5 - F_3)}{r_{\theta p2}(SE + F_5)}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что рулон намотки нельзя считать телом вращения с постоянными параметрами на этапе разгона. Построим зависимость $r_{\theta p2}(N)$, ориентируясь на ранее определённую длину полотна; максимальное количество оборотов рулона намотки равно 542 (рисунок 4.6, N — число оборотов рулона намотки).

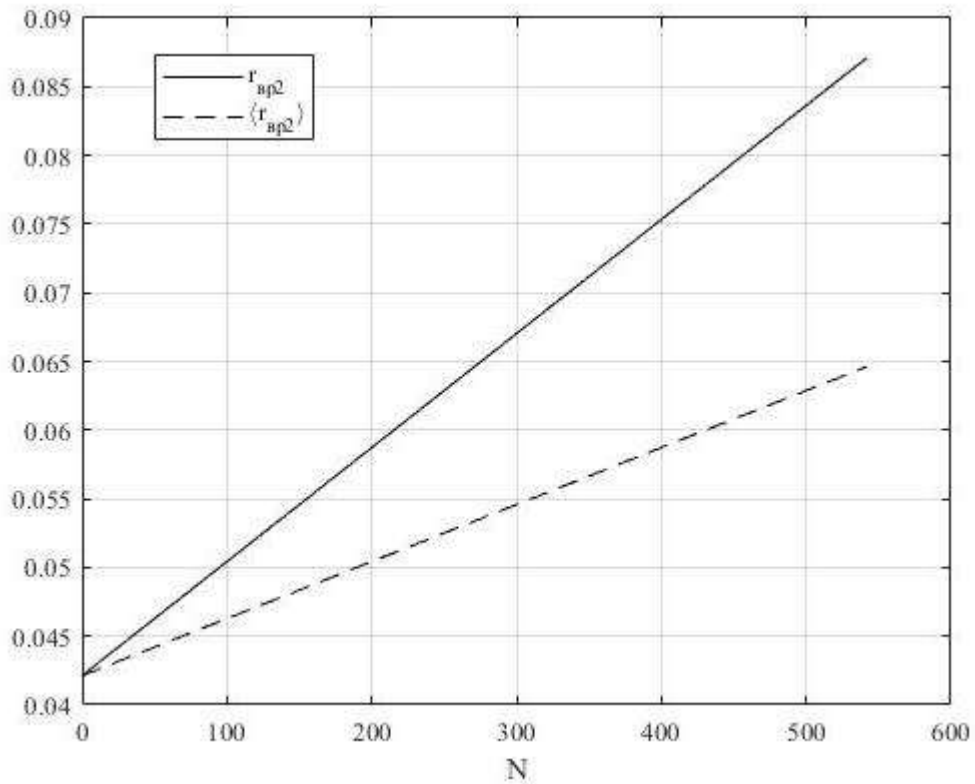


Рисунок 4.6 — Зависимость $r_{\theta p2}(N)$

Аппроксимируем зависимость $r_{\theta p2}(\gamma_{p2})$ линейной функцией:

$$r_{\theta p2} = R_1 \gamma_{p2} + R_2,$$

где $R_{1,2}$ коэффициенты, определяемые по методу наименьших квадратов (МНК) [49]. Подставим это равенство в (4.5), введём обозначение

$$k_{\epsilon 2} = \frac{SE + 2F_5 - F_3}{SE + F_5} = \text{const} \text{ и решим уравнение:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{p2}}{dt} &= k_{\epsilon 2} \frac{v_{\epsilon 2}}{R_1 \gamma_{p2} + R_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma_{p2} &= \frac{-R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1 \left(k_{\epsilon 2} \int v_{\epsilon 2} dt + C_{\epsilon 2} \right)}}{R_1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь $C_{\epsilon 2}$ — постоянная интегрирования, определяемая из условия $\gamma_{p2}(0) = 0$. Дифференцированием (4.6) по времени или последовательной подстановкой найденных выражений в (4.45) можно получить:

$$\frac{d\gamma_{p2}}{dt} = k_{\epsilon 2} \frac{v_{\epsilon 2}}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1 \left(k_{\epsilon 2} \int v_{\epsilon 2} dt + C_{\epsilon 2} \right)}}. \quad (4.7)$$

Равенство (4.7) представляет собой условие, накладываемое на КСР со стороны узла намотки. В работах [42,43,44] показано, что разложение функции, описывающей колебания силы натяжения полотна материала, в ряд Фурье содержит гармоники с частотами, равными величине угловой скорости рулона и её удвоенного значения. То есть, равенство (4.7) позволяет задать ограничение на максимальное значение угловой скорости рулона намотки на этапе разгона.

Отметим, что режимы работы машины желательно должны быть по возможности гладко сопряжены. Несовпадения, например, самих значений скоростей или их первых производных инициирует локальный переходной

процесс, имеющий ударный характер и возбуждающий высокочастотные колебания, что, безусловно, не является желательным фактором.

Будем считать, что определяющим заданием по скорости является скорость участка полотна в месте контакта с парой цилиндров намотки, что с учётом принятого допущения об отсутствии проскальзывания равносильно заданию по скорости цилиндров намотки. В свою очередь, требуемую скорость цилиндров намотки определим в общем варианте как кусочно-заданную, включающую участки КСР, постоянной скорости и КСТ (кривая скорости торможения).

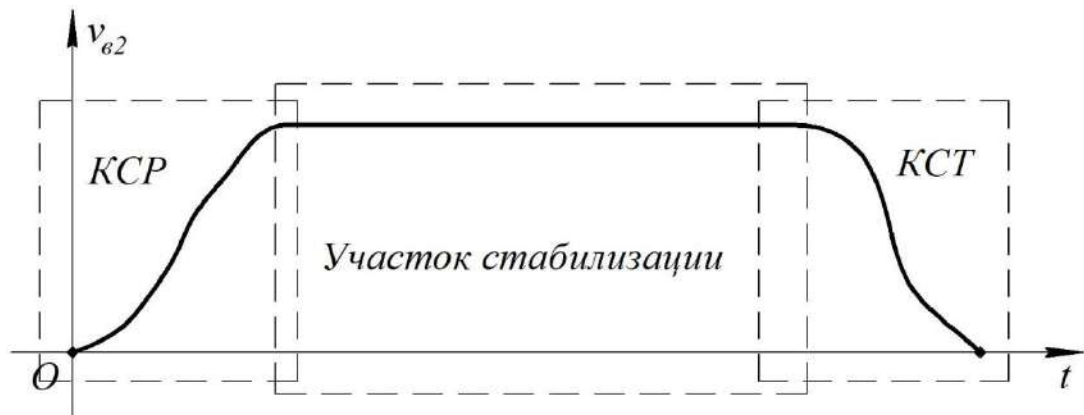


Рисунок 4.7 — Общий вид зависимости $v_{e2}(t)$

В дальнейшем при решении задачи синтеза алгоритма управления будем рассматривать режим стабилизации (рисунок 4.7).

Заданием по силе натяжения примем желаемое значение силы натяжения полотна на участке контроля.

4.2 Постановка задачи управления

В главе 2 была получена математическая модель перемоточной машины (2.46). Упростим запись уравнений модели. Обозначим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{1p}, & x_2 &= \frac{d\gamma_{1p}}{dt}, & x_3 &= \gamma_{2p}, & x_4 &= \frac{d\gamma_{2p}}{dt}, & x_5 &= F_1, \\ x_6 &= F_3, & x_7 &= F_5, & x_8 &= v_{e1}, & x_9 &= v_{e2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{1}{2J_{p1}} \frac{dJ_{p1}}{d\gamma_1}, & q_2 &= -\frac{c_{e1}c_{m1}}{J_{p1}R_1}, & q_3 &= \frac{r_{u1}}{J_{p1}}, & q_4 &= -\frac{c_{m1}}{J_{p1}R_1}, & q_5 &= -\frac{ge_{C1} \cos \gamma_{p1} + C_{nu1}}{J_{p1}} M_{p1}, \\ q_6 &= \frac{SE \frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} + F_p r_{ep1} - SE r_{ep1}}{L_1 + L_2}, & q_7 &= \frac{\frac{dL_1}{d\gamma_{p1}} - 2r_{ep1}}{L_1 + L_2}, & q_8 &= \frac{1}{L_1 + L_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{2J_{p2}} \frac{dJ_{p2}}{d\gamma_2}, & w_2 &= -\frac{c_{e4}c_{m4}}{J_{p2}R_4}, & w_3 &= -\frac{r_{u2}}{J_{p2}}, & w_4 &= \frac{c_{m4}}{J_{p2}R_4}, \\ w_5 &= -\frac{-ge_{C2} \cos \gamma_{p2} + C_{nu2}}{J_{p2}} M_{p2}, & w_6 &= \left(r_{ep2} + \frac{dL_5}{d\gamma_{p2}} \right) \frac{1}{L_4 + L_5}, & w_7 &= \frac{1}{L_4 + L_5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{L_3}, & r_2 &= -\frac{r_{e1}^2}{J_{e1}}, & r_3 &= -\frac{c_{e2}c_{m2}}{J_{e1}R_2}, & r_4 &= \frac{c_{m2}r_{e1}}{J_{e1}R_2}, & r_5 &= -\frac{r_{e2}^2}{J_{e2}}, \\ r_6 &= -\frac{c_{e3}c_{m3}}{J_{e2}R_3}, & r_7 &= \frac{c_{m3}r_{e2}}{J_{e2}R_3}. \end{aligned}$$

С учётом принятых обозначений уравнение (2.46) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = q_1 x_2^2 + q_2 x_2 + q_3 x_5 + q_4 u_1 + q_5, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = w_1 x_4^2 + w_2 x_4 + w_3 x_7 + w_4 u_4 + w_5, \\ \dot{x}_5 = q_6 x_2 + q_7 x_2 x_5 + q_8 x_5 x_8 + SE q_8 x_8, \\ \dot{x}_6 = r_1 x_5 x_8 - 2r_1 x_6 x_8 + r_1 x_6 x_9 - SE r_1 x_8 + SE r_1 x_9, \\ \dot{x}_7 = SE w_6 x_4 + w_6 x_4 x_7 - 2w_7 x_7 x_9 + w_7 x_6 x_9 - SE w_7 x_9, \\ \dot{x}_8 = r_2 x_5 - r_2 x_6 + r_3 x_8 + r_4 u_2, \\ \dot{x}_9 = r_5 x_6 - r_5 x_7 + r_6 x_9 + r_7 u_3. \end{cases}, \quad (4.8)$$

где x_i — переменные состояния, $q_i = q_i(x_1)$ — функции, зависящие от угла поворота рулона размотки, $w_i = w_i(x_3)$ — функции, зависящие от угла поворота рулона намотки, r_i — постоянные коэффициенты.

Итак, получен объект управления (ОУ) девятого порядка. Этот объект является нелинейным, многомерным. Сформулируем задачу управления в следующем виде. Необходимо найти закон управляющего воздействия $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$, $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_9]^T$ для ОУ (4.8), который обеспечит $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_n$, определяемых как заданием с верхнего уровня управления, так и рассчитанных непосредственно системой управления, с учётом возможных отклонений коэффициентов уравнений системы (4.8) от номинальных значений.

На первом этапе синтеза предположим, что коэффициенты и переменные, описывающие рулоны, известны или измеряются с достаточной степенью точности. Управление перемоточной машиной осуществляется цифровыми системами управления (рисунок 4.2). Воспользуемся для получения уравнений управления в разностном виде методом синтеза алгоритма управления сразу для дискретной математической модели. Система (4.8) является нелинейной. В случае отсутствия аналитического решения такой системы будем использовать специальные приёмы перехода к дискретной модели [56].

Пусть уравнение состояния ОУ записано в виде $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Задействуем для дальнейшего процесса перехода понятие временной диаграммы обмена информацией между контроллером и объектом (рисунок 4.8). В момент времени mT , где T — интервал квантования, очередного такта контроллер приступает к расчёту нового значения управляющего воздействия.

Запаздывание $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ складывается из времени опроса датчиков и преобразования полученных данных, времени расчёта управляющего

воздействия и времени преобразования полученного кода в сигнал и подачу его на исполнительные элементы объекта. Интервал квантования по сути разделяется на два участка, на которых управляющее воздействие постоянно, причём до расчёта нового управляющего воздействия будет действовать его предыдущее значение.

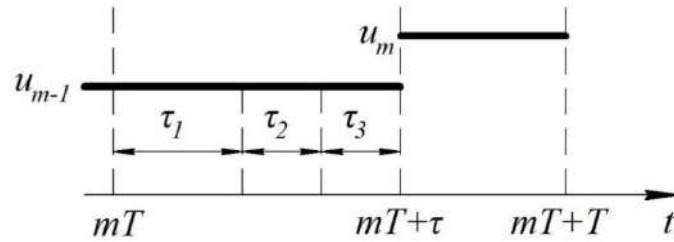


Рисунок 4.8 — Временная диаграмма обмена информацией между контроллером и объектом

Один из методов перехода к разностным уравнениям основан на использовании метода Эйлера. Суть заключается в том, что на интервале квантования производная заменяется первой разностью, исходя из предположения о малости длины интервала и гладкости процессов, происходящих внутри объекта управления. В этом случае в соответствии с рисунком 4.7, для второго участка $[mT + \tau, mT + T)$ имеем $\mathbf{x}_{m+1} = \tilde{\mathbf{x}}_m + (T - \tau)\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}_m, \mathbf{u}_m)$, где $\tilde{\mathbf{x}}_m$ — значение вектора в конце интервала $[mT, mT + \tau)$, которое, путём аналогичных рассуждений, получаем в виде: $\tilde{\mathbf{x}}_m = \mathbf{x}_m + \tau\mathbf{F}(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_{m-1})$. Соединив вместе эти выражения, получим следующее:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{m+1} &= \mathbf{x}_m + \tau\mathbf{F}(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_{m-1}) + (T - \tau)\mathbf{F}(\mathbf{x}_m + \tau\mathbf{F}(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_{m-1}), \mathbf{u}_m), \\ \mathbf{x}_{m+1} &= \mathbf{x}_m + T\mathbf{F}(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m).\end{aligned}$$

Второе равенство соответствует нулевому запаздыванию. В дальнейшем примем, что для исследуемых систем запаздывание нулевое.

Для линейных систем с уравнением состояния в виде $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ можно получить аналитическое решение, проинтегрировав соответствующее уравнение $\frac{de^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}}{dt} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{Bu}$ в пределах одного интервала квантования:

$$\mathbf{x}_{m+1} = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}_m + \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\theta)}\mathbf{B}d\theta \mathbf{u}_m$$

В дальнейшем будем использовать для линейных ОУ прямой переход, а для нелинейных — метод Эйлера.

4.3 Алгоритм согласованного управления

4.3.1 Основные положения метода согласованного управления

В ОУ регулируемые (выходными) переменными y_i являются силы натяжения и скорости полотна на отдельных участках. Предполагая, что эти регулируемые величины взаимосвязаны, используем метод согласованного управления. Приведём основные уравнения этого метода [57,58]. Запишем выражение, описывающее накладываемые условия на выходные переменные в виде:

$$\Phi_y(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

$$\Phi_y^T(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_p) & \varphi_2(y_1, \dots, y_p) & \dots & \varphi_k(y_1, \dots, y_p) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq p-1$$

где $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p]$ — вектор выходных переменных. Вектор выходных переменных $\mathbf{y}$ является функцией вектора переменных состояния $\mathbf{x}$, тогда (4.9) можно переписать как:

$$\Phi_y(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) определяет $(n-k)$ -мерное многообразие в пространстве состояний объекта управления; n — порядок объекта, определяющийся количеством переменных состояния, k — размерность функции (4.10).

Введём в рассмотрение вектор относительного движения, характеризующий нарушение условия согласования объектов:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

В начале работы САУ, при $t=0$, практически всегда условие (4.11) нарушено и $\mathbf{e}(0) \neq \mathbf{0}$; кратковременные возмущения приводят к аналогичному эффекту. Система согласованного управления должна обеспечить стремление вектора $\mathbf{e}$ к нулю. Выберем активный метод согласования каналов управления с использованием информации об ошибке согласования (рисунок 4.9).

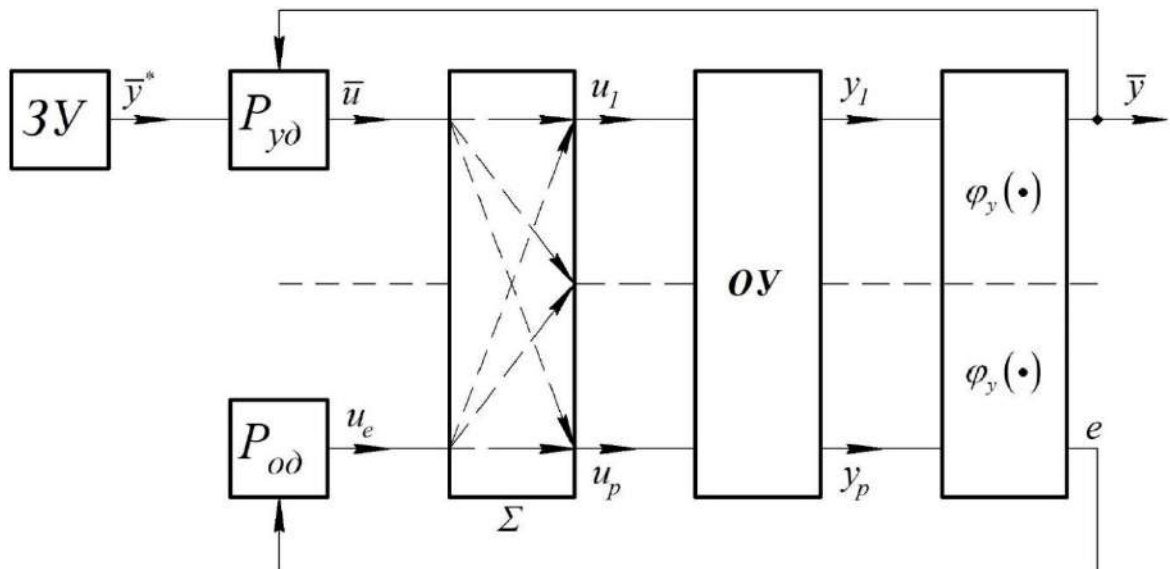


Рисунок 4.9 — Система согласованного управления

Многосвязный регулятор относительного движения P_{od} осуществляет согласование каналов управления, а регулятор усреднённого движения P_{yd} обеспечивает заданное качество усреднённого движения.

Пусть разностное уравнение состояния ОУ имеет вид:

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m). \quad (4.12)$$

Кусочно-постоянное управление

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_m, \quad mT \leq t \leq mT + T$$

принципиально может обеспечить принадлежность траектории объекта требуемому многообразию только на счётном множестве точек, соответствующих дискретным моментам времени $t = mT$. Внутри каждого интервала траектория не может принадлежать требуемому многообразию, следовательно, ошибки согласования каналов объекта неизбежны. Эти ошибки определяются как видом функции согласования, так и свойствами объекта управления. Кроме того, определённую роль играет значение интервала квантования; в ряде случаев чем оно меньше, тем меньше ошибки.

Найдём условие существования алгоритма управления, обеспечивающего движение по многообразию. Совпадение траектории объекта управления с многообразием (4.10) возможно, если будет выполнено условие, согласно которому в момент времени $t = m_0T$,

$$\Phi(\mathbf{x}(m_0T)) = \mathbf{0},$$

а для любого $m > m_0$ из условия $\varphi(\mathbf{x}_m) = \mathbf{0}$ следовало бы $\varphi(\mathbf{x}_{m+1}) = \mathbf{0}$. Воспользовавшись этим условием, вычислим для вектора отклонения $\mathbf{e}_m = \varphi(\mathbf{x}_m)$ в следующий отсчёт времени:

$$\mathbf{e}_{m+1} = \varphi(\mathbf{x}_{m+1});$$

с учётом (4.12) получим $\mathbf{e}_{m+1} = \varphi(\mathbf{F}(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m)) = \varphi_1(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m)$. Если этот объект неуправляем, то введём новую переменную $\mathbf{e}_{1m} = \varphi_1(\mathbf{x}_m)$ и повторяем предыдущий шаг:

$$\mathbf{e}_{1m+1} = \varphi_1(\mathbf{x}_{m+1}) = \varphi_1(\mathbf{F}(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m)) = \varphi_2(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m).$$

В случае неуправляемости $\mathbf{e}_{1m+1} = \varphi_2(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m)$ вводится следующая переменная по тому же принципу и далее до тех пор, пока не получим полностью управляемый объект:

$$\mathbf{e}_{rm+1} = \varphi_{r+1}(\mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m), \quad r \leq \frac{n}{k}.$$

В противном случае управления, обеспечивающего движение объекта (4.12) по многообразию (4.10) не существует. Предположим, что задача синтеза алгоритма согласованного управления имеет решение, тогда, основываясь на вышеизложенных результатах, введём в рассмотрение вектор отклонения траектории объекта в моменты времени $t = mT$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{e}_{1m} \\ \dots \\ \mathbf{e}_{rm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_m) \\ \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}_m) \\ \dots \\ \boldsymbol{\varphi}_r(\mathbf{x}_m) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_m).$$

Выполним преобразование базиса в пространстве состояний объекта следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\xi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_m) \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_m) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Выбор функции $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_m)$, имеющей $n - (r+1)k$ координат, для обеспечения обратимости преобразования (4.13) ограничен условием:

$$\text{rang} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T = n$$

Введём обратное преобразование для (4.13) по формуле:

$$\mathbf{x}_m = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\varepsilon}_m, \boldsymbol{\xi}_m) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{1m}, \dots, \mathbf{e}_{rm}, \boldsymbol{\xi}_m) \quad (4.14)$$

Подставив последовательно (4.13) и (4.14) в (4.12), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{m+1} &= \mathbf{e}_{1m}, \\ \mathbf{e}_{1m+1} &= \mathbf{e}_{2m}, \\ \dots & \\ \mathbf{e}_{r-1m+1} &= \mathbf{e}_{rm}, \\ \mathbf{e}_{rm+1} &= \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{1m}, \dots, \mathbf{e}_{rm}, \boldsymbol{\xi}_m, \mathbf{u}_m), \end{aligned} \quad = \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{e}_m, \boldsymbol{\xi}_m, \mathbf{u}_m), \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{m+1} = \bar{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{e}_m, \boldsymbol{\xi}_m, \mathbf{u}_m), \quad (4.16)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{1m}, \dots, \mathbf{e}_{rm}, \xi_m, \mathbf{u}_m) &= \varphi_{r+1}(\theta(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{1m}, \dots, \mathbf{e}_{rm}, \xi_m), \mathbf{u}_m), \\ \bar{\Psi}(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{1m}, \dots, \mathbf{e}_{rm}, \xi_m, \mathbf{u}_m) &= \Psi(\theta(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{1m}, \dots, \mathbf{e}_{rm}, \xi_m), \mathbf{u}_m).\end{aligned}$$

В теории согласованного управления движения, описываемые уравнениями (4.15) и (4.16), принято называть относительным и продольным по многообразию соответственно.

Для решения задачи стабилизации объекта вкупе с обеспечением свойств продольного движения запишем управляющее воздействие в виде:

$$\mathbf{u}_m = \bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{v}_m,$$

причём составляющая $\mathbf{v}_m$ должна обеспечивать асимптотическую устойчивость объекта (4.15). Найдём составляющую $\bar{\mathbf{u}}_m$ из следующего условия:

$$\bar{\varphi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \xi_m, \bar{\mathbf{u}}_m(\xi_m)) = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

Обычно при выполнении условия (4.17) остаётся некоторая свобода в выборе $\bar{\mathbf{u}}_m(\xi_m)$, которая используется для назначения желаемых динамических свойств объекту:

$$\xi_{m+1} = \bar{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \xi_m, \bar{\mathbf{u}}_m(\xi_m)) \quad (4.18)$$

описывающему динамику поведения объекта (4.16) на многообразии.

При выполнении условия (4.17) уравнение объекта (4.15) перепишется в виде

$$\mathbf{e}_{m+1} = \bar{\Phi}(\mathbf{e}_m, \xi_m, \bar{\mathbf{u}}_m(\xi_m) + \mathbf{v}_m). \quad (4.19)$$

Необходимо найти управление $\mathbf{v}_m(\mathbf{e}_m)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нелинейному нестационарному в силу зависимости от ξ_m объекту (4.19). Норма вектора $\mathbf{e}_m$ в процессе управления мала, кроме, может быть, начальных моментов времени. А при непрерывной функции $\bar{\Phi}(\cdot)$ для парирования малых приращений $\mathbf{e}_{im}$ требуются также малые значения $\mathbf{v}_m$. При сделанных допущениях нелинейное уравнение (4.19) может быть линеаризовано и представлено в виде:

$$\mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{A}(\xi_m)\mathbf{e}_m + \mathbf{B}(\xi_m)\mathbf{v}_m, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{A}(\xi_m) = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{O}_{r \times l} & \mathbf{I}_r \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{e}} \end{array} \right] \bigg|_{\substack{\mathbf{e}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}}, \quad \mathbf{B}(\xi_m) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{O} \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{v}} \end{array} \right] \bigg|_{\substack{\mathbf{e}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}}.$$

Предлагаемая линеаризация отличается от общепринятой в теории управления тем, что она осуществляется относительно многообразия в пространстве вход-состояние, а не относительно точки в этом пространстве.

Линейный нестационарный объект (4.20) имеет ту особенность, что как параметр ξ_m , так и матрицы $\mathbf{A}(\xi_m), \mathbf{B}(\xi_m)$ могут быть вычислены в каждом такте управления.

4.3.2 Выбор уравнения согласования

Выполним синтез алгоритма согласованного управления для непрерывной модели ОУ (4.8). Выбор уравнений согласования — условий функционирования системы — осуществим следующим образом. Пусть главное условие согласования (функционирования) определяется по силам натяжения, тогда имеем следующее:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{F_1}{F_3} = k_F, & F_3 - F_1 - \Delta F \\ & F_5 - f(\gamma_{2p}) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{e}_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_5 - k_F x_6, & x_5 - x_6 - \Delta F \\ & x_7 - f(x_3) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь в первой строке представлены два варианта согласования сил натяжения полотна на участках размотки и контроля. Во второй строке представлено условие в общем виде по формированию желаемой силы натяжения на участке намотки, которая, как уже ранее было обговорено, влияет на напряжённно-деформированное состояние рулона намотки. Двумерная функция (4.21) описывает семимерное многообразие в пространстве состояний ОУ.

Составив дифференциальное уравнение ошибки (4.21), получим, что ошибка неуправляема. Следуя вышеописанной методике, введём вторую координату $\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_1$. Найдём её производную:

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \ddot{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_5 - k_F \ddot{x}_6, & \ddot{x}_5 - \ddot{x}_6 \\ \ddot{x}_7 - \frac{dg_F}{dt} \end{bmatrix}, \quad g_F(x_3, x_4) = \dot{f} = \frac{df}{dx_3} x_4.$$

Отметим, что, во-первых, координата $\dot{\mathbf{e}}_2$ будет полностью зависеть от всех четырёх управляющих воздействий, а значит, является полностью управляемой, а во-вторых, при дифференцировании первой же координаты ошибки в варианте согласования сил натяжения через разность исчезло ΔF .

Найдём $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$, для чего предварительно составим выражение для функции Φ :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \begin{bmatrix} x_5 - k_F x_6 & x_7 - f & \dot{x}_5 - k_F \dot{x}_6 & \dot{x}_7 - \dot{f} \end{bmatrix}^T, \\ \Phi_2 &= \begin{bmatrix} x_5 - x_6 - \Delta F & x_7 - f & \dot{x}_5 - \dot{x}_6 & \dot{x}_7 - \dot{f} \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

В таком случае выражение $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$ будет равно:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{df}{dx_3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_{10} & V_1 & 0 & 0 & V_2 & V_3 & 0 & V_4 & V_5 \\ 0 & 0 & V_{11} & V_6 & 0 & V_7 & V_8 & 0 & V_9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}V_1 &= q_6 + q_7 x_5, \quad V_2 = q_7 x_2 + q_8 x_8 - k_F r_1 x_8, \quad V_3 = k_F r_1 (2x_8 - x_9), \\ V_4 &= k_F (2r_1 x_6 - r_1 x_5 + SE r_1) + q_8 x_5 + SE q_8, \quad V_5 = -k_F r_1 (SE + x_6), \\ V_6 &= w_6 (SE + x_7) - \frac{df}{dx_3}, \quad V_7 = w_7 x_9, \quad V_8 = w_6 x_4 - 2w_7 x_9, \\ V_9 &= -w_7 (SE - x_6 + 2x_7), \quad V_{10} = \frac{d\dot{x}_5}{dx_1}, \quad V_{11} = \frac{d\dot{x}_7}{dx_3} - \frac{d^2 f}{dx_3^2} x_4.\end{aligned}$$

где V_i — функции, зависящие от координат вектора переменных.

Нетрудно заметить, что принципиального отличия $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{x}}$ от $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}}$ нет и в дальнейших расчётах будем использовать первый вариант. В векторе продольного движения должно быть пять координат, а всего переменных в ОУ девять. Как известно из комбинаторики [49], число возможных сочетаний координат в данном случае равно $C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = 126$. Исходя из условия

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right) = n \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right| \neq 0, \quad \text{получаем} \quad 47 \quad \text{возможных}$$

вариантов.

Рассмотрим координаты вектора относительного движения:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 - k_F x_6 \\ x_7 - f \\ \dot{x}_5 - k_F \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 - \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 - k_F x_6 \\ x_7 - f \\ q_6 x_2 + q_7 x_2 x_5 + q_8 x_5 x_8 + SE q_8 x_8 - k_F (r_1 x_5 x_8 - 2r_1 x_6 x_8 + r_1 x_6 x_9 - SE r_1 x_8 + SE r_1 x_9) \\ SE w_6 x_4 + w_6 x_4 x_7 - 2w_7 x_7 x_9 + w_7 x_6 x_9 - SE w_7 x_9 - \dot{f} \end{bmatrix}.$$

Выбор координат вектора продольного движения, как было сказано ранее, ограничен условием обратимости преобразования. Основываясь на этих результатах, зададим вектор продольного движения

$$\xi = [\gamma_{1p} \quad \gamma_{2p} \quad F_3 \quad v_{e1} \quad v_{e2}]^T = [x_1 \quad x_3 \quad x_6 \quad x_8 \quad x_9]^T \quad \text{и} \quad \text{вычислим}$$

$$\text{определитель} \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right]:$$

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right] = V_1 V_6 = w_6 (q_6 + q_7 x_5) (SE + x_7) \neq 0.$$

Найдём обратное преобразование, решив соответствующее уравнение (расчёты проведены при условии определения функции f как функции времени):

$$\mathbf{x} = [\xi_1 \quad \psi_1(\mathbf{e}, \xi) \quad \xi_2 \quad \psi_2(\mathbf{e}, \xi) \quad e_1 + k_F \xi_3 \quad \xi_3 \quad e_2 + f \quad \xi_4 \quad \xi_5]^T,$$

где функции ψ_1, ψ_2 не приведены в силу их громоздкости. Перепишем (4.8) относительно новых переменных. Получим два объекта, описывающих относительное (4.22) и продольное (4.23) движение по многообразию:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ \psi_3(\mathbf{e}, \xi, \mathbf{u}) \\ \psi_4(\mathbf{e}, \xi, \mathbf{u}) - \ddot{f} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{11} = \Psi(\mathbf{e}_{11}, \xi, \mathbf{u}), \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{e}, \xi) \\ \psi_2(\mathbf{e}, \xi) \\ r_1(e_1\xi_4 - 2\xi_3\xi_4 + \xi_3\xi_5 + SE\xi_5 - SE\xi_4 + k_F\xi_3\xi_4) \\ r_2(k_F - 1)\xi_3 + r_3\xi_4 + r_4\bar{u}_2 + r_2e_1 \\ r_5\xi_3 + r_6\xi_5 + r_7\bar{u}_3 - r_5f - r_5e_2 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

где функции ψ_3, ψ_4 не приведены по той же причине. Теперь необходимо определить составляющую $\bar{\mathbf{u}}$ по условию (4.17), что соответствует в данном случае решению системы

$$\begin{cases} \psi_3(\mathbf{0}, \xi, \bar{\mathbf{u}}) = 0, \\ \psi_4(\mathbf{0}, \xi, \bar{\mathbf{u}}) - \ddot{f} = 0. \end{cases}$$

относительно $\bar{\mathbf{u}}$. Имеем систему двух уравнений относительно четырёх неизвестных. Будем считать приводы цилиндров размотки и намотки ведущими, в таком случае получим, что:

$$\bar{u}_1 = U_1(\xi, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad \bar{u}_4 = U_2(\xi_{2,3,4,5}, \bar{u}_3). \quad (4.24)$$

При выполнении условия (4.17) ОУ (4.23) преобразуется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{0}, \xi) \\ \psi_2(\mathbf{0}, \xi) \\ r_1(\xi_3 \xi_5 + SE \xi_5 - SE \xi_4 + (k_F - 2) \xi_3 \xi_4) \\ r_2(k_F - 1) \xi_3 + r_3 \xi_4 + r_4 \bar{u}_2 \\ r_5 \xi_3 + r_6 \xi_5 + r_7 \bar{u}_3 - r_5 f \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Как несложно заметить, с учётом обратного преобразования при $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ первые два уравнения системы (4.25) фактически повторяют решения пятого и седьмого уравнений системы (4.8) относительно переменных x_2, x_4 . В свою очередь, учитывая обратную замену переменных в векторе продольного движения, а именно $\xi_3 = x_6, \xi_4 = x_8, \xi_5 = x_9$, получим, что при нулевых ошибках по этим координатам дифференциальные уравнения относительно координат ξ_1, ξ_2 , по сути, будут описывать динамику номинальных значений этих функций при прочих равных коэффициентах уравнений. Как следствие, ввиду независимости последних трёх уравнений (4.25) от первых двух (см. ниже), имеет смысл редуцировать (4.25) до ОУ третьего порядка. Перепишем его с учётом обратного преобразования:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_6 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_F - 2)r_1 x_6 x_8 + r_1 x_6 x_9 - SE r_1 x_8 + SE r_1 x_9 \\ r_2(k_F - 1)x_6 + r_3 x_8 + r_4 \bar{u}_2 \\ r_5 x_6 + r_6 x_9 + r_7 \bar{u}_3 - r_5 f \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Если сравнить этот ОУ с системой уравнений относительно тех же координат из (4.8), то можно заметить, что они будут совпадать, если считать, что $x_5 = k_F x_6$ и $x_7 = f$. Фактически речь идёт об участке контроля, от управления которым зависит управление всей машиной в соответствии с концепцией согласованного управления.

Функция f , как было сказано ранее, определяет желаемый закон изменения натяжения участка полотна перед рулоном намотки. Строго говоря, проведённые выше расчёты справедливы при условии $f = f(t)$ ввиду того, что для расчёта обратного преобразования необходимо точное знание функции.

Перед продолжением синтеза алгоритма управления проанализируем другие варианты. Как было сказано ранее, существует всего 47 вариантов выбора координат вектора продольного движения с учётом условия обратимости преобразования. Прежде всего, отметим, что координаты x_1, x_3 входят в систему (4.8) в составе коэффициентов нелинейно, и задача по решению соответствующих уравнений относительно этих переменных является фактически невозможной. С учётом этого фактора, можно убрать часть вариантов, сократив их число до 14:

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_3	x_2	x_3	x_2	x_2	x_2	x_2	x_3	x_3	x_3
x_3	x_3	x_3	x_3	x_4	x_3	x_4	x_3	x_3	x_3	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	x_4	x_4	x_5	x_5	x_6	x_6	x_4	x_5	x_6	x_8	x_8	x_8	x_8
x_5	x_6	x_8	x_8	x_8	x_8	x_8	x_9	x_9	x_9	x_9	x_9	x_9	x_9

(по столбцам, включая последний вариант, рассмотренный ранее)

Любой из этих вариантов подходит для реализации. Кроме того, для данного набора условий согласования в любом случае будет получаться система из двух уравнений с четырьмя неизвестными относительно $\bar{u}$, а значит, количество окончательных вариантов ОУ, описывающего продольное движение по многообразию, будет ещё больше. Можно действовать с позиции упрощения получаемых математических моделей ОУ, описывающих движения по многообразию.

Рассмотрим ещё варианты управления ОУ (4.25). Перепишем эту модель в исходных переменных:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_F(q_8 - k_F r_1 + 2r_1)x_6 x_8 + k_F r_1 x_6 x_9 - SE(q_8 + k_F r_1)x_8 + SEk_F r_1 x_9}{q_6 + k_F q_7 x_6} \\ \frac{\dot{f} - w_7 x_6 x_9 + w_7(SE + 2f)x_9}{w_6(SE + f)} \\ (k_F - 2)r_1 x_6 x_8 + r_1 x_6 x_9 - r_1 SE x_8 + r_1 SE x_9 \\ r_2(k_F - 1)x_6 + r_3 x_8 + r_4 \bar{u}_2 \\ r_5 x_6 + r_6 x_9 + r_7 \bar{u}_3 - r_5 f \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Если применить концепцию согласованного управления к ОУ (4.27), то переменные x_1 , x_3 , согласно вышеприведённым аргументам, должны быть линейно связаны с новыми переменными. Этого можно добиться, либо назначив их координатами вектора продольного движения, либо линейно связав с координатами вектора ошибки. Исследуем второй вариант. Пусть условие согласования для ОУ (4.27) выражается в задании $x_1 = x_1^H$, $x_3 = x_3^H$, где x^H — номинальные, то есть желаемые функции углов поворотов рулонов. Тогда получим следующее:

$$\mathbf{e}_{22}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^H \\ x_3 - x_3^H \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_1^H \\ \dot{x}_3 - \dot{x}_3^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \\ e_{24} \end{bmatrix}.$$

Найдём $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_6} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_8} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_9} \\ 0 & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_6} & 0 & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_9} \end{bmatrix}.$$

Четыре координаты ошибки оставляют на выбор только одну координату продольного движения. Имеем всего пять вариантов. Рассмотрим

их все и найдём $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right]^T$, обозначив $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]$:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_6} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_8} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_9} \\ 0 & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_6} & 0 & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_9} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_6} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_8} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_9} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_6} & 0 & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_9} \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix}.$$

Иными словами, в данном случае имеем условие для обратимости преобразования вида $\xi_{22} \neq x_1$, $\xi_{22} \neq x_3$. Назначим $\xi_{22} = x_9$ и перепишем (4.27) в новых переменных:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_{22} \\ \dot{\xi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_{21} \\ \dot{e}_{22} \\ \dot{e}_{23} \\ \dot{e}_{24} \\ \dot{\xi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{23} \\ e_{24} \\ \psi_5(\mathbf{q}, \mathbf{q}'_{x_1}, \mathbf{w}, \mathbf{w}'_{x_3}, \mathbf{e}_{22}, \xi_{22}, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \\ \psi_6(\mathbf{q}, \mathbf{q}'_{x_1}, \mathbf{w}, \mathbf{w}'_{x_3}, \mathbf{e}_{22}, \xi_{22}, \bar{u}_3) \\ \psi_7(\mathbf{w}, \mathbf{w}'_{x_3}, e_{24}, \xi_{22}, \bar{u}_3) \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в третьем и четвертом уравнениях этой системы коэффициенты q, w являются функциями только переменных x_1, x_3 , а они зависят исключительно от e_{21}, e_{22} соответственно. Как следствие, вычисление частных производных при определении матриц линеаризованной системы можно рассчитать по цепному правилу $\frac{\partial}{\partial e_{21}} q(x_1(e_{21})) = \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{dx_1}{de_{21}}$, что с учётом линейной связи между исходной переменной и координатой ошибки, а также выполнения условия $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, приводит фактически к тем же коэффициентам, но рассчитываемым относительно x'' — номинальных значений. Объект, описывающий продольное движение, является нелинейным. Третье и четвертое уравнения системы полностью определяют составляющие управляющих воздействий в соответствии с (4.17).

Модифицируем рассмотренный вариант. Обратим внимание, что задание по углу поворота рулона размотки содержит в себе скорости обоих приводов цилиндров, в то время как задание по углу для рулона намотки связано по скорости только с цилиндрами намотки. Это означает, что вектор

ошибки $\mathbf{e}_{22}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1'' \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix}$ тоже является полностью управляемым. Но

тогда выбор координат для вектора продольного движения значительно расширяется. Рассчитаем $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_1 & 0 & V_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix}.$$

Учитывая количество возможных вариантов $C_5^3 = 10$ и условие

$\left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right\| \neq 0$, получаем три возможных варианта для вектора продольного

движения:

$$\begin{array}{ccc} x_3 & x_3 & x_3 \\ x_6 & x_6 & x_8 \\ x_8 & x_9 & x_9 \end{array}$$

Во-первых, переменная x_3 , скрытая внутри коэффициентов w , уже содержится во всех вариантах. Во-вторых, определив приоритет привода цилиндров намотки перед приводом цилиндров размотки, то есть приоритет x_9 перед x_8 , получим два возможных варианта. Любой из этих вариантов приводит к нелинейной системе дифференциальных уравнений, описывающих продольное движение. Дополнительная сложность заключается в появлении функции $\dot{x}_1''$ в составе уравнений. Кроме того, появляется необходимость расчёта вторых производных коэффициентов по углу поворота при определении матриц линеаризованного объекта, описывающего относительное движение по многообразию.

Рассмотрим первый вариант. Если переменные x_1 , x_3 должны быть координатами вектора продольного движения, то добавив к ним $\xi = x_9$ получим, что на вектор ошибки приходится две координаты. Определим $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Пусть } \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{bmatrix}, \quad \text{тогда} \quad \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right\| = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix}.$$

Ошибка должна быть полностью управляемой, то есть либо условие функционирования является одномерным, не связывающим координаты x_8 , x_9 , и тогда вторая координата будет его производной, содержащей в себе

переменные x_8 , x_9 , либо условие является двумерным, и хотя бы одно уравнение изначально включает в себя x_8 , x_9 . Запишем первое, второе и пятое уравнения системы (4.25) с учётом введённых координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_F(q_8 - k_F r_1 + 2r_1)x_6 x_8 + k_F r_1 x_6 \xi_3 - SE(q_8 + k_F r_1)x_8 + SE k_F r_1 \xi_3}{q_6 + k_F q_7 x_6} \\ \frac{\dot{f} - w_7 x_6 \xi_3 + w_7 (SE + 2f)\xi_3}{w_6 (SE + f)} \\ r_5 x_6 + r_6 \xi_3 + r_7 \tilde{u}_3 - r_5 f \end{bmatrix}.$$

Пары коэффициентов a_3 , a_4 и a_3 , a_8 не могут быть нулевыми одновременно. В силу того, что ими обозначаются производные по x_6 , x_8 и x_6 соответственно, заключаем, что, во-первых, условие по желаемой функции угла поворота не подходит, во-вторых, одно из уравнений условия согласования должно содержать задание по силе натяжения. Отсюда несложно получить второе уравнение вектора ошибки — производная первой координаты ошибки или какое-то уравнение, связывающее между собой скорости цилиндров, то есть координаты x_8 и x_9 :

$$\mathbf{e}_{22}^1 = \begin{bmatrix} x_6 - x_{6n} \\ \dot{x}_6 - \dot{x}_{6n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_{22}^2 = \begin{bmatrix} x_6 - x_{6n} \\ V(x_8, x_9) \end{bmatrix},$$

где $V(x_8, x_9)$ — функция, определяющая связь между желаемыми законами изменения скоростей цилиндров. Её найдём из шестого уравнения системы (4.8) по номинальному режиму (желаемая сила натяжения на участке контроля является постоянной величиной вне зависимости от режима работы системы):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_6 &= r_1 x_5 x_8 - 2r_1 x_6 x_8 + r_1 x_6 x_9 - SEr_1 x_8 + SEr_1 x_9 \Rightarrow \\
\Rightarrow 0 &= r_1 x_{5H} x_{8H} - 2r_1 x_{6H} x_{8H} + r_1 x_{6H} x_{9H} - SEr_1 x_{8H} + SEr_1 x_{9H} \Rightarrow \\
\Rightarrow x_{8H} &= k_v x_{9H}, \quad k_v = \frac{SE + x_{6H}}{SE + 2x_{6H} - x_{5H}} = \frac{SE + x_{6H}}{SE + (2 - k_F)x_{6H}} = Const.
\end{aligned}$$

В дальнейшем примем задания по всем силам натяжения постоянными. В таком случае для варианта с $\mathbf{e}_{22}^1$ получим следующую модель ОУ, описывающего продольное движение:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= -\frac{(SE + k_F x_{6H})(SE + x_{6H})q_8}{(q_6 + k_F q_7 x_{6H})(SE + (2 - k_F)x_{6H})}, \\
\Psi_2 &= \frac{(SE + 2f - x_{6H})w_7}{w_6(SE + f)}, \\
\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Psi_1 \xi_3 \\ \Psi_2 \xi_3 \\ r_6 \xi_3 + r_7 \tilde{u}_3 - r_5 f + r_5 x_{6H} \end{bmatrix}. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Для второго варианта вектора ошибки модель в точности совпадает с (4.28). Тогда по сути задача управления всей машиной сводится к задаче управления ОУ (4.28). Обратим внимание, что первое и второе уравнения системы являются независимыми друг от друга, а третье уравнение полностью независимое. Воспользуемся системой (4.8) и решим пятое и седьмое уравнения относительно x_2 , x_4 в номинальном режиме:

$$\begin{cases} \dot{x}_{5H} = q_{6H} x_{2H} + q_{7H} x_{2H} x_{5H} + q_{8H} x_{5H} x_{8H} + SEq_{8H} x_{8H}, \\ \dot{x}_{7H} = SEw_{6H} x_{4H} + w_{6H} x_{4H} x_{7H} - 2w_{7H} x_{7H} x_{9H} + w_{7H} x_{6H} x_{9H} - SEw_{7H} x_{9H}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2н} = -\frac{q_{8н}(SE + x_{5н})}{q_{6н} + q_{7н}x_{5н}} x_{8н}, \\ x_{4н} = \frac{-2w_{7н}x_{7н} + w_{7н}x_{6н} - SEw_{7н}}{-SEw_{6н} - w_{6н}x_{7н}} x_{9н}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2н} = -\frac{(SE + k_F x_{6н})(SE + x_{6н})q_{8н}}{(q_{6н} + q_{7н}k_F x_{6н})(SE + (2 - k_F)x_{6н})} x_{9н}, \\ x_{4н} = \frac{(SE + 2f - x_{6н})w_{7н}}{w_{6н}(SE + f)} x_{9н}. \end{cases}$$

Несложно заметить, что полученная система в точности совпадает с первыми двумя уравнениями системы (4.28). Отсюда можно предположить, что при обеспечении нулевой ошибки по скорости цилиндров намотки, будет выполнено $\xi_1 \rightarrow x_{2н}$, $\xi_2 \rightarrow x_{4н}$. В действительности, как несложно показать, любое появление ошибки по третьей координате, например, при инициации переходного процесса вследствие изменения задания и/или возмущающего воздействия, неизбежно приведёт к ошибкам по первым двум координатам.

Управление ОУ (4.28) сопряжено с рядом трудностей, в первую очередь обусловленных независимостью третьего уравнения. Исследуем ещё один вариант условия согласования. Пусть скорости цилиндров связаны соотношением $e = x_8 - k_v x_9$, тогда если вектор продольного движения имеет вид $\xi = [x_1 \quad x_3 \quad x_6 \quad x_9]^T$, то:

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -k_v \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

то есть преобразование обратимо. Запишем новые модели:

$$\dot{e} = r_2(k_F - 1)\xi_3 + r_3(e + k_v\xi_4) + r_4\bar{u}_2 - k_v r_5\xi_3 - k_v r_6\xi_4 - k_v r_7\bar{u}_3 + k_v r_5 f,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_F k_v (q_8 - k_F r_1 + 2r_1)\xi_3\xi_4 + k_F r_1 \xi_3 \xi_4 - SE k_v (q_8 + k_F r_1)\xi_4 + SE k_F r_1 \xi_4}{q_6 + k_F q_7 \xi_3} \\ \frac{\dot{f} - w_7 \xi_3 \xi_4 + w_7 (SE + 2f)\xi_4}{w_6 (SE + f)} \\ k_v (k_F - 2)r_1 \xi_3 \xi_4 + r_1 \xi_3 \xi_4 - r_1 k_v SE \xi_4 + r_1 SE \xi_4 \\ r_5 \xi_3 + r_6 \xi_4 + r_7 \bar{u}_3 - r_5 f \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание, что и в этом случае получается независимость третьего и четвёртого уравнений от первых двух.

Итак, можно выбрать различные варианты уравнения согласования, опираясь на математическую модель всей машины. Для каждого из таких вариантов в целом существует выбор вариантов переменных для вектора координат объекта, описывающего продольное движение.

4.4 Метод декомпозиции

4.4.1 Идеология метода декомпозиции

Алгоритм согласованного управления по сути базируется на определённом преобразовании базиса, которое в конечном счёте позволяет разделить исходный объект управления на два [59,60]. Попробуем разделить объект управления иным способом.

Рассмотрим нелинейный ОУ второго порядка с математической моделью следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u_1), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u_2). \end{aligned}$$

Как и в методе касательной линеаризации, представим переменные и управляющие воздействия в виде суммы номинальных значений x_n и отклонений Δ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1n} + \dot{\Delta}_1 &= f_1(x_{1n} + \Delta_1, x_{2n} + \Delta_2, u_{1n} + \tau_1), \\ \dot{x}_{2n} + \dot{\Delta}_2 &= f_2(x_{1n} + \Delta_1, x_{2n} + \Delta_2, u_{2n} + \tau_2).\end{aligned}$$

В методе касательной линеаризации модель номинального режима получается путём обнуления отклонений, а модель отклонений соответственно определяется как разность исходной модели и модели номинального режима с последующей линеаризацией относительно отклонений. Изменим подход и создадим такую модель, чтобы уравнения стали независимы друг от друга:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_{2n}, u_{1n}), & \Delta_2 = 0, \quad \tau_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_{1n}, x_2, u_{2n}), & \Delta_1 = 0, \quad \tau_2 = 0. \end{cases}$$

В такой модели, во-первых, номинальные управляющие воздействия будут рассчитываться относительно переменных, по которым задаются дифференциальные уравнения, а во-вторых, в этих же уравнениях другие переменные состояния учитываются в номинальном состоянии, то есть фактически рассматриваются независимые объекты управления с возмущениями. Построим вторую модель и соответственно зависимости для добавочных управляющих воздействий:

$$\begin{aligned}0 &= f_1(x_1, x_{2n} + \Delta_2, u_{1n} + \tau_1) - f_1(x_1, x_{2n}, u_{1n}), \\ 0 &= f_2(x_{1n} + \Delta_1, x_2, u_{2n} + \tau_2) - f_2(x_{1n}, x_2, u_{2n}).\end{aligned}$$

Решив эти уравнения относительно τ_1 , τ_2 , получим соответственно законы управляющих воздействий. Отметим, что в конечном счёте зависимость управляющих воздействий от обеих координат в данном случае сохранилась. Несложно увидеть, что при идеальном управлении, когда отклонения переменных состояния будут стремиться к нулю, добавочные управляющие воздействия также станут в пределе нулевыми. Теоретическое преимущество такого подхода заключается именно в таком разделении объекта управления, что уравнения становятся независимыми друг от друга.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть математическая модель ОУ имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + \sin x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + x^2 + u_2.\end{aligned}$$

Данный объект второго порядка, и он нелинейный. Очевидно, что если номинальное значение хотя бы одной из переменных не будет постоянным, то матрица состояния при применении метода касательной линеаризации будет непостоянной, а значит, матрица обратной связи тоже будет переменной. Если же разделить исходную модель в соответствии с вышеописанным алгоритмом, то получим следующие результаты:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u_{1н} + \sin x_{2н}, \\ \dot{x}_2 = x^2 + u_{2н} + x_{1н}^2. \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_1 = -2 \cos\left(x_{2н} + \frac{\Delta_2}{2}\right) \sin \frac{\Delta_2}{2}, \\ \tau_2 = -\Delta_1 (2x_{1н} + \Delta_1). \end{cases}$$

В результате разделения уравнения, описывающие координаты, во-первых, стали независимыми друг от друга, а во-вторых, первое уравнение стало линейным, что в значительной степени упрощает дальнейшую процедуру синтеза алгоритма управления. Добавочные управляющие воздействия вычисляются непосредственно в зависимости от номинальных значений координат вектора состояния, то есть заданий, и ошибки по вектору состояния.

Не вдаваясь в подробности синтеза алгоритма управления для полученных объектов управления на этом этапе, приведём сразу результаты моделирования системы управления. Пусть $g_1 = x_{1н} = \text{const}$, $g_2 = x_{2н} = kt + b$. Добавим также наличие возмущений вида «константа». На рисунке 4.10 приведена схема моделирования в пакете SIMULINK программы MATLAB.

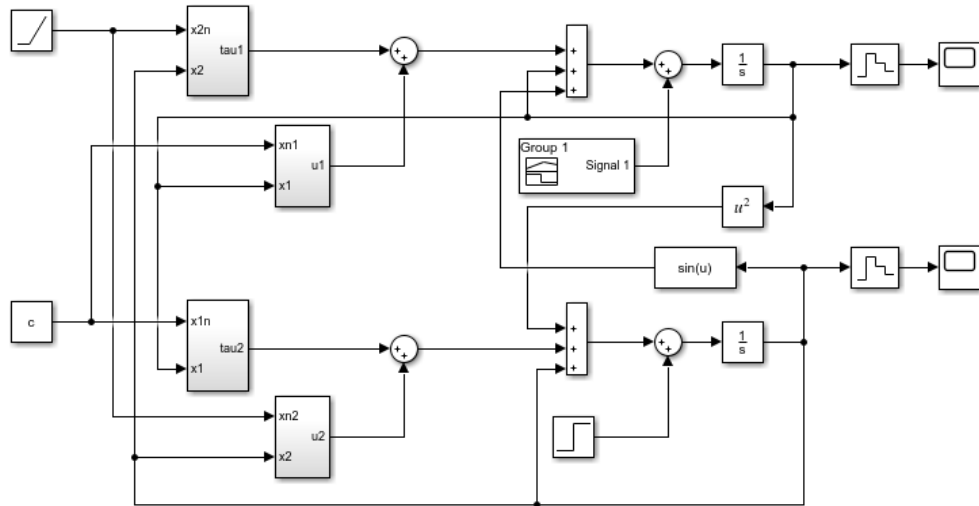
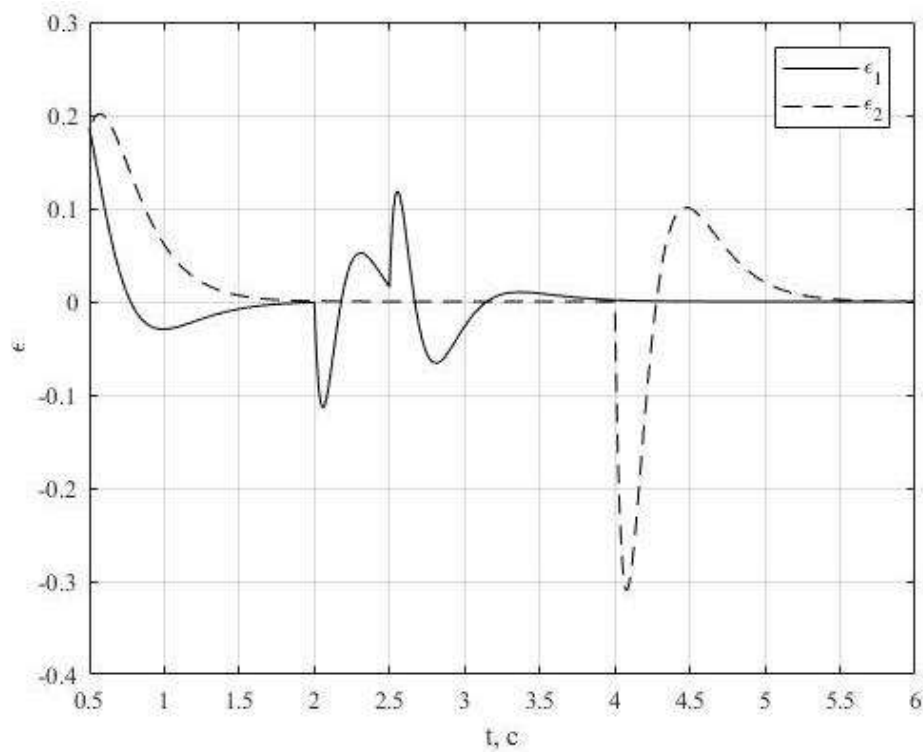


Рисунок 4.10 — Схема моделирования

На рисунке 4.11 приведены зависимости ошибок координат от времени.

Рисунок 4.11 — Зависимость $\varepsilon_i = g_i - x_i$, $i = 1, 2$

Как можно заметить, первое возмущение, представленное прямоугольной функцией $\text{rect}(\cdot)$ и длительностью полсекунды, на второй

секунде отрабатывается системой управления с нулевой ошибкой. Второе возмущение, являющееся смещённой функцией Хевисайда $\theta(\cdot)$, на четвёртой секунде также отрабатывается системой управления в ноль.

4.4.2 Варианты разделения системы

Итак, руководствуясь соображениями по упрощению задачи синтеза алгоритма управления, рассмотрим возможные варианты разбиения ОУ (4.8).

Вариант №1 заключается в разделении системы на узлы размотки и намотки, ММ каждой из которых содержит соответствующие уравнения приводов рулонов, уравнения сил натяжения прилегающих к рулонам участков полотна материала, уравнения приводов цилиндров. Уравнение силы натяжения на участке контроля участвует в ММ каждого из узлов с поправкой в соответствии с разделением. Включение этого уравнения в подсистемы необходимо для дополнительного контроля значения F_3 . Окончательно получим следующие ММ:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, x_9), \quad \mathbf{x}_1 = [x_1 \ x_2 \ x_5 \ x_6 \ x_8]^T, \quad \mathbf{u}_1 = [u_1 \ u_2]^T. \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, x_8), \quad \mathbf{x}_2 = [x_3 \ x_4 \ x_6 \ x_7 \ x_9]^T, \quad \mathbf{u}_2 = [u_3 \ u_4]^T.\end{aligned}$$

Как видно, в обеих подсистемах есть одна координата, поведение которой в рамках концепции раздельного синтеза считается известным. Условия согласования можно поставить по силам натяжения.

Проведём исследование этого варианта. Для первой подсистемы уравнение первой координаты ошибки согласования имеет вид $e_1 = x_5 - kx_6$, где k — коэффициент согласования сил натяжения на участках полотна материала. В таком случае, учитывая необходимость полного управления ошибкой, окончательно имеем:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 - kx_6 \\ \dot{x}_5 - k\dot{x}_6 \end{bmatrix}.$$

Вычислим $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -k & 0 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{bmatrix},$$

$$V_1 = \frac{d\dot{x}_5}{dx_1}, \quad V_2 = q_6 + q_7x_5, \quad V_3 = q_7x_2 + q_8x_8 - kr_1x_8,$$

$$V_4 = 2kr_1x_8 - kr_1x_9, \quad V_5 = q_8x_5 + SEq_8 - kr_1x_5 + 2kr_1x_6 + kSEr_1.$$

Следуя той же процедуре, определим варианты координат для ОУ, описывающего продольное движение. В данном случае получим

$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ вариантов; из них только 7 дадут ненулевой

определитель $\left| \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right|$:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 & x_2 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_2 & x_2 & x_5 & x_5 & x_6 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_8 & x_8 & x_8 & x_8 & x_8 \end{array}$$

Дальнейшая процедура синтеза в сущности повторяет ранее показанное применение метода согласованного управления для всей машины.

Рассмотрим вариант №2. Его суть заключается в разделении исходной системы по участкам полотна, определяя математические модели образующихся подсистем как совокупность трёх уравнений: два уравнения приводов цилиндров, включая под этим и рулоны, на границах участков и одно

уравнение, описывающее силу натяжения полотна материала на участке. Фактически речь идёт о разделении системы на участки размотки, контроля и намотки. В соответствии с этим для участка размотки имеем следующую ММ:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, x_6), \quad \mathbf{x}_1 = [x_1 \quad x_2 \quad x_5 \quad x_8]^T, \quad \mathbf{u}_1 = [u_1 \quad u_2]^T.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = q_1 x_2^2 + q_2 x_2 + q_3 x_5 + q_4 u_1 + q_5, \\ \dot{x}_5 = q_6 x_2 + q_7 x_2 x_5 + q_8 x_5 x_8 + SE q_8 x_8, \\ \dot{x}_8 = r_2 x_5 + r_3 x_8 + r_4 u_2 - r_2 x_6. \end{cases}$$

Следуя процедуре раздельного синтеза, введём в рассмотрение отклонение переменных и найдём соответствующую математическую модель ОУ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = q_1 x_2^2 + q_2 x_2 + q_3 x_5 + q_4 u_1 + q_5, \\ \dot{x}_5 = q_6 x_2 + q_7 x_2 x_5 + q_8 x_5 x_8 + SE q_8 x_8, \\ \dot{x}_8 = r_2 x_5 + r_3 x_8 + r_4 u_{2n} - r_2 x_{6n}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Найдём добавочное управляющее воздействие τ_2 , для чего вычислим разность между предпоследним уравнением системы (4.8) и четвёртым уравнением (4.29):

$$\tau_2 = \frac{r_2}{r_4} \Delta_6 = \frac{r_2}{r_4} (x_6 - x_{6n}).$$

Это управляющее воздействие прямо пропорционально ошибке по силе натяжения полотна на участке контроля. Аналогично для участка контроля получим:

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, x_5, x_7), \quad \mathbf{x}_2 = [x_6 \quad x_8 \quad x_9]^T, \quad \mathbf{u}_2 = [u_2 \quad u_3]^T.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_6 = r_1 x_{5H} x_8 - 2r_1 x_6 x_8 + r_1 x_6 x_9 - SE r_1 x_8 + SE r_1 x_9, \\ \dot{x}_8 = -r_2 x_6 + r_3 x_8 + r_4 u_{2H} + r_2 x_{5H}, \\ \dot{x}_9 = r_5 x_6 + r_6 x_9 + r_7 u_{3H} - r_5 x_{7H}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Если найти разность между соответствующими моделями, то получится:

$$\begin{cases} 0 = r_1 x_8 \Delta_5, \\ 0 = r_4 \tau_2 + r_2 \Delta_5, \\ 0 = r_7 \tau_3 - r_5 \Delta_7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_2 = -\frac{r_2}{r_4} \Delta_5, \\ \tau_3 = \frac{r_5}{r_7} \Delta_7. \end{cases}$$

Воздействие τ_2 прямо пропорционально ошибке по пятой координате; в то же время первое уравнение имеет смысл при $\Delta_5 = 0$, что приведёт и к $\tau_2 = 0$.

Для участка намотки имеем следующую ММ:

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{F}_3(\mathbf{x}_3, \mathbf{u}_3, x_6), \quad \mathbf{x}_3 = [x_3 \quad x_4 \quad x_7 \quad x_9]^T, \quad \mathbf{u}_3 = [u_3 \quad u_4]^T.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = w_1 x_4^2 + w_2 x_4 + w_3 x_7 + w_4 u_4 + w_5, \\ \dot{x}_7 = SE w_6 x_4 + w_6 x_4 x_7 - 2w_7 x_7 x_9 + w_7 x_{6H} x_9 - SE w_7 x_9, \\ \dot{x}_9 = -r_5 x_7 + r_6 x_9 + r_7 u_{3H} + r_5 x_{6H}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Добавочное управляющее воздействие будет иметь вид $\tau_3 = -\frac{r_5}{r_7} \Delta_6$.

Можно заметить, что и в этом случае возникает пересечение двух подсистем при расчёте добавочного управляющего воздействия.

Изменим подход. Сделаем участок контроля полностью независимым:

$$\begin{cases} \dot{x}_6 = r_1 x_{5H} x_8 - 2r_1 x_6 x_8 + r_1 x_6 x_9 - SEr_1 x_8 + SEr_1 x_9, \\ \dot{x}_8 = r_3 x_8 + r_4 u_{2H} + r_2 x_{5H} - r_2 x_{6H}, \\ \dot{x}_9 = r_6 x_9 + r_7 u_{3H} + r_5 x_{6H} - r_5 x_{7H}. \end{cases} \quad (4.32)$$

В таком случае, ММ участков размотки и намотки будут иметь вид соответственно:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = q_1 x_2^2 + q_2 x_2 + q_3 x_5 + q_4 u_1 + q_5, \\ \dot{x}_5 = q_6 x_2 + q_7 x_2 x_5 + q_8 x_5 x_8 + SEq_8 x_8, \\ \dot{x}_8 = r_3 x_8 + r_4 u_{2H} + r_2 x_{5H} - r_2 x_{6H}. \end{cases} \quad (4.33)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = w_1 x_4^2 + w_2 x_4 + w_3 x_7 + w_4 u_4 + w_5, \\ \dot{x}_7 = SEw_6 x_4 + w_6 x_4 x_7 - 2w_7 x_7 x_9 + w_7 x_{6H} x_9 - SEw_7 x_9, \\ \dot{x}_9 = r_6 x_9 + r_7 u_{3H} + r_5 x_{6H} - r_5 x_{7H}. \end{cases} \quad (4.34)$$

В результате вычитания из уравнений (4.8) уравнений моделей (4.32-4.34) получим следующее:

$$\begin{aligned} x_5 - x_{5H} &= 0, \\ x_6 - x_{6H} &= 0, \\ \tau_2 &= \frac{r_2}{r_4} (x_6 - x_{6H}) - \frac{r_2}{r_4} (x_5 - x_{5H}), \\ \tau_3 &= \frac{r_5}{r_7} (x_7 - x_{7H}) - \frac{r_5}{r_7} (x_6 - x_{6H}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Добавочные управляющие воздействия (4.35) прямо пропорциональны ошибкам по силам натяжения полотна. Итак, в результате применения данного подхода были получены системы (4.32-4.34), при этом участок контроля

является полностью независимым. Исследуем вопрос управления этим участком.

4.5 Управление участком контроля

Итак, возьмём за основу уравнения апериодических звеньев для приводов цилиндров и уравнение (2.45) для участка полотна материала, при этом будем считать, что, во-первых, натяжение полотна материала за пределами участка равно нулю, а во-вторых, длина участка постоянна. Фактически речь идёт о первом уравнении системы (4.32) при $x_{5н} = 0$:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + a_2 F + b_1 u_1, \\ \frac{dF}{dt} = -\frac{SE}{L} v_1 - \frac{2}{L} v_1 F + \frac{1}{L} F v_2 + \frac{SE}{L} v_2, \\ \frac{dv_2}{dt} = a_3 v_2 + a_4 F + b_2 u_2. \end{cases} \quad (4.36)$$

Этот ОУ третьего порядка является нелинейным. Найдём номинальные величины в соответствии с методом касательной линеаризации, считая, что известна номинальная скорость в конце участка, желаемая сила натяжения и обе этих величины являются константами:

$$\begin{cases} \frac{dv_{1н}}{dt} = a_1 v_{1н} + a_2 F_{н} + b_1 u_{1н}, \\ 0 = -\frac{SE}{L} v_{1н} - \frac{2}{L} v_{1н} F_{н} + \frac{1}{L} F_{н} v_{2н} + \frac{SE}{L} v_{2н}, \\ 0 = a_3 v_{2н} + a_4 F_{н} + b_2 u_{2н}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1н} = \frac{-a_1 v_{1н} - a_2 F_{н}}{b_1}, \\ v_{1н} = \frac{v_{2н} (SE + F_{н})}{SE + 2F_{н}}, \\ u_{2н} = \frac{-a_3 v_{2н} - a_4 F_{н}}{b_2}. \end{cases}$$

Исследуем вариант с отдельным синтезом, при котором уравнение по силе натяжения исключено из модели. Согласно математической модели номинального режима, скорости на границах связаны соотношением

$v_{1н} - kv_{2н} = 0$, то есть фактически речь идёт о так называемом электронном редукторе. Заметим при этом, что сами ОУ будут линейными первого порядка, а соответствующие слагаемые с силой натяжения являются возмущающим воздействием. В таком случае имеем задачу управления согласованным движением линейного объекта по линейному многообразию.

Математическая модель в данном случае имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_2 F_n \\ a_4 F_n \end{bmatrix}.$$

Введём в рассмотрение вектор ошибки $e = v_1 - kv_2$. Составив дифференциальное уравнение ошибки, убеждаемся, что она управляема. Выберем скорость второго привода в качестве переменной уравнения, описывающего продольное движение по многообразию. Отсюда несложно получить, что:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 e + (ka_1 - ka_3)\xi + b_1 u_1 - kb_2 u_2 + (a_2 - ka_4)F_n \\ a_3 \xi + b_2 u_2 + a_4 F_n \end{bmatrix}.$$

Отметим, что второе уравнение никак не зависит от первого. Найдём составляющую $\bar{u}$ из первого уравнения. В силу того, что искомым переменных две, а уравнение одно, определим второй привод ведущим:

$$\begin{aligned} 0 &= (ka_1 - ka_3)\xi + b_1 \bar{u}_1 - kb_2 \bar{u}_2 + (a_2 - ka_4)F_n \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{u}_1 &= \frac{(ka_4 - a_2)F_n - (ka_1 - ka_3)\xi + kb_2 \bar{u}_2}{b_1}. \end{aligned}$$

В таком случае, уравнение по первой координате очевидно преобразуется к виду:

$$\dot{e} = a_1 e + b_1 \bar{v}_1,$$

где $\bar{v}_1$ обозначено управляющее воздействие (см. (4.20)). Для этого объекта необходимо синтезировать любой алгоритм управления, обеспечивающий $e(t) \rightarrow 0$. Для объекта, описывающего продольное движение, можно выбрать, принимая во внимание задание и предполагаемое поведение возмущающего воздействия, ПИ-регулятор. Но поскольку включение интегратора в контур управления повышает порядок астатизма системы, то и в этом случае воспользуемся формальной линеаризацией.

Воспользуемся теперь концепцией согласованного управления для исходной модели примера. Уравнение согласования оставим прежним, то есть по скоростям. В таком случае получим следующую модель:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= F, \quad \xi_2 = v_2, \\ \begin{cases} \dot{e} = a_1 e + (a_2 - ka_4)\xi_1 + (ka_1 - ka_3)\xi_2 + b_1 u_1 - kb_2 u_2, \\ \dot{\xi}_1 = -\frac{SE}{L}(e + k\xi_2) - \frac{2}{L}(e + k\xi_2)\xi_1 + \frac{1}{L}\xi_1\xi_2 + \frac{SE}{L}\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = a_3\xi_2 + a_4\xi_1 + b_2 u_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Как и прежде, из первого уравнения найдём $\bar{u}_1$, задав второй привод ведущим:

$$\bar{u}_1 = \frac{(ka_4 - a_2)\xi_1 - (ka_1 - ka_3)\xi_2 + kb_2\bar{u}_2}{b_1}.$$

Эта составляющая управляющего воздействия оказалась такой же, что и в предыдущих расчётах. Уравнение по первой координате как следствие тоже

не изменится: $\dot{e} = a_1 e + b_1 \bar{v}_1$. Объект, описывающий продольное движение, является нелинейным:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \frac{1-2k}{L} \xi_1 \xi_2 + \frac{SE}{L} (1-k) \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = a_4 \xi_1 + a_3 \xi_2 + b_2 u_2. \end{cases}$$

Выполним обратную замену и сравним полученные уравнения с соответствующими уравнениями (4.36):

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = \frac{1-2k}{L} F v_2 + \frac{SE}{L} (1-k) v_2, \\ \frac{dv_2}{dt} = a_4 F + a_3 v_2 + b_2 u_2. \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} \frac{dF}{dt} = \frac{1}{L} F v_2 + \frac{SE}{L} v_2 - \frac{SE}{L} v_1 - \frac{2}{L} v_1 F, \\ \frac{dv_2}{dt} = a_3 v_2 + a_4 F + b_2 u_2. \end{cases}$$

Изменилось только первое уравнение в соответствии с заданным условием согласования выходных переменных. Обратим внимание, что хоть формально расчёт $\bar{v}_1$ не изменился, для $\bar{u}_1$ теперь необходимо точно знать, как меняется в процессе сила натяжения полотна материала. Соответственно изменился и расчёт управляющего воздействия на второй привод. Линеаризуем систему в окрестностях номинального режима:

$$\dot{\Delta} = \mathbf{A} \Delta + \mathbf{B} u_2, \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1-2k}{L} \xi_{2н} & \frac{1-2k}{L} \xi_{1н} + \frac{SE}{L} (1-k) \\ a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Рассчитаем номинальное управляющее воздействие: $u_{2н} = \frac{-a_4 \xi_{1н} - a_3 \xi_{2н}}{b_2}$.

В силу того, что коэффициент отношения скоростей однозначно определяется

из параметров номинального режима, а именно $k = \frac{SE + \xi_{1H}}{SE + 2\xi_{1H}}$, то окончательно

матрица состояния будет иметь вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{SE}{L(SE + 2\xi_{1H})} \xi_{2H} & 0 \\ a_4 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы управляемости для этого ОУ равен 1, а значит, напрямую синтезировать модальное управление не представляется возможным. В данном случае преобразование базиса, как возможный вариант решения проблемы управляемости и/или наблюдаемости, не рассматривается, поскольку для любой матрицы перехода вида $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ матрица

управляемости будет иметь вид $\begin{bmatrix} a_3 b_2 m_2 & b_2 m_2 \\ a_3 b_2 m_4 & b_2 m_4 \end{bmatrix}$, и её ранг очевидно равен 1.

Переход от математической модели объекта управления в форме пространства

состояний $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$, к форме передаточной функции осуществляется по $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$.

формуле $W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$. Выполнив расчёты, получим, что:

$$W(s) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_2}{s - a_3} \end{bmatrix},$$

то есть вне зависимости от выбора точки измерения — матрицы $\mathbf{C}$ — будет получено звено не выше первого порядка, в то время как исходный объект — второго порядка. Переход в дискретную модель также приводит к не полностью управляемой системе. В связи с невозможностью синтеза

модального управления для объекта в отклонениях, используем управляющее воздействие для исходного объекта следующего вида:

$$u_2 = k_1 g + k_2 \xi_1 + k_3 \xi_2,$$

где $k_{1,3}$ — коэффициенты, подлежащие определению; $g = v_{2H} = \text{Const}$ по условию для данной системы. В результате подстановки в систему уравнений получим:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \frac{1-2k}{L} \xi_1 \xi_2 + \frac{SE}{L} (1-k) \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = (a_4 + b_2 k_2) \xi_1 + (a_3 + b_2 k_3) \xi_2 + b_2 k_1 g. \end{cases}$$

Сведём систему к уравнению относительно второй координаты:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_2 &= (a_4 + b_2 k_2) \frac{1-2k}{L} \frac{\dot{\xi}_2 - (a_3 + b_2 k_3) \xi_2 - b_2 k_1 g}{a_4 + b_2 k_2} \xi_2 + \\ &+ (a_4 + b_2 k_2) \frac{SE}{L} (1-k) \xi_2 + (a_3 + b_2 k_3) \dot{\xi}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\xi}_2 &= \frac{1-2k}{L} \dot{\xi}_2 \xi_2 - \frac{1-2k}{L} (a_3 + b_2 k_3) \xi_2^2 + \\ &+ \frac{(2k-1)b_2 k_1 g + SE(a_4 + b_2 k_2)(1-k)}{L} \xi_2 + (a_3 + b_2 k_3) \dot{\xi}_2. \end{aligned}$$

Вводя новые обозначения, получим окончательно:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1-2k}{L}, \quad w_2 = -\frac{1-2k}{L} (a_3 + b_2 k_3), \\ w_3 &= \frac{(2k-1)b_2 k_1 g + SE(a_4 + b_2 k_2)(1-k)}{L}, \quad w_4 = (a_3 + b_2 k_3), \\ \ddot{\xi}_2 &= (w_1 \xi_2 + w_4) \dot{\xi}_2 + w_2 \xi_2^2 + w_3 \xi_2. \end{aligned}$$

Получено уравнение Лиенара [61]. Выполнив подстановку $z = \dot{\xi}_2$, получим дифференциальное уравнение первого порядка, известное как уравнение Абеля второго типа [62]:

$$z \frac{dz}{d\xi_2} = (w_1 \xi_2 + w_4)z + w_2 \xi_2^2 + w_3 \xi_2.$$

Приведём его к уравнению Абеля первого типа соответствующей подстановкой:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\varphi}, \quad \frac{dz}{d\xi_2} = -\frac{d\varphi}{d\xi_2} \frac{1}{\varphi^2} \Rightarrow \\ z \frac{dz}{d\xi_2} &= (w_1 \xi_2 + w_4)z + w_2 \xi_2^2 + w_3 \xi_2. \\ \Rightarrow z \frac{dz}{d\xi_2} &= -\frac{d\varphi}{d\xi_2} \frac{1}{\varphi^3} = (w_1 \xi_2 + w_4) \frac{1}{\varphi} + w_2 \xi_2^2 + w_3 \xi_2 \Rightarrow \\ \frac{d\varphi}{d\xi_2} &= -\left(w_2 \xi_2^2 + w_3 \xi_2\right) \varphi^3 - \left(w_1 \xi_2 + w_4\right) \varphi^2. \end{aligned}$$

Один из вариантов поиска аналитических решений подобных уравнений в общем виде базируется на следующем подходе [63]. Для начала выполняется сведение уравнения к канонической форме, а затем преобразование полученного уравнения к уравнению Риккати с условием, накладываемым на решение, в виде кубического уравнения. В данном случае с целью упрощения поступим иначе. Определим $k_3 = -\frac{a_3}{b_2}$, тогда $w_{2,4} = 0$ и исследуемое уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d\varphi}{d\xi_2} = -w_3\varphi^3\xi_2 - w_1\varphi^2\xi_2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi_2} &= -\left(\frac{w_3}{w_1}\varphi^3 + \varphi^2\right)w_1\xi_2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{\frac{w_3}{w_1}\varphi^3 + \varphi^2} = -w_1\xi_2 d\xi_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{d\varphi}{\frac{w_3}{w_1}\varphi^3 + \varphi^2} = -\frac{w_1\xi_2^2}{2} + C_1 \Rightarrow \int \left(\frac{-\frac{w_3}{w_1}}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} + \frac{\left(\frac{w_3}{w_1}\right)^2}{\frac{w_3}{w_1}\varphi + 1} \right) d\varphi = -\frac{w_1\xi_2^2}{2} + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{w_3}{w_1} \ln \varphi - \frac{1}{\varphi} + \frac{w_3}{w_1} \ln \left(\frac{w_3}{w_1} \varphi + 1 \right) = -\frac{w_1\xi_2^2}{2} + C_1. \end{aligned}$$

Выполним дальнейшие преобразования и обратную подстановку:

$$\begin{aligned} -\frac{w_1\xi_2^2}{2} + C_1 &= -\frac{1}{\varphi} + \ln \left(\frac{w_3}{w_1} + \frac{1}{\varphi} \right)^{\frac{w_3}{w_1}} \Rightarrow -\frac{w_1\xi_2^2}{2} + C_1 = -z + \ln \left(\frac{w_3}{w_1} + z \right)^{\frac{w_3}{w_1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z - \frac{w_1\xi_2^2}{2} + C_1 = \ln \left(\frac{w_3}{w_1} + z \right)^{\frac{w_3}{w_1}} \Rightarrow \left(\frac{w_3}{w_1} + z \right)^{\frac{w_3}{w_1}} = e^{z - \frac{w_1\xi_2^2}{2} + C_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (S_1 + z)^{S_1} = e^{z + S_2}, \quad S_1 = \frac{w_3}{w_1}, \quad S_2 = -\frac{w_1\xi_2^2}{2} + C_1. \end{aligned}$$

Это трансцендентное уравнение. Его решение хорошо известно; оно выражается через W-функцию Ламберта [64]:

$$z = -S_1 W_k \left[-\frac{1}{S_1} e^{\frac{S_2 - S_1}{S_1}} \right] - 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выполним ещё одну обратную подстановку и решим полученное автономное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{\xi}_2 = -S_1 W_k \left[-\frac{1}{S_1} e^{\frac{S_2 - S_1}{S_1}} \right] - 1,$$

$$\int \frac{d\xi_2}{1 + \frac{w_3}{w_1} W_k \left[-\frac{w_1}{w_3} e^{\frac{w_1}{w_3} \left(C_1 - \frac{w_1 \xi_2^2}{2} \right) - \frac{w_3}{w_1}} \right]} = -t + C_2.$$

Константу C_1 можно определить из начальных условий. Покажем окончательный ответ и отметим, что ряд преобразований накладывает определённые ограничения на оставшиеся коэффициенты k_1, k_2 :

$$C_1 = \frac{w_3}{w_1} \ln(b_2 k_1 g + 1) + \left(\frac{w_3}{w_1} \right)^2 - b_2 k_1 g - 1;$$

и в результате получаем:

$$\int \frac{d\xi_2}{1 + \frac{w_3}{w_1} W_k \left[a e^{b \xi_2^2} \right]} = -t + C_2,$$

$$a = -\frac{w_1}{w_3} \exp \left[\ln(b_2 k_1 g + 1) - \frac{w_1}{w_3} (b_2 k_1 g + 1) \right], \quad b = -\frac{w_1^2}{2w_3}.$$

В дальнейшем можно, задавшись диапазонами для k_1, k_2 выполнить аппроксимацию W-функции и найти аналитическое решение интеграла.

Рассмотрим такой же по сути вариант решения исходной системы, но руководствоваться будем соображениями по установлению независимости

второго уравнения от первого заданием коэффициента $k_2 = -\frac{a_4}{b_2}$, и проверим

поведение первой координаты при этом:

$$\begin{aligned}\xi_2 &= -\frac{b_2 k_1 g}{a_3 + b_2 k_3} \left(1 - e^{(a_3 + b_2 k_3)t}\right) = f(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\xi}_1 &= \frac{1-2k}{L} \xi_1 f + \frac{SE}{L} (1-k) f \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{L}{1-2k} \ln \left[\frac{1-2k}{L} \xi_1 + \frac{SE}{L} (1-k) \right] &= -\frac{b_2 k_1 g}{a_3 + b_2 k_3} t + \frac{b_2 k_1 g}{(a_3 + b_2 k_3)^2} e^{(a_3 + b_2 k_3)t} + C_2.\end{aligned}$$

Введём для удобства записи переменные $R_1 = b_2 k_1 g$, $R_2 = a_3 + b_2 k_3$, определим константу интегрирования из начальных условий и преобразуем выражение:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= SE \frac{1-k}{1-2k} \exp \left[-\frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2} t + \frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2^2} (e^{R_2 t} - 1) \right] - SE \frac{1-k}{1-2k}, \\ \xi_1 &= F_{\mu} \left(1 - \exp \left[-\frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2} t + \frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2^2} (e^{R_2 t} - 1) \right] \right),\end{aligned}$$

Коэффициентов два, а потому для их однозначного определения также необходимо два уравнения. Поставим условия по длительности переходного процесса. Итак, обозначим искомое время t_p , а отклонение от установившегося значения зададим Δ . Обратим внимание на то, что по классификации переходной процесс по второй координате является монотонным, а единственное решение задачи на поиск точек экстремума по первой координате является нулём, что в свою очередь также позволяет отнести переходной процесс по второй координате к монотонным. В соответствии с этим запишем заданные условия в следующем виде:

$$\begin{cases} \Delta_1 F_H = F_H \left(1 - \exp \left[-\frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2} t_{p1} + \frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2^2} (e^{R_2 t_{p1}} - 1) \right] \right), \\ \Delta_2 v_{2H} = v_{2H} (1 - e^{R_2 t_{p2}}). \end{cases}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \exp \left[-\frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2} t_{p1} + \frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2^2} (e^{R_2 t_{p1}} - 1) \right] = \Delta_1, \\ e^{R_2 t_{p2}} = \Delta_2. \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2} t_{p1} + \frac{1-2k}{L} \frac{R_1}{R_2^2} (e^{R_2 t_{p1}} - 1) = \ln \Delta_1, \\ R_2 t_{p2} = \ln \Delta_2. \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} R_2 = \frac{\ln \Delta_2}{t_{p2}}, \\ R_1 = \frac{L}{1-2k} \frac{R_2^2}{e^{R_2 t_{p1}} - 1 - R_2 t_{p1}} \ln \Delta_1. \end{cases} \end{aligned}$$

В силу того, что переменные R_1 и R_2 независимы по искомым коэффициентам, несложно далее провести расчёты. Проверка по условию установившегося решения показывает, что должно соблюдаться условие $R_1 > 0, R_2 < 0$. В силу того, что $k \approx 1$, очевидно должно выполняться условие $e^{R_2 t_{p1}} > 1 + R_2 t_{p1}$, что выполняется для всех $R_2 t_{p1} \neq 0$. Обратим внимание, что эти выкладки справедливы при условии:

$$v_{2H} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{L}{1-2k} \frac{R_2 \ln \Delta_1}{e^{R_2 t_{p1}} - 1 - R_2 t_{p1}}.$$

Приравняем значения характеристик переходных процессов. Тогда условие переписывается в виде $v_{2н} = -\frac{L}{1-2k t_p} \frac{\ln^2 \Delta}{(\Delta - 1 - \ln \Delta)}$; то есть можно задать или время переходного процесса, или значение области Δ . Построим зависимость $t_p(\Delta)$ при $v_{2н} = 2 \text{ м/с}$ и $F_n = 300 \text{ Н}$ (рисунок 4.10).

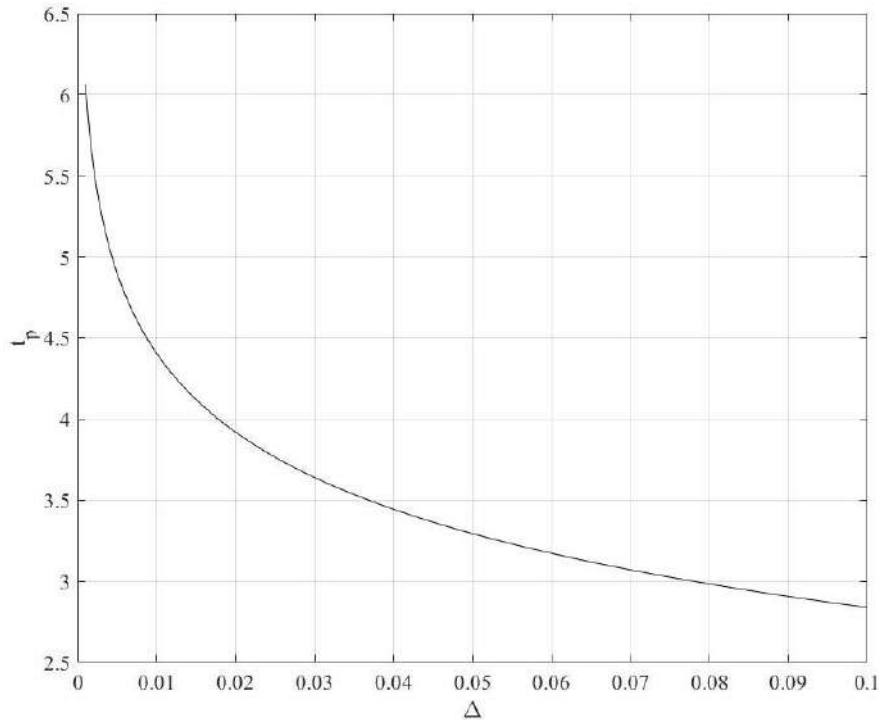


Рисунок 4.10 — Зависимость $t_p(\Delta)$

Задавшись значением области Δ , можно рассчитать время переходного процесса и далее определить коэффициенты управления.

Отметим, что ещё один достаточно любопытный результат получится, если задаться условием $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, $w_4 = 0$; в таком случае уравнение Лиенара упрощается до $\ddot{\xi}_2 = w_1 \xi_2 \dot{\xi}_2$, а соответствующее уравнение Абеля имеет вид $\frac{d\varphi}{d\xi_2} = -w_1 \xi_2 \varphi^2$. Решив его через разделение переменных и проводя обратные замены, получим уравнение Риккати:

$$\dot{\xi}_2 = w_1 \frac{\xi_2^2}{2} + b_2 k_1 g.$$

Выполнив ряд преобразований, можно получить две функции в зависимости от $\text{sign } k_1$, являющиеся решением данного уравнения:

$$\begin{aligned} \xi_{21} &= -\frac{2}{w_1} \frac{C_1 \alpha e^{\alpha t} - C_2 \alpha e^{-\alpha t}}{C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}}, & \xi_{22} &= -\frac{2}{w_1} \frac{-C_1 \alpha \sin \alpha t + C_2 \alpha \cos \alpha t}{C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t}, \\ \text{sign } k_1 &\geq 0, & \text{sign } k_1 &< 0, \end{aligned}$$

$$\alpha = \sqrt{\left| -\frac{1}{2} w_1 b_2 k_1 g \right|} = \sqrt{\left| -\frac{SE(a_4 + b_2 k_2)(1-k)}{2L} \right|},$$

что в сочетании с нулевым начальным условием упрощается до:

$$\xi_{21} = -\frac{2}{w_1} \frac{\alpha (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})}{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}; \quad \xi_{22} = \frac{2}{w_1} \alpha \text{tg} \alpha t.$$

Очевидно, что второй вариант обладает точками разрыва и потому не рассматривается. Несложно заметить, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_2 = -\frac{2\alpha}{w_1} = v_{2n}$, что приводит к однозначному определению коэффициентов связей по координатам в управляющем воздействии, а значит, невозможности варьирования параметрами переходного процесса.

Сравним результаты синтеза алгоритмов управления с проверкой по отработке возмущающих воздействий. Параметры системы (расшифровки переменных были даны ранее):

$$a_1 = -\frac{c_{e2}c_{m2}}{J_{e1}R_2}, \quad a_2 = \frac{r_{e1}^2}{J_{e1}}, \quad a_3 = -\frac{c_{e3}c_{m3}}{J_{e2}R_3}, \quad a_4 = -\frac{r_{e2}^2}{J_{e2}}, \quad b_1 = \frac{c_{m2}r_{e1}}{J_{e1}R_2}, \quad b_2 = \frac{c_{m3}r_{e2}}{J_{e2}R_3}.$$

Зададим номинальную скорость цилиндров намотки равную $v_{2н} = 2 \text{ м/с}$, а номинальную силу натяжения $F_n = 300 \text{ Н}$. Также смоделируем два возмущения по силе натяжения, одно из которых представляет собой имитацию воздействия импульсного характера, а другое является постоянным возмущением. Длительность кратковременного воздействия — порядка десятых долей секунды.

На рисунке 4.11 представлена зависимость ошибки по силе натяжения от времени.

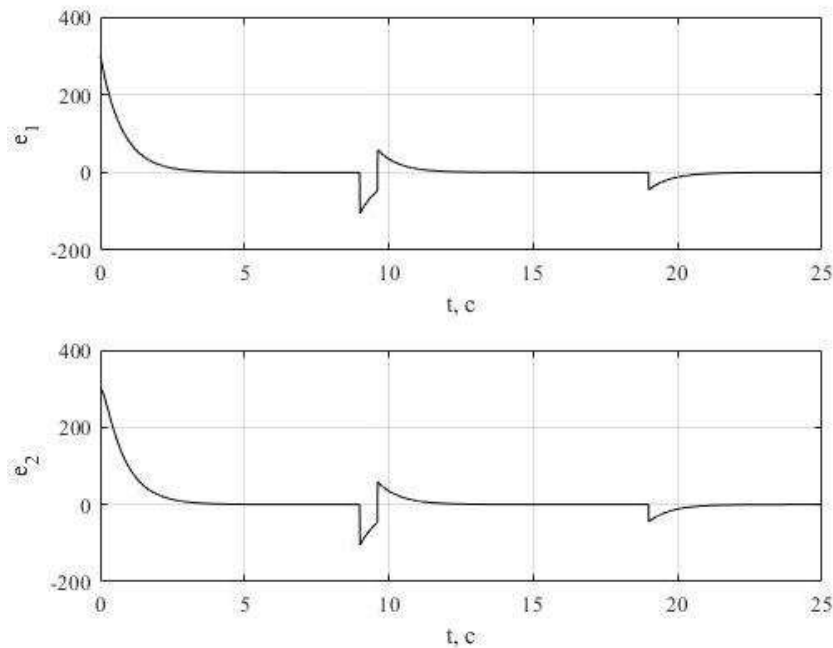


Рисунок 4.11 — Зависимость $e_i(t) = F_n - F_i$

Как видно из рисунка 4.11, оба алгоритма управления в конечном счёте отрабатывают с нулевой ошибкой. Отсутствие какой-либо информации по силе натяжения при расчётах управляющего воздействия в первой системе управления не сказалось каким-либо существенным образом на качестве

управления. Результаты по первой и второй скоростям фактически показали нулевые ошибки.

Отметим, что в случае со второй системой управления рассматривался ОУ в полном составе, а значит, можно рассмотреть ещё один вариант согласования, а именно условие по силе натяжения: $F - F_n = 0$. В таком случае, следуя по шагам синтеза алгоритма согласованного управления, имеем следующие результаты.

Координаты вектора ошибки:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - F_n \\ \dot{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - F_n \\ -\frac{SE}{L}v_1 - \frac{2}{L}v_1F + \frac{1}{L}Fv_2 + \frac{SE}{L}v_2 \end{bmatrix}.$$

Вектор ошибки описывает одномерное многообразие в трёхмерном пространстве состояний ОУ. Находим производную $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{SE}{L} - \frac{2}{L}F & -\frac{2}{L}v_1 + \frac{1}{L}v_2 & \frac{1}{L}F + \frac{SE}{L} \end{bmatrix}.$$

Две координаты ошибки оставляют на выбор только одну координату для вектора продольного движения. В данном случае имеем всего три варианта. Рассмотрим их все и найдём $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right]^T$, обозначив

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = [a \quad b \quad c]:$$

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{array} \right]^T &= \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{SE}{L} - \frac{2}{L}F & -\frac{2}{L}v_1 + \frac{1}{L}v_2 & \frac{1}{L}F + \frac{SE}{L} \\ a & b & c \end{array} \right] = \\
&= - \left[\begin{array}{cc} -\frac{SE}{L} - \frac{2}{L}F & \frac{1}{L}F + \frac{SE}{L} \\ a & c \end{array} \right] = -c \left(-\frac{SE}{L} - \frac{2}{L}F \right) - a \left(\frac{1}{L}F + \frac{SE}{L} \right) = \\
&= (c-a) \frac{SE}{L} + (2c-a) \frac{F}{L}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что по условию обратимости преобразования $a \neq 0$, $c \neq 0$, следовательно, $\xi \neq F$. Выберем $\xi = v_2$ и перепишем ОУ в новых координатах:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = f(\mathbf{e}, \xi, \mathbf{u}), \\ \dot{\xi} = a_3 \xi + a_4 (e_1 + F_n) + b_2 u_2. \end{cases}$$

Приведём сразу конечные результаты. Итак, математическая модель ОУ, описывающего продольное движение:

$$\dot{\xi} = a_3 \xi + b_2 \bar{u}_2 + a_4 F_n.$$

Для него используем сумму номинального и пропорционального ошибки по координате управляющих воздействий, описанную ранее. Матрицы линеаризованного ОУ, описывающего относительное движение:

$$\mathbf{A}(\xi, \bar{u}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = -\frac{1}{L} \left(2F_n (2a_2 - a_4) + (a_1 - a_3) \xi + 2b_1 \bar{u}_1 (\bar{u}_2) - b_2 \bar{u}_2 + SE (a_2 - a_4) \right),$$

$$A_2 = \frac{1}{L(2F_n + SE)} \left(La_1 (2F_n + SE) - SE \xi \right).$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{b_1(2F_n + SE)}{L} & \frac{b_2(F_n + SE)}{L} \end{bmatrix}.$$

Для этого ОУ применим модальное управление, суть которого заключается во введении линейных обратных отрицательных связей по всем координатам вектора состояния [65], то есть $\tilde{\mathbf{v}} = -\mathbf{K}_e \mathbf{e}$, где $\mathbf{K}_e$ — матрица обратных связей. Для замкнутого объекта имеем:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_e) \mathbf{e}.$$

Выбором матрицы $\mathbf{K}_e$ можно влиять на собственные числа матрицы состояния замкнутой системы, то есть на составляющие собственного движения (моды).

Приравняем выражение $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ при подстановке в него матрицы обратной связи $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}$ и транспонированную сопровождающую матрицу многочлена, основанного на желаемых собственных числах $p_{1,2}$, определяющих свойства собственного движения системы:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 - \mathbf{B}(2,1)k_1 - \mathbf{B}(2,2)k_3 & A_2 - \mathbf{B}(2,1)k_2 - \mathbf{B}(2,2)k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_1 p_2 & p_1 + p_2 \end{bmatrix}.$$

Несложно заметить, что данное уравнение относительно коэффициентов матрицы обратной связи имеет бесконечное количество решений. Составляющие управляющих воздействий рассчитываются по формулам $\tilde{v}_1 = k_1 e_1 + k_2 e_2$, $\tilde{v}_2 = k_3 e_1 + k_4 e_2$. Рассмотрим различные варианты сочетаний по коэффициентам. Если обнулить часть из них, получим:

$$\begin{array}{ll} k_{1,2} = 0; & \tilde{v}_1 = 0, \quad \tilde{v}_2 = k_3 e_1 + k_4 e_2; \\ k_{1,4} = 0; & \tilde{v}_1 = k_2 e_2, \quad \tilde{v}_2 = k_3 e_1; \end{array} \quad \begin{array}{ll} k_{2,3} = 0; & \tilde{v}_1 = k_1 e_1, \quad \tilde{v}_2 = k_4 e_2; \\ k_{3,4} = 0; & \tilde{v}_1 = k_1 e_1 + k_2 e_2, \quad \tilde{v}_2 = 0. \end{array}$$

Кроме того, разумеется, остаются варианты и при отсутствии нулевых коэффициентов, и когда только один коэффициент нулевой.

Добавочное управляющее воздействие для первого привода имеет вид:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{b_1} \left(k(a_3 - a_1) \xi + (a_4 k - a_2) F_n + k b_2 \bar{u}_2 \right).$$

Исследуем ещё один вариант по условию функционирования системы, а именно по силе натяжения и соотношению скоростей, то есть объединим предыдущие результаты. Очевидно, уравнение согласования будет описывать одномерное многообразие:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - F_n \\ v_1 - k v_2 \end{bmatrix}.$$

Следуя тем же шагам, определим производную $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$ и затем рассмотрим выбор координат вектора продольного движения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -k \\ a & b & c \end{vmatrix} = -(c + ak).$$

Выберем для ОУ продольного движения $\xi = v_2$ и перепишем математическую модель в новых переменных:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\frac{SE}{L}(e_2 + k\xi) - \frac{2}{L}(e_2 + k\xi)(e_1 + F_h) + \frac{1}{L}(e_1 + F_h)\xi + \frac{SE}{L}\xi, \\ \dot{e}_2 = a_1(e_2 + k\xi) + a_2(e_1 + F_h) + b_1u_1 - ka_3\xi - ka_4(e_1 + F_h) - kb_2u_2, \\ \dot{\xi} = a_3\xi + a_4(e_1 + F_h) + b_2u_2. \end{cases}$$

Найдём $\bar{u}_1$:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{SE}{L}k\xi - \frac{2}{L}k\xi F_h + \frac{1}{L}F_h\xi + \frac{SE}{L}\xi, \\ 0 = a_1k\xi + a_2F_h + b_1\bar{u}_1 - ka_3\xi - ka_4F_h - kb_2\bar{u}_2. \end{cases}$$

Первое уравнение фактически устанавливает определённое значение коэффициента отношений скоростей, которое уже было найдено ранее. Второе уравнение даёт следующее решение:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{b_1} \left(F_h (ka_4 - a_2) + k(a_3 - a_1)\xi + kb_2\bar{u}_2 \right).$$

Объект управления, описывающий относительное движение по многообразию, является нелинейным относительно координат ошибки. Выполним линеаризацию и рассчитаем матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\xi(2k-1)}{L} & -\frac{2F_n + SE}{L} \\ a_2 - ka_4 & a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & -kb_2 \end{bmatrix}.$$

Зная, что собственные числа подобных матриц равны, можно построить матрицу с заданными собственными числами и определёнными коэффициентами. В данном случае первая строка матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ останется такой же, что и у матрицы состояния, а значит:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\frac{\xi(2k-1)}{L} & -\frac{2F_n + SE}{L} \\ a_2 - ka_4 - b_1k_1 + kb_2k_3 & a_1 - b_1k_2 + kb_2k_4 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\frac{\xi(2k-1)}{L} & -\frac{2F_n + SE}{L} \\ \frac{(Lp_1 - \xi + 2k\xi)(Lp_2 - \xi + 2k\xi)}{L(2F_n + SE)} & p_1 + p_2 + \frac{\xi(2k-1)}{L} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, возникает аналогичная с предыдущей ситуация по варьированию коэффициентов и так же, как и в предыдущем случае, используя определённые сочетания, можно добиться изменения некоторых параметров переходных процессов.

Сравним результаты моделирования трёх систем управления, в основе которых лежит концепция согласованного управления. В первой системе используется условие по соотношению скоростей и не принимается во внимание дифференциальное уравнение силы натяжения. Во второй и третьей системах используется полная математическая модель; условием для второй системы является задание по силе натяжения, а в третьей системе к нему добавляется требование по соотношению скоростей. Учтём возмущение по переменным и рассмотрим два варианта задающего воздействия, а именно: постоянное и линейно возрастающее.

На рисунке 4.12 представлена зависимость ошибки по силе натяжения от времени. Задающее воздействие является константой, возмущение по силе натяжения.

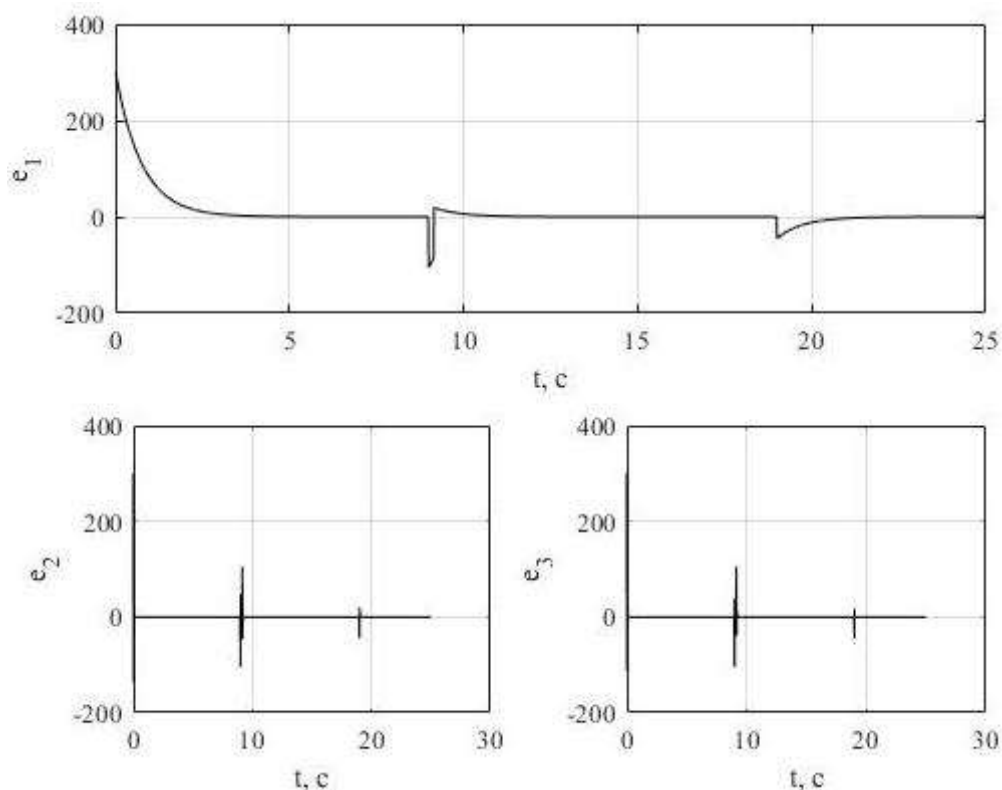


Рисунок 4.12 — Зависимость $e_i(t) = F_n - F_i$ при постоянном задающем воздействии

Как видно, при равных условиях по желаемым собственным числам, от которых зависит длительность переходного процесса, в целом качество переходных процессов, как и ожидалось, значительно уступает аналогичным показателям в системах управления, где было учтено уравнение силы натяжения. Более наглядно это заметно при линейном задающем воздействии (рисунок 4.13).

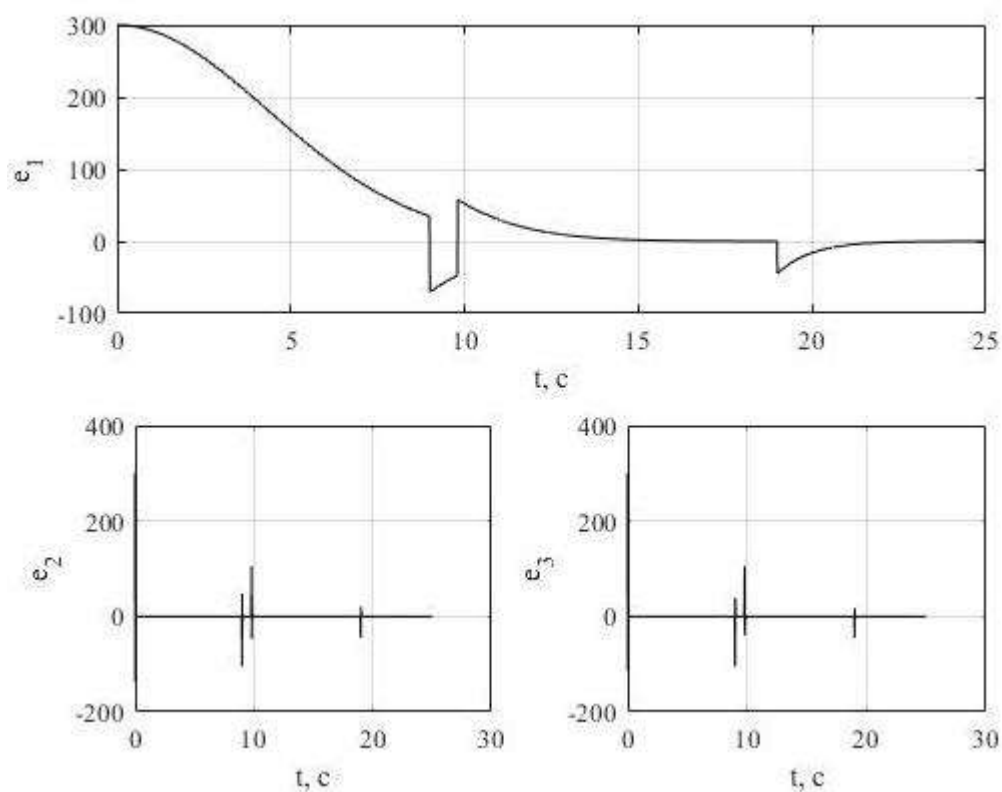


Рисунок 4.13 — Зависимость $e_i(t) = F_n - F_i$ при линейном задающем воздействии

Отметим, что задание по скоростям при этом отрабатываются с практически нулевой ошибкой для первой системы.

4.6 Согласованное управление в подсистемах

Применим алгоритм согласованного управления к подсистемам (4.32-4.34). Для первого объекта (4.33) выберем условие вида:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} x_5 - x_{5n} \\ \zeta \end{bmatrix},$$

где ζ — некая функция, обеспечивающая полную управляемость вектора ошибки. Как было показано в конце пункта 4.4, это может быть либо условие по производной от силы натяжения полотна материала на участке по времени или условие по скоростям на границах полотна. В любом случае, после

разделения этой подсистемы на объекты, описывающие относительное и продольное движения, и выбора ведущего привода для объекта продольного движения после обратной замены переменных, получим следующее (приведено уравнения только привода):

$$\dot{x}_8 = r_3 x_8 + r_4 \tilde{u}_{2н} + r_2 x_{5н} - r_2 x_{6н}. \quad (4.37)$$

Аналогично поступим с участком намотки (4.34), но ведущим выберем привод цилиндров намотки:

$$\dot{x}_9 = r_6 x_9 + r_7 \tilde{u}_{3н} + r_5 x_{6н} - r_5 x_{7н}. \quad (4.38)$$

На участке контроля (4.32) в результате получено следующее уравнение, если ведущим взять тот же привод цилиндров намотки:

$$\dot{x}_9 = r_6 x_9 + r_7 \tilde{u}_{3н} + r_5 x_{6н} - r_5 x_{7н}. \quad (4.39)$$

Как можно заметить, уравнения (4.38) и (4.39) не отличаются, это фактически означает возможность рассматривать задачу управления участками контроля и участком намотки посредством управления приводом цилиндров намотки. В силу того, что на участке контроля соответствующее уравнение (4.17) по сути определяет составляющую управляющего воздействия привода цилиндров размотки как функцию аналогичной составляющей привода цилиндров намотки, то есть $\tilde{u}_{2н} = \tilde{u}_{2н}(\tilde{u}_{3н})$, а в подсистеме узла размотки $\tilde{u}_{1н} = \tilde{u}_{1н}(\tilde{u}_{2н})$, то в первую очередь именно привод цилиндров намотки будет определять работу всей машины (таблица 4.1, рисунок 4.14).

Таблица 4.1. Ведущий и ведомый приводы в подсистемах

	Намотка	Контроль	Размотка
Ведущий	$\tilde{u}_{3н}$	$\tilde{u}_{3н}$	$\tilde{u}_{2н}$
Ведомый	$\tilde{u}_{4н}$	$\tilde{u}_{2н}$	$\tilde{u}_{1н}$



Рисунок 4.14 — Иерархия подсистем

Вопрос выбора функции ζ решается достаточно просто для узлов размотки и намотки. В силу записи уравнений динамики приводов рулонов относительно их углов поворота, и принимая во внимание непостоянство радиусов рулонов, а значит, некоторое усложнение записи условия в виде соотношения по скоростям точек на границах участка полотна материала, выберем второй координатой векторов ошибки производную по времени первой координаты. Поставим такое же условие и для участка контроля. В результате получим следующее:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} x_5 - x_{5н} \\ \dot{x}_5 - \dot{x}_{5н} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} x_6 - x_{6н} \\ \dot{x}_6 - \dot{x}_{6н} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} x_7 - x_{7н} \\ \dot{x}_7 - \dot{x}_{7н} \end{bmatrix}.$$

Для первой подсистемы математические модели, описывающие движение, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{11} \\ \dot{e}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{21} \\ \psi_1(\mathbf{e}_1, \xi_1, \mathbf{u}_1) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{11} \\ \dot{\xi}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q_8 x_{5H} + SE}{q_6 + q_7 x_{5H}} \xi_{21} \\ r_3 \xi_{21} + r_4 \tilde{u}_{2H} + r_2 x_{5H} - r_2 x_{6H} \end{bmatrix}.$$

Имеем такую же ситуацию с независимостью второго уравнения от первого. Как уже ранее было сказано, $\tilde{u}_{2H} = \tilde{u}_{2H}(\tilde{u}_{3H})$, а значит, объект, описывающий продольное движение, целиком и полностью управляется со стороны узла контроля. С учётом уравнения (4.17) для данной подсистемы, окончательно получим следующее:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \Psi_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{q}, \xi_1, \tilde{\mathbf{v}}_1) \quad (4.40)$$

Аналогично поступим с третьей подсистемой. А во второй условие оставим без изменений. Результаты:

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{A}_2(\mathbf{r}, \xi, \tilde{u}_{3H}) \mathbf{e}_2 + \mathbf{B}_2 \tilde{\mathbf{v}}_2, \quad (4.41)$$

$$\dot{\xi}_2 = r_6 \xi_2 + r_7 \tilde{u}_{3H} + r_5 x_{6H} - r_5 x_{7H}, \quad (4.42)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \Psi_2(\mathbf{e}_3, \mathbf{w}, \xi_2, \tilde{\mathbf{v}}_3) \quad (4.43)$$

Для объектов (4.40), (4.41) и (4.43) необходимо синтезировать управление $\tilde{\mathbf{v}}$, обеспечивающее $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$.

Как уже было сказано (см. 4.1), существует несколько методов получения законов управления в разностном виде. Объекты, описывающие относительное движение по многообразию, являются линейными вследствие применения линеаризации, а ОУ (4.42), описывающий продольное движение по многообразию, является линейным изначально. В силу этого, для дальнейшего синтеза алгоритма управления, будем рассматривать соответствующие дискретные модели указанных объектов. Для

линеаризованных ОУ на основе (4.40), (4.41) и (4.43) данный переход базируется на предположении, что коэффициенты матриц моделей будут практически постоянными в пределах одного интервала квантования.

4.7 Алгоритм грубого управления вынужденным движением

Задающее воздействие для объекта (4.42) является желаемой функцией скорости. В соответствии с этим задающим воздействием получим $g = x_{9n}$. Будем считать, что номинальный вид КСР и КСТ можно представить в виде решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и ненулевыми начальными условиями.

Воспользуемся для управления объектом (4.42) алгоритмом грубого управления вынужденным движением [66]. Приведём основные соотношения. Итак, пусть имеется разностная модель ОУ в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{m+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_m + \mathbf{B}\mathbf{u}_m, \\ y_m &= \mathbf{C}\mathbf{x}_m. \end{aligned}$$

а модель внешнего воздействия:

$$\begin{aligned} \zeta_{m+1} &= \mathbf{G}\zeta_m, \\ g_m &= \mathbf{H}\zeta_m. \end{aligned}$$

Алгоритм дискретного регулятора спроектируем таким образом, чтобы контроллер реализовывал модель внешнего воздействия, возбуждаемую ошибкой системы:

$$\mathbf{z}_{m+1} = \mathbf{G}\mathbf{z}_m + \mathbf{L}\varepsilon_m,$$

где ε_m — ошибка, $\mathbf{L}$ — матрица входа ошибки, выбираемая из условия управляемости пары $(\mathbf{G}, \mathbf{L})$, $\mathbf{z}_m$ — вектор состояния этой модели. С учётом того, что $\varepsilon_m = g_m - y_m = \mathbf{H}\mathbf{z}_m - \mathbf{C}\mathbf{x}_m$, объединим обе модели:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{m+1} \\ \mathbf{z}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{LC} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{z}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{u}_m + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} g_m. \quad (4.44)$$

Если пара $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ полностью управляема и пара $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ наблюдаема, то при выполнении условия управляемости пары $(\mathbf{G}, \mathbf{L})$, пара $\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{LC} & \mathbf{G} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \right)$ будет полностью управляема. Для объекта (4.44) построим регулятор собственного движения. Используем для этого модальное управление, то есть введём линейные обратные отрицательные связи по всем координатам вектора переменных. Тем самым можно влиять на составляющие собственного движения системы (моды):

$$\mathbf{u}_m = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{z}_m \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_m - \mathbf{K}_2 \mathbf{z}_m. \quad (4.45)$$

Объединим (4.44) и (4.45), исключив промежуточную переменную $\mathbf{u}_m$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{m+1} \\ \mathbf{z}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 & -\mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{LC} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{z}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} g_m. \quad (4.46)$$

Матрица обратной связи $\mathbf{K}$ рассчитывается исходя из желаемого расположения собственных чисел матрицы состояния объекта (4.46). Отметим, что алгоритм грубого управления вынужденным движением допускает некоторое отклонение параметров системы от принятых значений

при расчётах. Установившееся вынужденное движение является линейным преобразованием вектора ζ_m , то есть $x_m^B = M_1 \zeta_m$, $z_m^B = M_2 \zeta_m$. Подставим это выражение в (4.46), принимая во внимание модель внешнего воздействия:

$$\begin{bmatrix} M_1 G \\ M_2 G \end{bmatrix} \zeta_m = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ -LC & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \zeta_m + \begin{bmatrix} O \\ L \end{bmatrix} H \zeta_m.$$

Это уравнение должно быть справедливо при любом ζ_m , то есть должны быть справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} M_1 G - (A - BK_1) M_1 &= -BK_2 M_2, \\ M_2 G - G M_2 &= L(H - C M_1). \end{aligned}$$

В силу того, что матрица M_2 обязательно существует, а матрица L выбирается произвольным образом, имеем условие из второго уравнения, согласно которому $H - C M_1 = O$. Преобразовав выражение ошибки, получим $\varepsilon_m = (H - C M_1) \zeta_m$, то есть ноль. Заметим, что условие $H - C M_1 = O$ не зависит от конкретного вида матриц A, B и автоматически устанавливается для любой матрицы выхода объекта управления C в силу изменения матрицы M_1 . Иными словами, при обеспечении устойчивости системы (4.46) получим нулевую ошибку в системе. Данное обстоятельство достаточно важно в контексте того, что часть переменных системы (4.8) не определяется абсолютно точно.

Приведённый алгоритм управления можно использовать и для линеаризованных ОУ (4.40) и (4.43). При этом отметим, что непосредственно измерению доступны только показания сил натяжения полотна. Вторые координаты векторов переменных, описывающих относительное движение по

многообразию, неизвестны. Для оценки переменных состояния используем наблюдающие устройства — наблюдатели.

4.8 Наблюдатели

Для ОУ (4.41) используем наблюдатель пониженного порядка — редуцированный наблюдатель Люэнбергера [66]. Уравнение наблюдателя запишем как:

$$\begin{aligned}\psi_{2m+1} &= A_{2nd}\psi_{2m} + \mathbf{B}_{2nd}\tilde{\mathbf{v}}_{2m} + R_{2nd}e_{21m}, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{2m} &= \mathbf{N}_{12}e_{21m} + \mathbf{N}_{22}\psi_{2m} - \mathbf{K}_{22}\mathbf{z}_{2m},\end{aligned}$$

где $\psi_{2m} = \hat{x}_6$ — оценка производной силы натяжения полотна, что при задании номинального значения постоянной величиной в соответствии с условием согласования равносильно оценке производной ошибки по силе натяжения, $A_{2nd}, \mathbf{B}_{2nd}, R_{2nd}$ — матрицы наблюдателя в дискретном виде, рассчитываемые в соответствии с методикой синтеза, e_{21m} — первая координата вектора переменных ОУ (4.41) — ошибка по силе натяжения, $\mathbf{K}_{22}$ — часть матрицы обратной связи по координатам $\mathbf{z}_{2m}$.

Моделирование системы с аналогичными наблюдателями для линеаризованных ОУ (4.40) и (4.43) и матрицами состояния $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_k & 1 \end{bmatrix}$, где T_k — интервал квантования, показало, что оценка производной происходит с недостаточной точностью. Альтернативой этому может быть вариант использованию другого типа наблюдателя. Используем наблюдатель со скользящим режимом и приведём основные соотношения [67,68]. Пусть математическая модель ОУ записана в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ y &= h(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Используем диффеоморфизм $\kappa_1 = h$, $\kappa_{i+1} = L_f^i h$, $i = \overline{1, n-1}$, где $L_f^i h$ — соответствующие производные Ли. В таком случае получим ММ ОУ в «треугольной» форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{\kappa}_1 \\ \dot{\kappa}_2 \\ \vdots \\ \dot{\kappa}_{n-1} \\ \dot{\kappa}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_2 + \bar{g}_1(\kappa_1, u) \\ \kappa_3 + \bar{g}_2(\kappa_1, \kappa_2, u) \\ \vdots \\ \kappa_n + \bar{g}_{n-1}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}, u) \\ \bar{f}_n(\mathbf{\kappa}) + \bar{g}_n(\mathbf{\kappa}, u) \end{bmatrix}.$$

Наблюдатель со скользящим режимом для этого ОУ синтезируется в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\kappa}}_1 \\ \dot{\hat{\kappa}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{\kappa}}_{n-1} \\ \dot{\hat{\kappa}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_2 + \bar{g}_1(\kappa_1, u) \\ \hat{\kappa}_3 + \bar{g}_2(\kappa_1, \tilde{\kappa}_2, u) \\ \vdots \\ \hat{\kappa}_n + \bar{g}_{n-1}(\kappa_1, \tilde{\kappa}_2, \dots, \tilde{\kappa}_{n-1}, u) \\ \bar{f}_n(\kappa_1, \tilde{\kappa}_2, \dots, \tilde{\kappa}_n) + \bar{g}_n(\kappa_1, \tilde{\kappa}_2, \dots, \tilde{\kappa}_n, u) \end{bmatrix} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{sign}_i \begin{bmatrix} \kappa_1 - \hat{\kappa}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\kappa}_{n-1} - \hat{\kappa}_{n-2} \\ \tilde{\kappa}_n - \hat{\kappa}_n \end{bmatrix},$$

где $\tilde{\kappa}_2 = \hat{\kappa}_2 + \lambda_1 \text{sign}_1(\kappa_1 - \hat{\kappa}_1)$, $\tilde{\kappa}_{i+2} = \hat{\kappa}_{i+2} + \lambda_{i+1} \text{sign}_{i+1}(\tilde{\kappa}_{i+1} - \hat{\kappa}_{i+1})$, $i = \overline{1, n-2}$.

Функция $\text{sign}_{i+1}(\dots)$ представляется обычной функцией знака с фильтром нижних частот. Кроме того, возможно её альтернативное представление, например, в виде сигмоид [69].

4.9 Моделирование системы управления. Преобразование алгоритма управления

4.9.1 Спектральный анализ колебаний

Выполним моделирование системы (4.8) с синтезированным алгоритмом управления для подсистем (4.32-4.34), полученных в результате декомпозиции, на основе метода согласованного управления с уравнением согласования в общем виде $\Phi \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{F}_n \\ \dot{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}$ и алгоритмом грубого управления вынужденным движением для линеаризованных ОУ (4.40), (4.41) и (4.43). Оценка переменных производится с помощью наблюдателей пониженного порядка. Схемы моделирования приведены в приложении А. Для приводов выбраны бесконтактные двигатели постоянного тока [70].

На рисунках 4.15-4.17 показаны графики ошибок по силам натяжения, определяемые как $\Delta F_i = F_{ni} - F_i$, $i=1,3,5$.

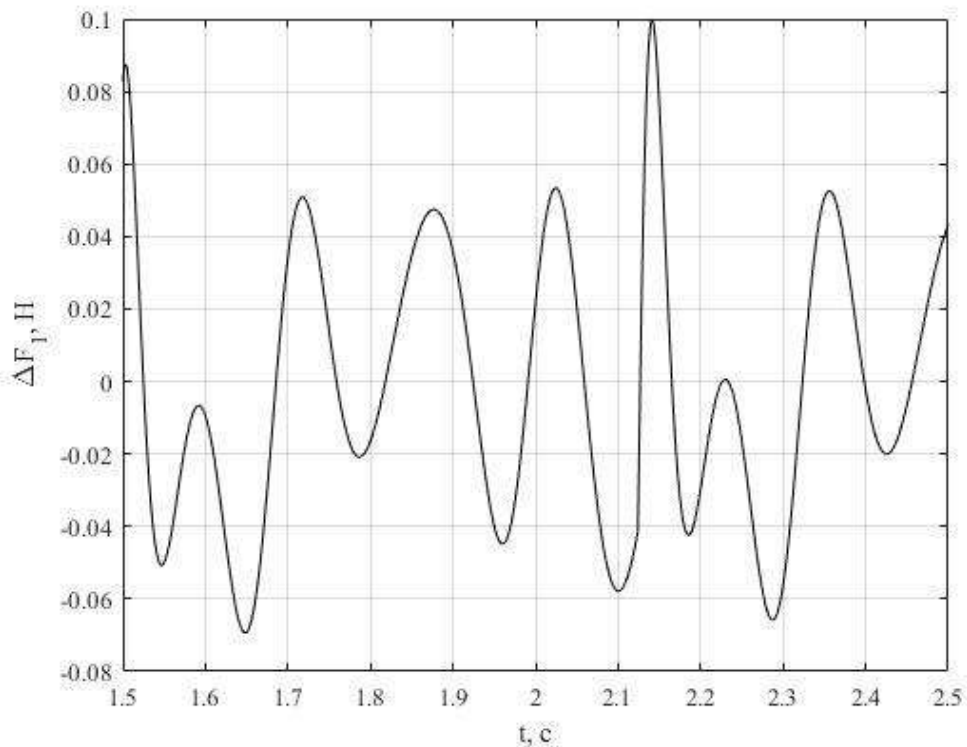
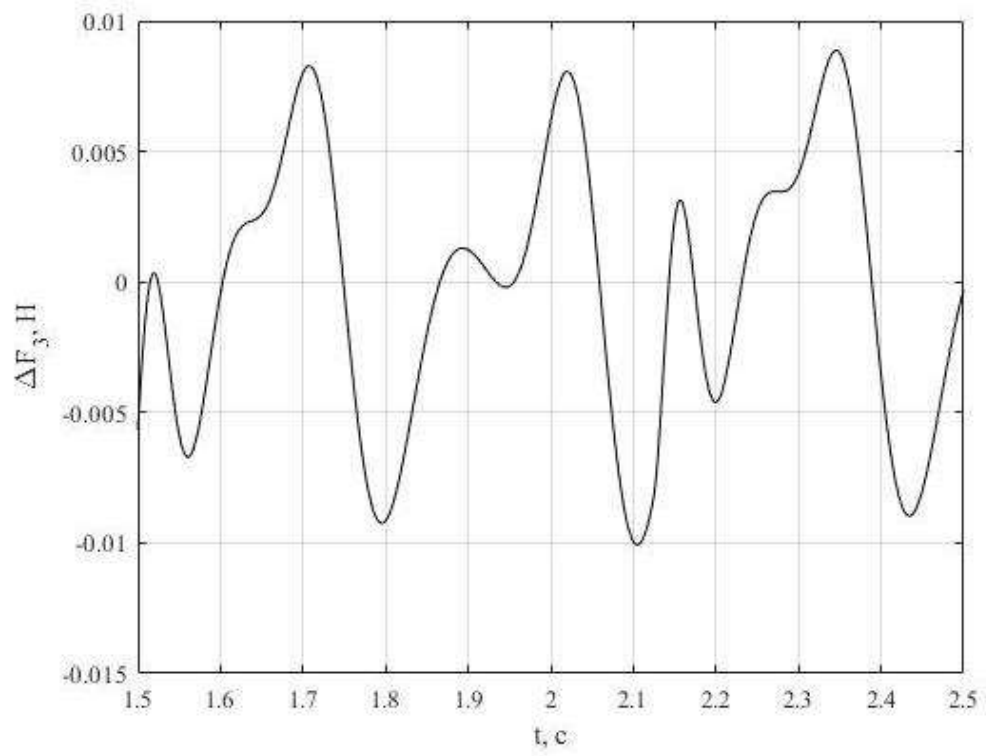
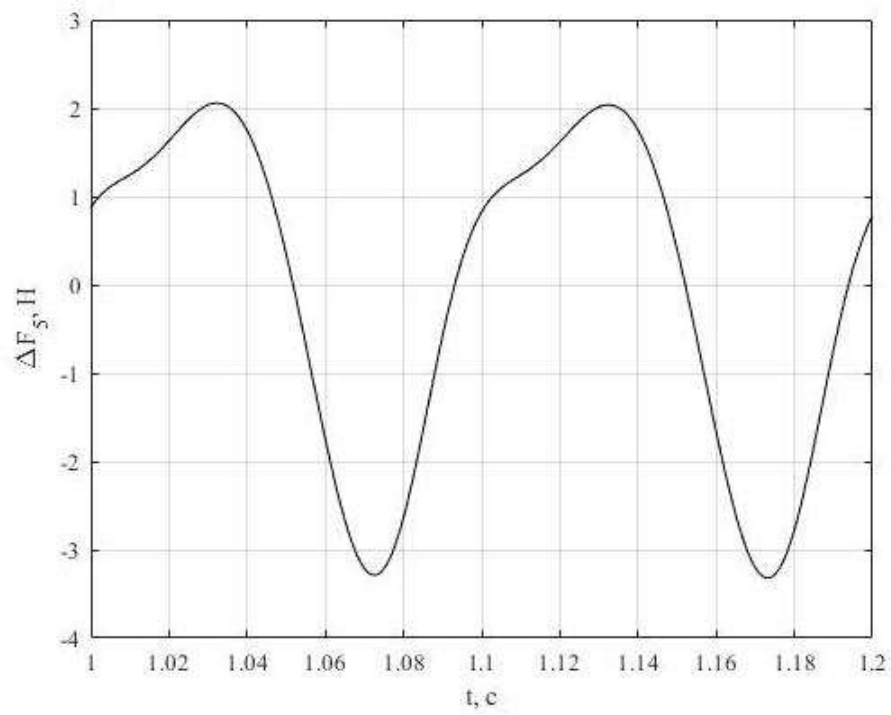


Рисунок 4.15 — График $\Delta F_1(t)$

Рисунок 4.16 — График $\Delta F_3(t)$ Рисунок 4.17 — График $\Delta F_5(t)$

Как видно из рисунка 4.15, ошибка по силе натяжения на участке размотки достаточно мала, что может объясняться в том числе достаточно большими размерами рулона размотки. Наибольшая ошибка по силе натяжения возникает на участке намотки (рисунок 4.17). Возникающие колебания по силам натяжения на участках размотки и намотки инициируют также колебания и на участке контроля (рисунок 4.16).

Выполним исследование полученных результатов. В силу изменения параметров колебаний, для частотного анализа воспользуемся кратковременным преобразованием Фурье (КПФ — **STFT**) [71,72] и построим спектрограмму [73]. Как известно, преобразование Фурье подвержено принципу неопределённости, согласно которому невозможно получить одновременно хорошее разрешение по частоте и по времени. Анализу подвергается часть сигнала, принадлежащего определённому временному интервалу с вычтенной полиномиально-аппроксимированной составляющей. Интервал квантования $T_k = 0.001\text{ с}$; частота дискретизации, следовательно, 1 кГц . Количество рассчитываемых временных интервалов k_t в зависимости от длины исследуемого сигнала N_t , ширины оконной функции N и процента перекрытия p выражается следующей формулой:

$$k_t = \frac{N_t - Np/100}{N - Np/100}.$$

Ширину оконной функции можно выбрать, зная минимальное разрешение по частоте df , частоту дискретизации F_s и нормированную ширину главного лепестка АЧХ оконной функции по нулевому уровню F_0 [73]:

$$N > F_0 \frac{F_s}{df}.$$

На рисунках 4.18-4.19 показаны примеры поверхностей k_t и $\log_2 N$ для $N_t = 58000$ точек.

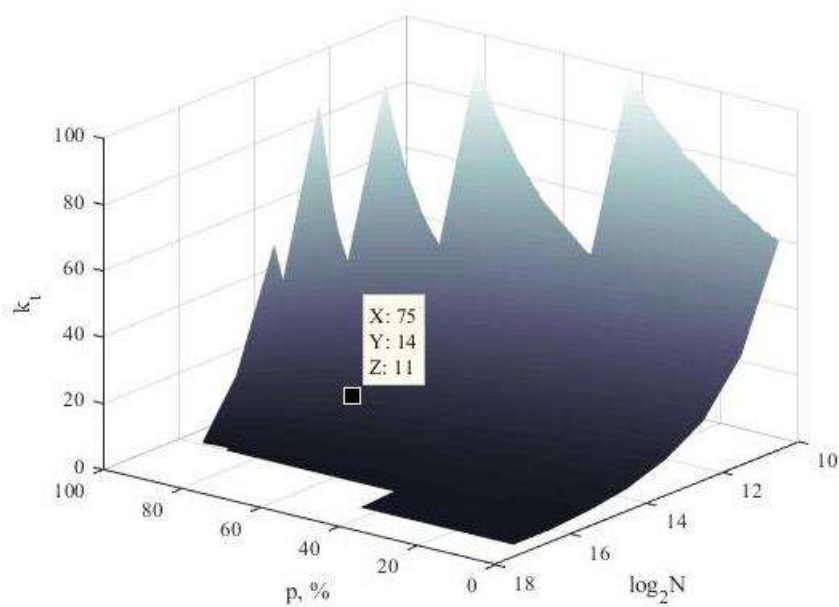


Рисунок 4.18 — Поверхность k_t

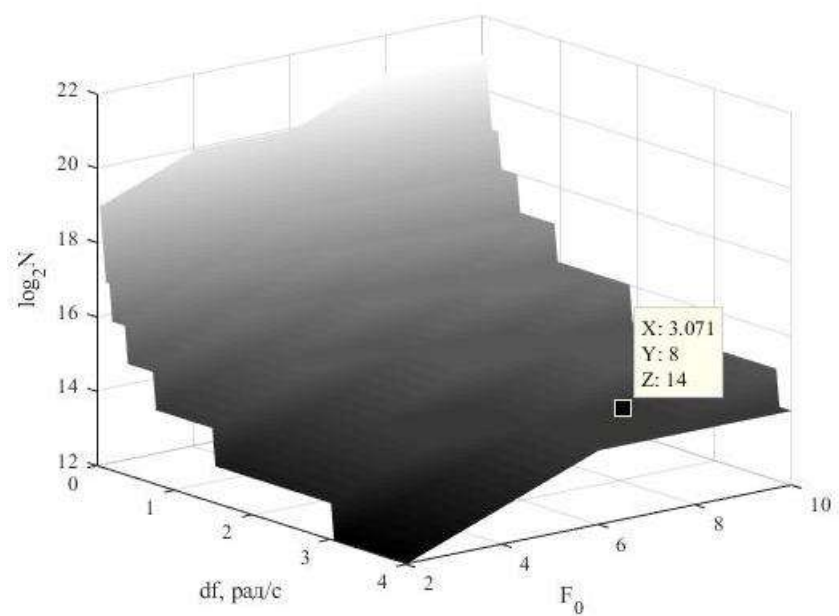


Рисунок 4.19 — Поверхность $\log_2 N$

Итак, применим КПФ к найденной зависимости $\Delta F_5(t)$ и построим спектрограмму (рисунок 4.20). Параметры: оконная функция Чебышева (100 dB), ширина окна 2^{14} точек, процент перекрытия $p = 75\%$.

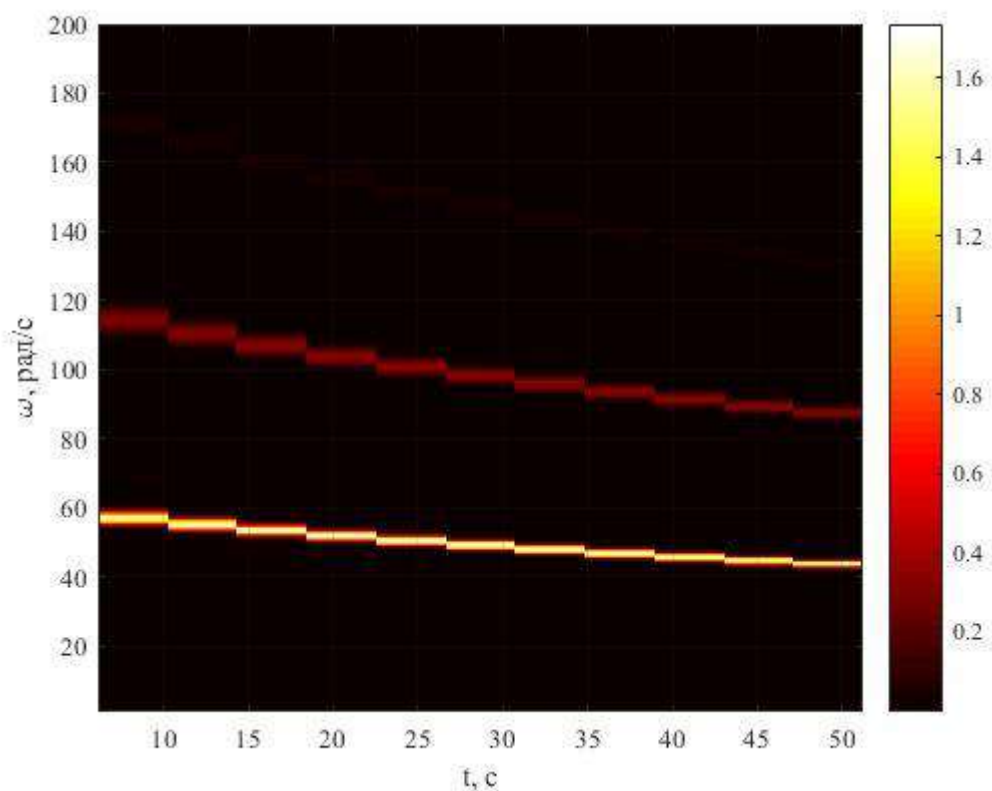


Рисунок 4.20 — Спектрограмма $\text{STFT}\{\Delta F_5\}(t, \omega)$

Можно выделить две частотных составляющих (рисунок 4.20), меняющиеся нелинейно. Построим распределение первых трёхсот наибольших амплитуд в зависимости от частот (рисунок 4.21).

По полученным результатам видно, что наибольший вклад приносят гармоники с частотами, лежащими в диапазонах $\omega \in (40, 60) \cup (85, 120)$, rad/s . Построим аналогичные спектрограммы и распределения для $\Delta F_1(t)$ и $\Delta F_3(t)$ (рисунки 4.22-4.25).

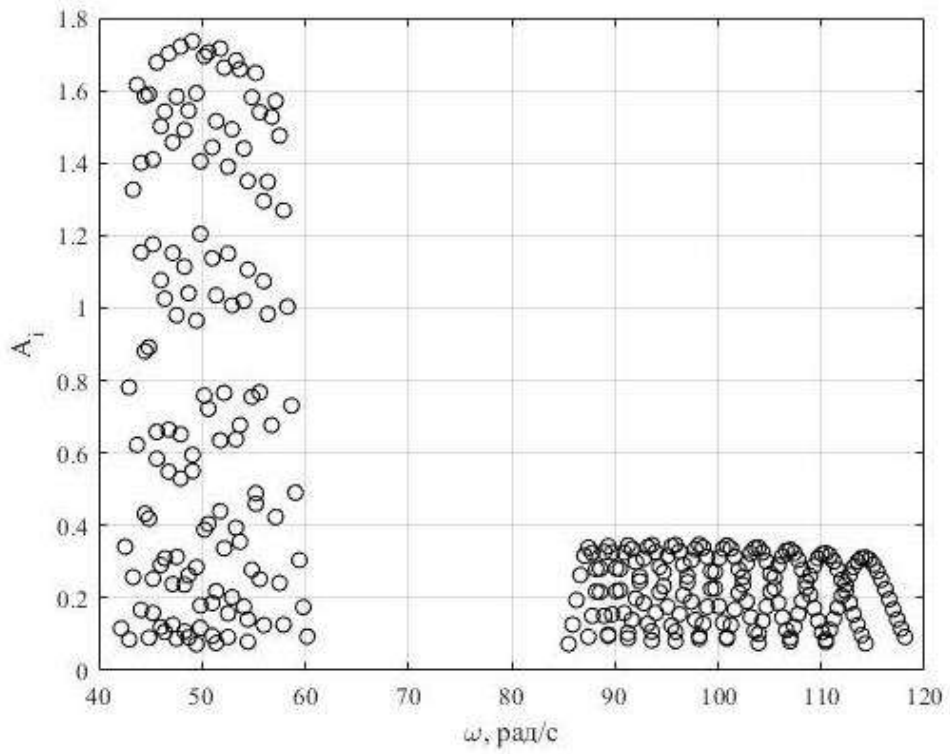


Рисунок 4.21 — Зависимость $A_i \{\Delta F_5\}(\omega_i)$, $i = \overline{1, 300}$

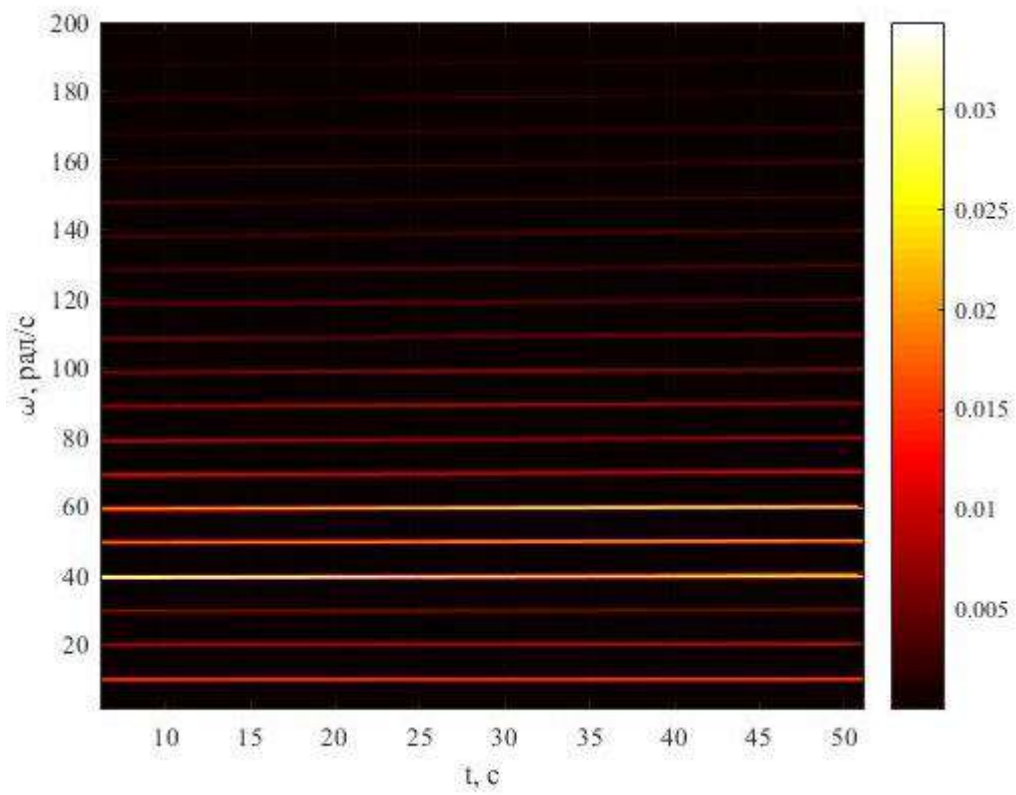


Рисунок 4.22 — Спектрограмма $\text{STFT}\{\Delta F_1\}(t, \omega)$

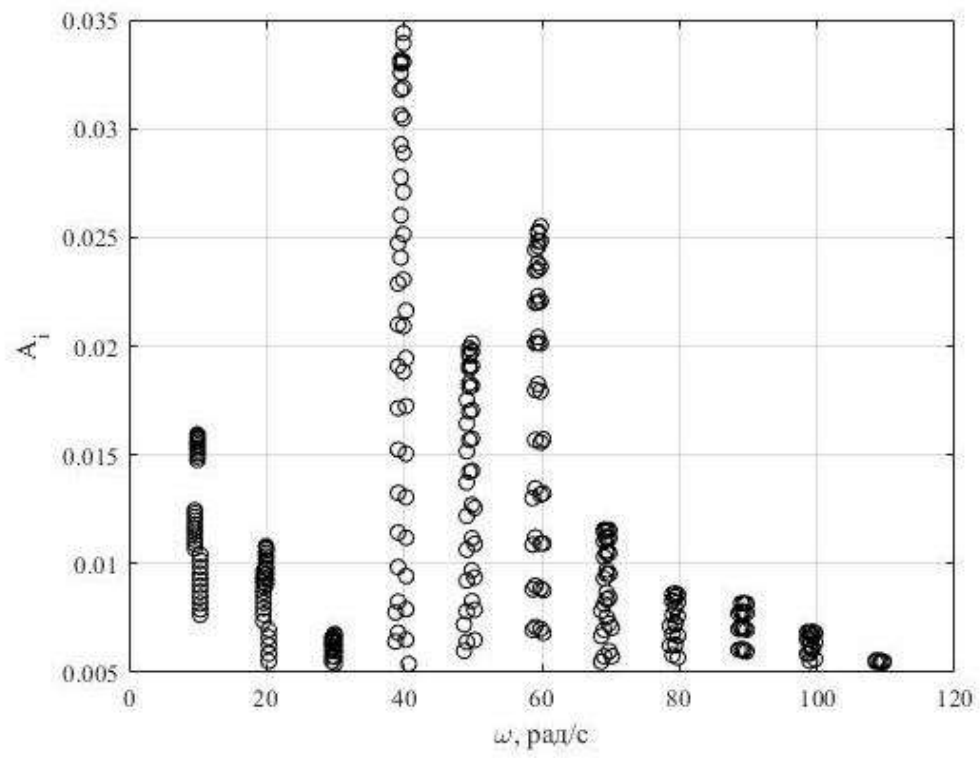


Рисунок 4.23 — Зависимость $A_i \{\Delta F_1\}(\omega_i)$, $i = \overline{1, 300}$

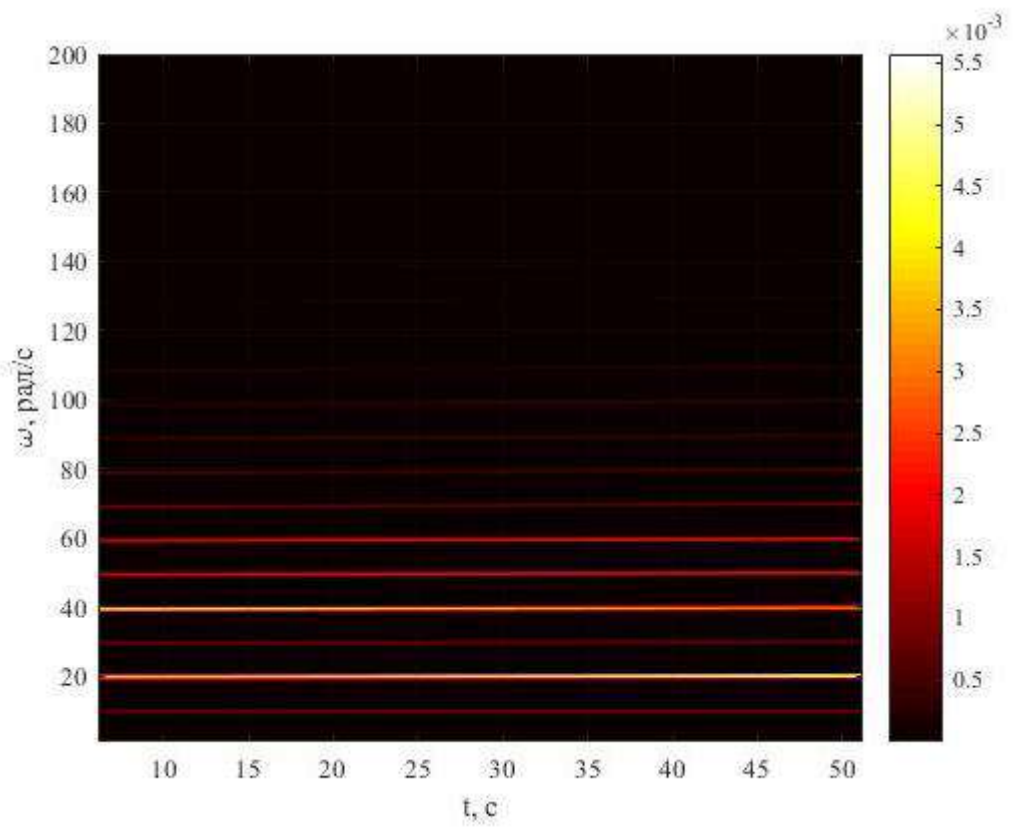


Рисунок 4.24 — Спектрограмма $\text{STFT}\{\Delta F_3\}(t, \omega)$

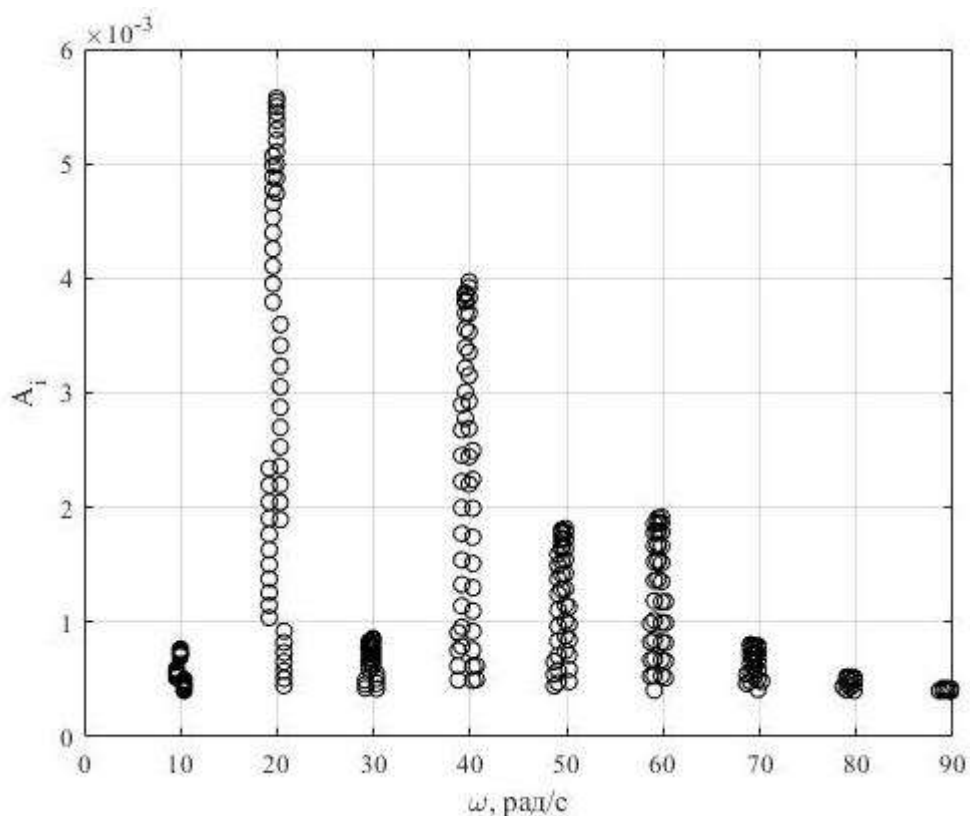


Рисунок 4.25 — Зависимость $A_i \{\Delta F_3\}(\omega_i)$, $i = \overline{1, 300}$

На рисунках 4.22-4.23 видно, что значимых по амплитуде гармоник значительно больше двух, при этом сами колебательные составляющие имеют практически не изменяющиеся в рассматриваемом временном интервале частоты. Это по-прежнему связано со значительно большими размерами и прочими следствиями из этого факта рулона размотки в сравнении с рулоном намотки. Аналогичную картину видно на рисунках 4.24-4.25. Можно предположить, что ближе к концу процесса перемотки ситуация станет диаметрально противоположной. Достаточно интересно, что, условно говоря, источников колебаний в рулоне размотки два, а именно: эксцентриситеты оси вращения и эллипса (см. гл. 3). Но для рулона намотки, руководствуясь соображениями об идеальности втулки, был задан только эксцентриситет оси вращения. Несмотря на это, частотных составляющих в ошибке силы натяжения полотна на участке намотки две (рисунок 4.20). Отметим также, что

частоты гармоник на рисунках 4.23 и 4.25 кратны некоторому определённом значению.

4.9.2 Расчёт матрицы состояния модели внешнего воздействия

Как уже было сказано, ошибка $\Delta F_5(t)$ является наибольшей среди трёх ошибок по силам натяжения по абсолютному значению и, судя по результатам на рисунках 4.20-4.21, содержит две колебательных составляющих, частоты которых меняются нелинейно в некоторых диапазонах. Можно попробовать подобрать матрицу состояния модели внешнего воздействия $G(t)$ для улучшения качества управления, но в данном случае воспользуемся концепцией метода замороженных коэффициентов и будем искать постоянную матрицу G . Будем рассуждать следующим образом. Линеаризованная модель представляется без возмущения, но в конечном счёте речь идёт об управлении нелинейным объектом, а значит, наличие отклонения от, условно говоря, номинального управляющего воздействия для этого ОУ неизбежно приведёт к появлению ошибок по координатам. В соответствии с созданной иерархией подсистем при декомпозиции всего ОУ и определении участка контроля как ведущей подсистемы, в объектах, описывающих движение по многообразию (4.18) и (4.43), подсистемы участка намотки должна отсутствовать связь по управлению u_3 . Иными словами, во-первых, управление приводом цилиндров намотки определяется только задачами со стороны участка контроля (за исключением декомпозиционной составляющей управления), а во-вторых, выполнение задач для участка намотки должно решаться посредством управления приводом рулона намотки. В таком случае несложно увидеть, что выполнение условия (4.17) как раз и приводит к появлению отклонения по управлению. Введём в рассмотрение возмущающее воздействие и запишем ММ ОУ в непрерывном виде, добавив соответствующие уравнения модели внешнего воздействия [74,75]:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{F}f, \\
y &= \mathbf{Cx}, \\
\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{Gz} + \mathbf{L}\varepsilon, \\
\varepsilon &= g - y, \\
u &= -\mathbf{K}_1\mathbf{x} - \mathbf{K}_2\mathbf{z}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Применим преобразование Лапласа и найдём передаточную функцию (ПФ) ошибки по возмущающему воздействию для системы (4.47):

$$W_{\varepsilon f}(s) = -\mathbf{C} \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 - \mathbf{BK}_2 (s\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{LC} \right)^{-1} \mathbf{F}, \tag{4.48}$$

Амплитудно-частотная характеристика определяется как модуль соответствующей комплексной передаточной функции:

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} W(i\omega)]^2 + [\operatorname{Im} W(i\omega)]^2}.$$

Очевидно, она будет зависеть не только от желаемых собственных чисел системы (4.47), но и от коэффициентов матрицы состояния модели внешнего воздействия. Задав желаемые характеристики АЧХ, можно будет определить эти коэффициенты.

Найдём ПФ ошибки по возмущающему воздействию для линеаризованного ОУ (4.43). Несложно увидеть, что если применить преобразование базиса к модели внешнего воздействия, то вид искомой п. ф. не изменится. В связи с этим, зададим матрицу $\mathbf{G}$ фробениусова вида. Рассчитаем п. ф. по выходным переменным и учтём, что слагаемые управляющих воздействий находятся в уравнении по второй координате, то есть $\mathbf{F} = [0 \ 1]^T$. В таком случае получим для (4.48):

$$W_{\varepsilon f}|_{C=[1 \ 0]} = -\frac{\prod_{i=1}^{n-2}(g_i - s)}{\prod_{i=1}^n(p_i - s)}, \quad (4.49)$$

$$W_{\varepsilon f}|_{C=[0 \ 1]} = -\frac{s \prod_{i=1}^{n-2}(g_i - s)}{\prod_{i=1}^n(p_i - s)}, \quad (4.50)$$

где g_i — собственные числа матрицы $\mathbf{G}$, p_i — желаемые собственные числа объединённого ОУ. Передаточные функции (4.49-4.50) можно представить как последовательно соединённые аperiодические и дифференцирующие звенья. В силу того, что АЧХ при последовательном соединении перемножаются, то окончательно получим:

$$A_1(\omega) = \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{n-2}(\omega^2 + g_i^2)}{\prod_{i=1}^n(\omega^2 + p_i^2)}}, \quad (4.51)$$

$$A_2(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{n-2}(\omega^2 + g_i^2)}{\prod_{i=1}^n(\omega^2 + p_i^2)}}. \quad (4.52)$$

В дальнейшем, руководствуясь полученными результатами, можно выбрать один из нескольких вариантов определения желаемых собственных чисел g_i . Например, минимизация интеграла $\int Ad\omega$ одной из АЧХ (4.51-4.52) или их взвешенной суммы на определённом участке. К этому требованию можно также добавить условие минимизации интеграла производной с целью выравнивания АЧХ.

Рассмотрим в качестве примера следующий вариант. Пусть кроме двух интегральных составляющих в матрице состояния $\mathbf{G}$ реализуются два «заградительных» звена, то есть пара дифференцирующих звеньев второго порядка $W = s^2 + \beta^2$. Используем как критерий сумму (4.51) и (4.52) с весовыми коэффициентами равными единице. Определим в соответствии с данными на рисунке 4.19 два диапазона частот $[40, 60]$ и $[85, 120]$. В таком случае, численное решение даёт следующие результаты (рисунок 4.26). Частоты звеньев приблизительно равны $\beta_1 = 48.4 \text{ рад/с}$, $\beta_2 = 96.8 \text{ рад/с}$.

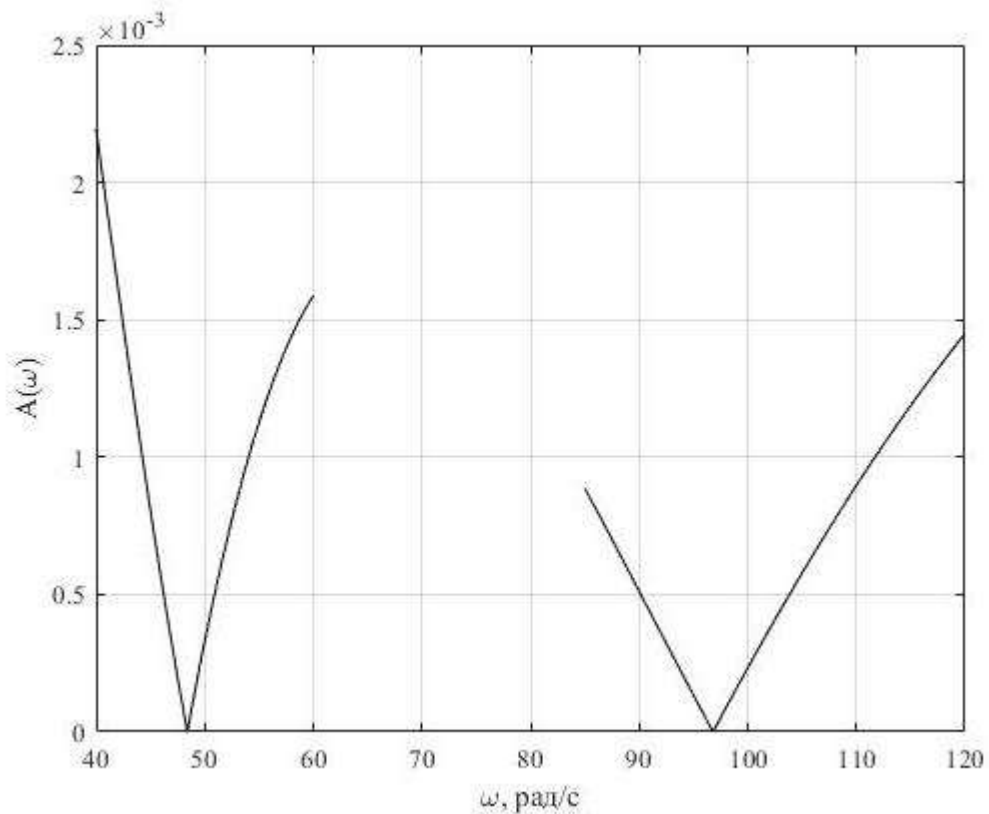


Рисунок 4.26 — Суммарная АЧХ

Итак, предположим, что определены желаемые собственные числа матрицы $\mathbf{G}$. Выполним моделирование с наблюдателем, реализующим скользящий режим и новой матрицей состояния модели внешнего воздействия в подсистеме участка намотки. На рисунке 4.27 показана ошибки по силам

натяжения $\Delta F(t)$. Можно отметить, что в сравнении с результатами, представленными на рисунке 4.17, ошибка стала меньше, что объясняется как задействованием иного типа наблюдателя, так и изменением матрицы состояния $\mathbf{G}$.

Пересчитывая в определённые моменты коэффициенты матриц состояния, можно добиться снижения максимальной амплитуды колебаний ошибок по силам натяжения.

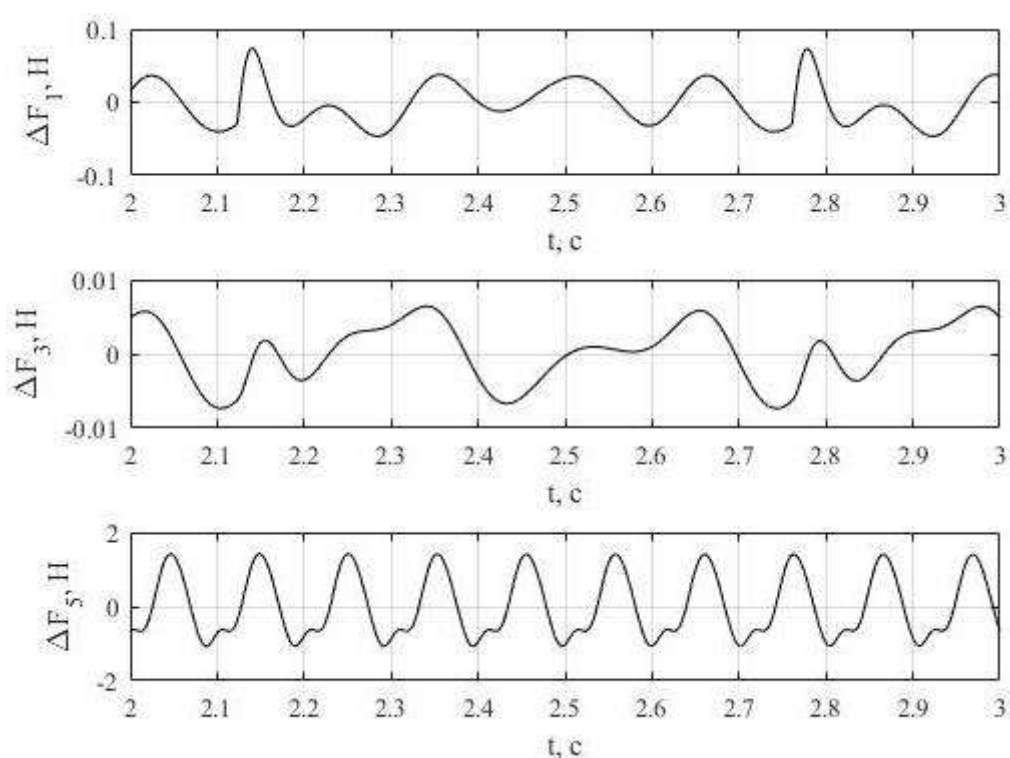
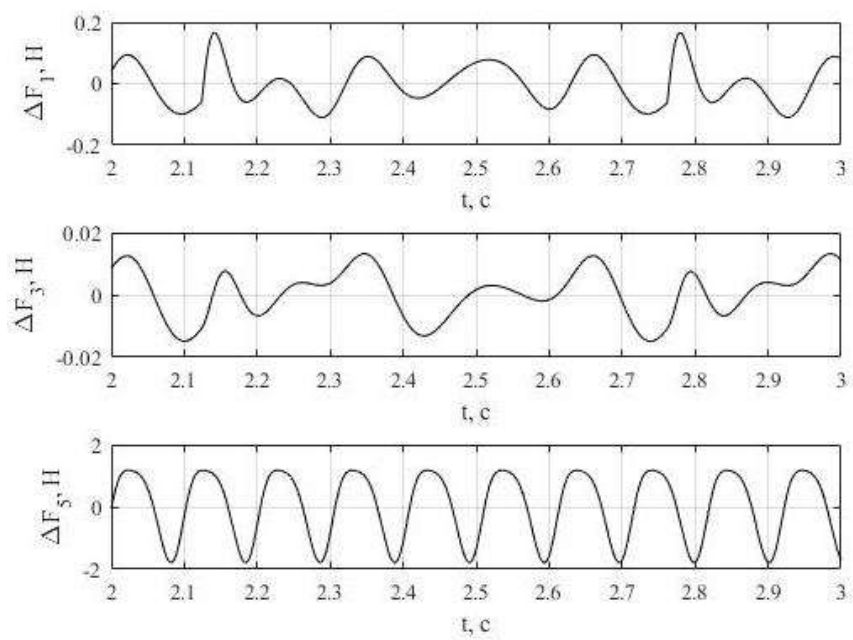
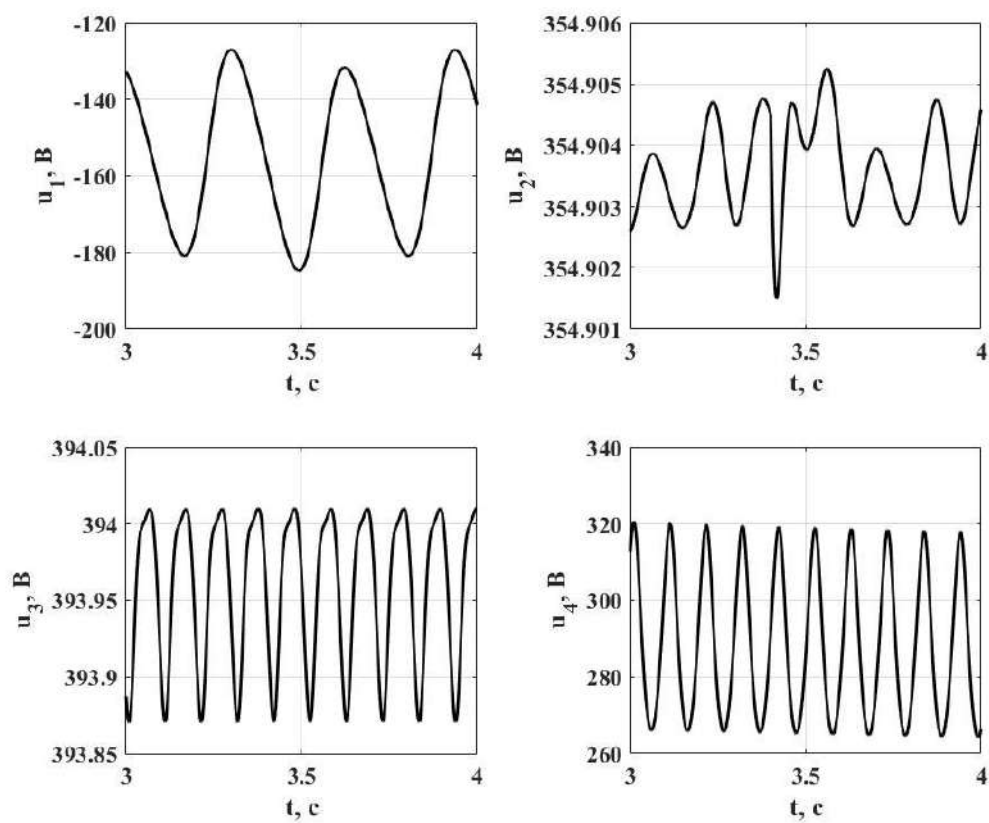


Рисунок 4.27 — Графики $\Delta F(t)$

Выполним моделирование с исходной матрицей состояния, но при наличии наблюдателя со скользящим режимом. На рисунках 4.28-4.30 показаны результаты моделирования.

Рисунок 4.28 — Графики $\Delta F(t)$ Рисунок 4.29 — Графики $u_i(t), i = \overline{1,4}$

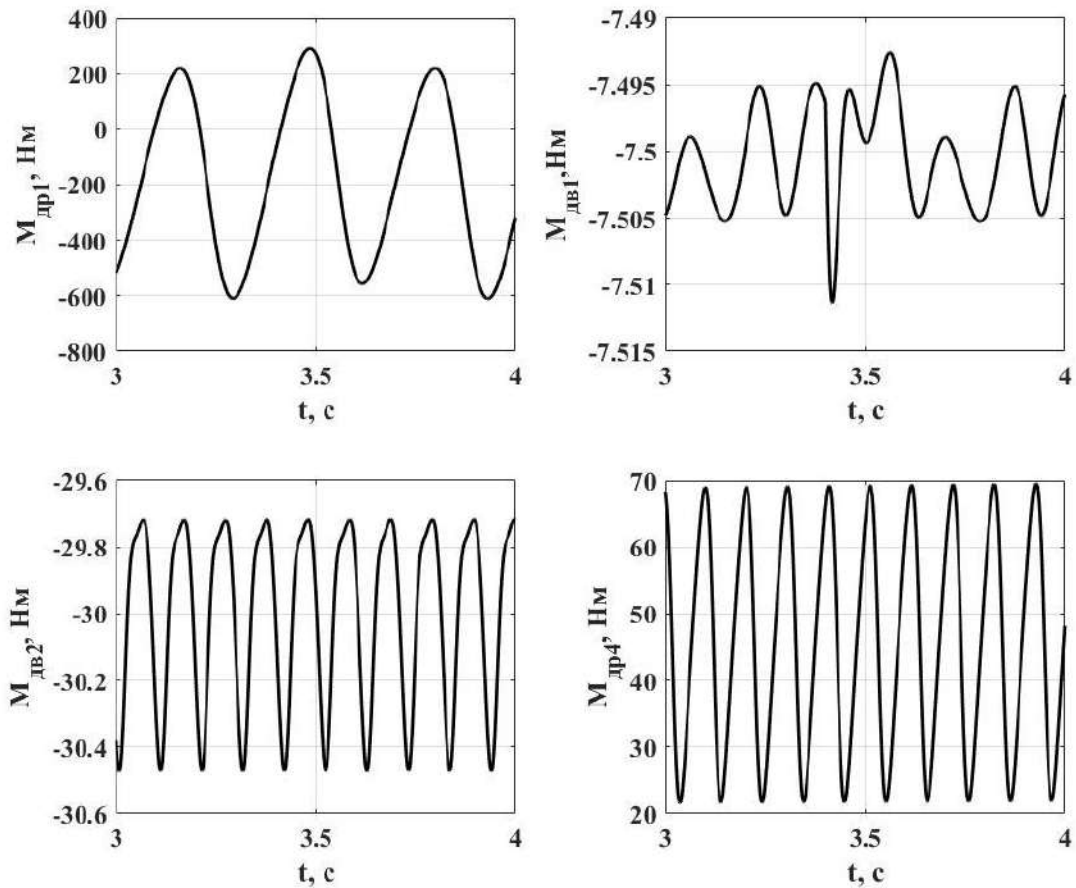


Рисунок 4.30 — Графики $M_{dei}(t), i = \overline{1,4}$

Как можно заметить (рисунок 4.28), амплитуда колебаний ошибок по силам натяжений на участках полотна достаточно мала, что объясняется в первую очередь идеальной реакцией приводов на поступающие управляющие воздействия (рисунок 4.29). В свою очередь, в соответствии с синтезированным алгоритмом управления моменты, развиваемые электродвигателями приводов (рисунок 4.30), по абсолютным значениям не превышают паспортные значения, но частота изменений достаточно большая, что в реальности трудно или практически не реализуемо.

На рисунках 4.31-4.32 показаны график оценки наблюдателя со скользящим режимом и графики ошибок по скоростям цилиндров.

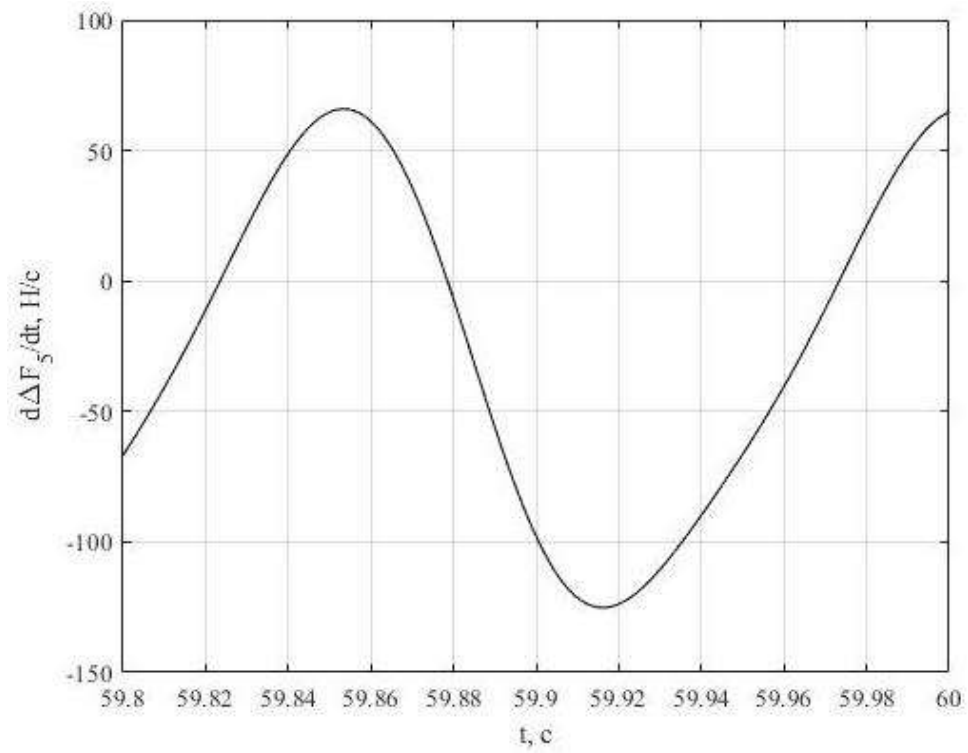


Рисунок 4.31 — График оценки $\frac{d\Delta F_5}{dt}$

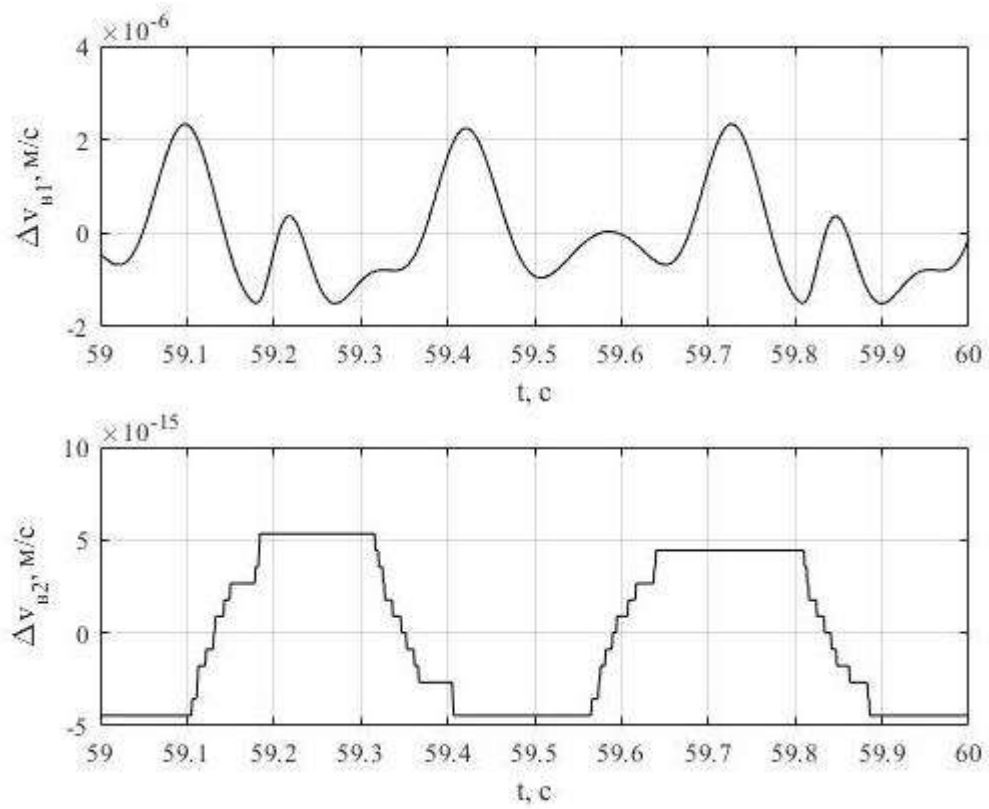


Рисунок 4.32 — Графики $\Delta v_{u1}(t)$, $\Delta v_{u2}(t)$

Как можно заметить (рисунок 4.31) применение наблюдателя со скользящим режимом улучшает качество оценки производной по времени ошибки силы натяжения полотна материала на участке намотки. Наличие эксцентриситетов осей вращения и отклонения формы поперечного сечения втулки рулона размотки от окружности ожидаемо приводит к наличию колебаний радиусов вращения и моментов инерции (рисунки 4.27-4.28). Длины участков полотна на участках размотки и намотки (рисунки 4.29-4.30) также содержат колебательные составляющие. Система управления отрабатывает задание по скоростям цилиндров с практически нулевой ошибкой (рисунок 4.32).

Заметим (рисунки 4.17, 4.28, 4.31), что даже изменение одного лишь типа наблюдателя при прочих равных условиях приводит к улучшению результатов.

4.10 Управление участком намотки

Исследования показывают, что напряжённно-деформированное состояние рулона в достаточной мере зависит от силы натяжения полотна на участке намотки. Кроме того, недостаточный контроль этой силы натяжения может привести различным дефектам рулона (рисунок 4.33) [76].



Морщины от намоточного
устройства



Разрыв под действием внутреннего
давления

Рисунок 4.33 — Дефекты бумаги

В связи с этим, учитывая метод декомпозиции, к системе управления участком намотки предъявляются повышенные требования. Рассмотрим ещё один вариант построения адаптивной системы управления участком намотки.

Математическая модель (4.34), полученная в результате применения метода декомпозиции, описывает участок намотки. Важным обстоятельством является то, что четвёртое уравнение по скорости цилиндров намотки полностью независимое внутри этой подсистемы. Исключим его из системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = w_1 x_4^2 + w_2 x_4 + w_3 x_7 + w_4 u_4 + w_5, \\ \dot{x}_7 = SE w_6 x_4 + w_6 x_4 x_7 - 2w_7 x_7 x_9 + w_7 x_{6н} x_9 - SE w_7 x_9. \end{cases} \quad (4.53)$$

Система (4.53) будет классифицироваться как нестационарная. Требование к системе управления этим объектом по-прежнему заключается в поддержании заданной силы натяжения $x_7 \rightarrow x_{7н}$. Введём в рассмотрение понятие полуэталонной модели рулона намотки (далее просто рулона), определяемое на основе уравнений номинального режима:

$$\dot{x}_{3н} = \frac{(2x_{7н} - x_{6н} + SE)w_{7н}}{w_{6н}x_{7н} + SEw_{6н}}x_9. \quad (4.54)$$

Данная модель является дифференциальным уравнением первого порядка относительно угла поворота рулона и описывает идеальное «поведение» рулона для обеспечения заданной силы натяжения. Но в отличие от эталонных моделей здесь невозможно заранее просчитать функцию угла поворота как функцию времени ввиду неопределённости функции скорости цилиндров намотки априори, что укладывается в концепцию подчинённой декомпозиции и управления — идеальное поведение рулона намотки будет

определяться в конечном счёте помимо задания ещё и скоростью цилиндров намотки.

Существует множество способов решения задачи синтеза алгоритма управления объектом (4.53). В качестве примера рассмотрим следующий [77,78,79]. Введём в рассмотрение ошибку по выполнению задания и зададим уравнение, которому она должна удовлетворять:

$$e_{x_7} = x_7 - x_{7н}, \quad \dot{e}_{x_7} + Ke_{x_7} = 0,$$

где $K > 0$ — постоянный коэффициент. Воспользуемся третьим уравнением (4.53) и выполним преобразования:

$$\begin{aligned} SEw_6x_4 + w_6x_4x_7 - 2w_7x_7x_9 + w_7x_{6н}x_9 - SEw_7x_9 + K(x_7 - x_{7н}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_7 &= \frac{Kx_{7н} - SEw_6x_4 - (x_{6н} - SE)w_7x_9}{K + w_6x_4 - 2w_7x_9}. \end{aligned}$$

Продифференцируем первое уравнение в (4.53) по времени, подставим в него второе уравнение и полученное выражение по x_7 . В таком случае получим после преобразований следующее:

$$\ddot{x}_3 = w_1\dot{x}_3^2 + w_2\dot{x}_3 + \frac{Kx_{7н}w_3 - SEw_3w_6\dot{x}_3 - (x_{6н} - SE)w_3w_7x_9}{w_6\dot{x}_3 + K - 2w_7x_9} + w_4u_4 + w_5. \quad (4.55)$$

Введём по тому же принципу ошибку и добавим интегральные составляющие:

$$\begin{aligned} e &= x_3 - x_{3н} + B_1 z_1 + B_2 z_2, \\ \dot{z}_1 &= z_2, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= x_3 - x_{3н}, \\ \ddot{e} + A_1 \dot{e} + A_2 e &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

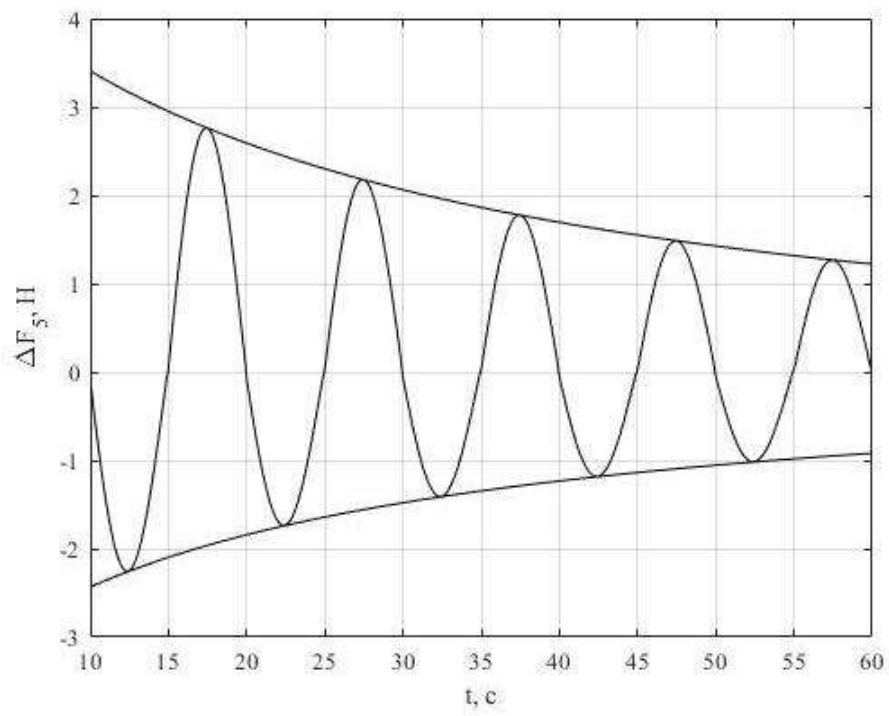
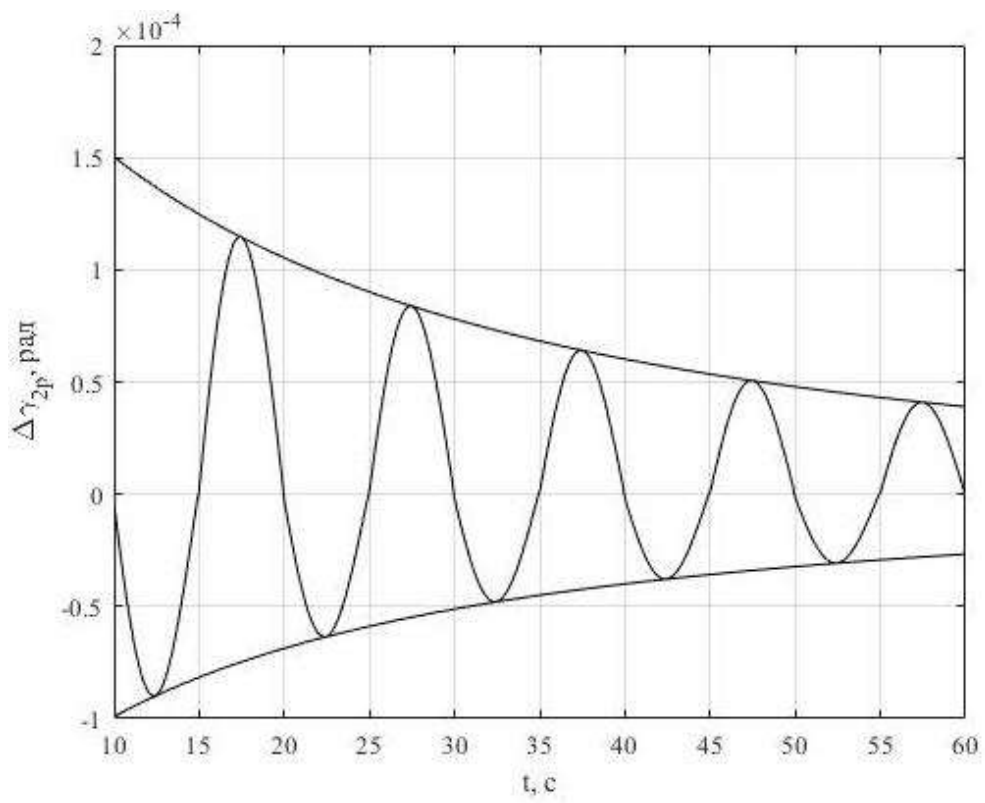
где A_1, A_2, B_1, B_2 — постоянные коэффициенты. Выполним подстановку (4.54), (4.55) и (4.56) в (4.57), проведём преобразования и разрешим полученное выражение относительно u_4 :

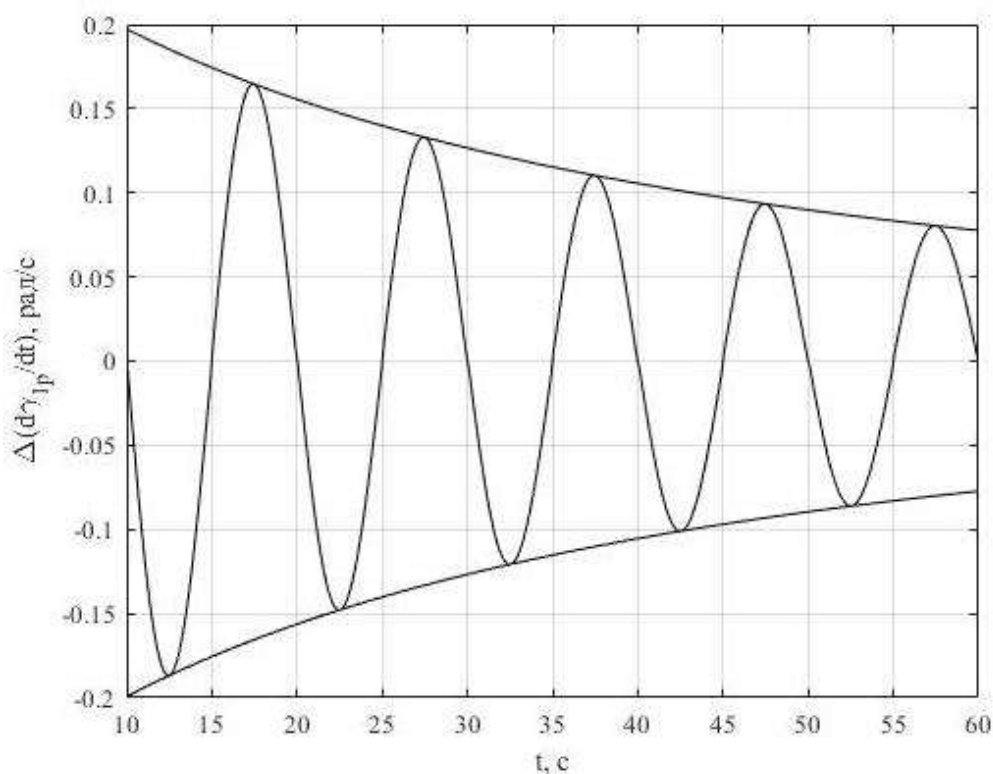
$$u_4 = \frac{1}{w_4} \left[\begin{aligned} &\ddot{x}_{3н} - w_5 - (A_1 B_2 + B_1)(x_3 - x_{3н}) - \\ &-(A_1 + B_2)(\dot{x}_3 - \dot{x}_{3н}) - A_1 B_1 z_2 - \\ &-A_2 e - w_1 \dot{x}_3^2 - w_2 \dot{x}_3 - \\ &-\frac{Kx_{7н} w_3 - SEw_3 w_6 \dot{x}_3 - (x_{6н} - SE)w_3 w_7 x_9}{w_6 \dot{x}_3 + K - 2w_7 x_9} \end{aligned} \right]. \quad (4.58)$$

Данный подход к синтезу в значительной мере опирается на вторую теорему Ляпунова об исследовании систем на устойчивость и задействует понятие функции Ляпунова [80,81]. Коэффициенты адаптации B_1 и B_2 интегральных составляющих могут быть также определены по известным алгоритмам, например алгоритм градиентного спуска (АГС) [82,83].

На рисунках 4.34-4.36 показаны результаты моделирования (4.53) с алгоритмом (4.58).

На рисунке 4.34 показаны огибающие ошибки по F_5 . Как можно заметить, амплитуда колебаний ошибки экспоненциально уменьшается, что соответствует заданным желаемым дифференциальным уравнениям. Своеобразной особенностью алгоритма (4.58) является отсутствие информации по текущему значению силы натяжения F_5 .

Рисунок 4.34 — График $\Delta F_5(t)$ Рисунок 4.35 — График $\Delta \gamma_{2p}(t)$

Рисунок 4.36 — График $\Delta\omega_{2p}(t)$

Ключевая цель управления после ряда преобразований задаётся как слежение за полуэталонной моделью, которая сформулирована относительно $\bar{\gamma}_{2p}$, и ошибка выполнения этого задания достаточно мала (рисунок 4.35). Следует отметить, что в конечном счёте сила натяжения полотна материала на участке зависит непосредственно от скоростей точек полотна на границах, а значит, не меньший приоритет имеет задание по угловой скорости (рисунок 4.36).

Разумеется, существуют и иные способы реализации синтеза управляющего воздействия [84-86]. Как пример, можно сформулировать задачу непосредственно относительно ошибки по силе натяжения. В целом же, речь идёт о создании адаптивной системы управления.

4.11 Идентификация параметров

Одним из ключевых вопросов при синтезе алгоритма управления является возможность его реализации. В рассмотренных вариантах

алгоритмов управления необходимо знать в том числе параметры рулона. И если массу рулона можно измерить достаточно точно, то модуль Юнга конкретного типа бумаги точно может быть неизвестен. Кроме того, разработанная геометрическая модель поперечного сечения рулона базируется на идее эквидистантной спирали, что, разумеется, не может быть абсолютно точно реализовано в реальности ввиду как минимум неизбежного наличия отклонений по толщине полотна материала. В дополнение, полученная модель предполагает описание овальности, являющейся следствием, например, деформации, за счёт отклонения формы поперечного сечения от окружности, в то время как в реальности при сохранении круглой формы сечения втулки овальность математически может быть описана при учёте промежутка между витками. К неизвестным параметрам следует отнести и эксцентриситеты осей вращения, а также ряд других параметров.

Если задача оценки неизвестных по тем или иным причинам переменных состояния решается посредством применения наблюдателей, то для нахождения неизвестных параметров системы применяют идентификатор.

Задача идентификации модели может решаться несколькими способами. В исследуемой машине некоторые параметры меняются достаточно медленно и в то же время значительно в масштабах всего временного интервала, например, рулон размотки. В подобных условиях можно применить, например, МНК-идентификатор с экспоненциальной потерей памяти, реализующий в основе алгоритм идентификации на основе метода наименьших квадратов, который должен минимизировать функционал вида:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t \exp \left(- \int_s^t \lambda(\tau) d\tau \right) \| \mathbf{y}(s) - \mathbf{W}(s) \hat{\mathbf{a}}(t) \|^2 ds ,$$

где $\mathbf{W}$ — сигнальная матрица, $\lambda(\tau) \geq 0$ — переменный коэффициент потери памяти, $\mathbf{y}$ — вектор выходных переменных, $\hat{\mathbf{a}}(t)$ — оценка неизвестных параметров.

В рассмотренных алгоритмах управления должна проводится идентификация параметров с последующим пересчётом эталонных и/или полуэталонных моделей рулонов и корректировкой алгоритмов управления. То есть создаётся замкнутый контур, в котором движение эталонного ОУ в какой-то степени корректируется параметрами реального ОУ.

4.12 Выводы по главе 4

1. Проведён предварительный анализ режима разгона. Сформулированы необходимые условия при формировании КСР относительно узлов размотки и намотки.

2. Выполнен синтез согласованного управления единой ММ перемоточной машины. Проведён анализ вариантов уравнений согласования и определены возможные варианты объектов продольного движения по многообразию.

3. Проведена декомпозиция ММ перемоточной машины. Определены возможные варианты декомпозиции.

4. Выполнен синтез алгоритма согласованного управления участками контроля, размотки и намотки.

5. Выполнен синтез наблюдателей Люэнбергера и наблюдателей со скользящим режимом.

6. Разработано алгоритмическое и программное обеспечение для моделирования системы управления ПМ.

7. Проведён спектральный анализ сил натяжения на участках с использованием кратковременного преобразования Фурье. Определены частоты наибольших по амплитуде гармоник.

8. Выполнен расчёт матрицы состояния модели внешнего воздействия с учётом результатов спектрального анализа колебаний переменных.

9. Выполнен синтез адаптивного алгоритма управления на основе функции Ляпунова участком намотки с использованием алгоритма скоростного градиента. Разработано алгоритмическое и программное обеспечение для моделирования синтезированной системы управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Выполнен обзор процессов и оборудования для перемотки рулонного материала, используемого в полиграфическом производстве. Предложена новая компоновочная схема перемоточной машины непрерывного действия с сенсорными валами и системой автоматического управления приводами узлов размотки и намотки, обеспечивающая требуемые из технологических соображений значения скорости и натяжения полотна.

2. Разработаны динамические и математические модели узлов размотки, намотки и перемоточной машины в целом, учитывающие изменения в процессе работы массо-инерционных и характеристик рулонов и геометрических параметров узлов. Предложенные математические модели позволяют учитывать особенности схемы проводки полотна и его упругость, а также механические характеристики приводов.

3. Предложена геометрическая модель поперечного сечения рулона в виде эквидистантной спирали. Для построения эквидистантной спирали предложен набор функций, описывающих контур поперечного сечения втулки и первый виток спирали. Сформулированы необходимые граничные условия для функции первого витка. Получена оценка длины полотна в рулоне в зависимости от периметра контура поперечного сечения втулки и шага спирали. Показано, что форма внешнего витка эквидистантной спирали стремится к окружности с ростом номера витка вне зависимости от формы поперечного сечения втулки. Разработаны алгоритм и программа для моделирования эквидистантной спирали, применяемой к рулонным материалам.

4. Получены аналитические зависимости для определения положения центра тяжести, массы и момента инерции поперечного сечения рулона с учётом неидеальности формы поперечного сечения. Проанализированы зависимости координат центра тяжести поперечного сечения рулона от номера

внешнего витка и параметра спирали. Разработаны алгоритм и программа для моделирования массо-инерционных характеристик рулона.

5. Разработан метод и математические зависимости для определения взаимного положения рулона и участка полотна между рулоном и сенсорным валом. Разработаны алгоритмы и программы для моделирования геометрических характеристик узлов размотки и намотки, позволяющие учитывать биение рулона и неидеальность поперечного сечения втулки.

6. Предложена функциональная схема системы управления приводами перемоточной машины, обеспечивающая требуемую скорость и натяжение полотна. Выполнен анализ режима разгона перемоточной машины. Сформулированы требования к номинальной функции скорости цилиндров намотки. Выполнен синтез согласованного управления перемоточной машиной в целом. Определены возможные варианты объектов движения по многообразию в зависимости от выбора векторов переменных.

7. Проведена декомпозиция исследуемой системы, в результате которой сформированы математические модели участков размотки, намотки и контроля. Выполнен синтез согласованного управления на участках размотки, намотки и контроля. Синтезированы алгоритмы управления объектами, описывающими относительные и продольные движения по многообразию. Синтезированы наблюдатели Люэнбергера и наблюдатели со скользящим режимом. Разработано алгоритмическое и программное обеспечение для моделирования системы управления. Выполнено моделирование системы управления перемоточной машиной. Анализ полученных результатов подтверждает адекватность предложенных математических моделей и систем управления узлами размотки и намотки.

8. Проведён спектральный анализ колебаний сил натяжения полотна на участках с использованием кратковременного преобразования Фурье. Определены частоты наибольших по амплитуде гармоник. На основе

полученных данных определена матрица состояния модели внешнего воздействия алгоритма грубого управления вынужденным движением.

9. Выполнен синтез адаптивного алгоритма управления на основе функции Ляпунова участком намотки с использованием алгоритма скоростного градиента. Разработаны алгоритмы и программы для моделирования адаптивной системы управления участком намотки. Полученные результаты моделирования подтверждают справедливость проведённых расчётов и исследований.

10. Даны инженерные рекомендации по проектированию перемоточных машин непрерывного действия с сенсорными валами и системой автоматического управления индивидуальными приводами узлов размотки и намотки, обеспечивающей заданные значения скорости и натяжения полотна.

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АЦП	аналого-цифровой преобразователь
ЗУ	задающее устройство
КСР	кривая скорости разгона
КСТ	кривая скорости торможения
МК	микроконтроллер
ММ	математическая модель
МНК	метод наименьших квадратов
НДС	напряжённо-деформированное состояние рулона
ОУ	объект управления
ПМ	пермоточная машина
ПФ	передаточная функция
САУ	система автоматического управления
ЦАП	цифро-аналоговый преобразователь

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киппхан Г. Энциклопедия по печатным средствам информации. Технологии и способы производства / Г. Киппхан. — Москва: МГУП, 2003. — 1280 с. — ISBN 5-8122-0310-5.
2. Рулонные офсетные машины / [Электронный ресурс] // KOENIG & BAUER: [сайт]. — URL: <https://www.kba-print.ru/catalog/rulonnaya-i-tsifrovaya-pechat/rulonnye-ofsetnye-mashiny/> (дата обращения: 15.07.2022).
3. High Speed Paper Sheeting Machine/ [Электронный ресурс] // DONGTENG: [сайт]. — URL: <https://www.dongtengcn.com/product/high-speed-rotary-paper-roll-cutter-machine> (дата обращения: 25.08.2022).
4. High Speed Rewinder / [Электронный ресурс] // JMC Paper Tech Pvt. Ltd.: [сайт]. — URL: <https://www.jmcmachines.com/products/high-speed-rewinder/> (дата обращения: 25.08.2022).
5. Флаторезальное оборудование / [Электронный ресурс] // Полиграфические упаковочные машины: [сайт]. — URL: <https://prpack.ru/poligrafiya/flatorezki/> (дата обращения: 25.08.2022).
6. Система поворотных качающихся валов ELROLLER / [Электронный ресурс] // Системы автоматизации и технического зрения: [сайт]. — URL: <https://www.erhardt-leimer.com/> (дата обращения: 25.08.2022).
7. Артыков Э. С., Бусарова Ю. Д. Регулятор натяжения бумажного полотна в рулонных печатных машинах / Артыков Э. С., Бусарова Ю. Д. [Текст] // ПОЛИГРАФИЯ: ТЕХНОЛОГИЯ, ОБОРУДОВАНИЕ, МАТЕРИАЛЫ. — Омск: Омский государственный технический университет (Омск), 2022. — С. 106-110.
8. Щербина Ю. В., Хамитов Б. Промышленная система управления натяжением бумажного полотна на основе двигателя постоянного тока [Текст] / Щербина Ю. В., Хамитов Б. // Вестник Московского государственного университета печати. — 2011. — № 1. — С. 268-272.

9. Щербина Ю.В. Исследование динамики лентопитающего устройства с рулонным тормозом на основе ДПТ / Ю.В. Щербина // Изв. вузов. Проблемы полиграфии и издательского дела. — 2011. — № 4. — С. 65–74.
10. Замурагин Ю. М. Исследование механизма протягивания ленточного материала / Ю.М. Замурагин, Б.Л. Саламандра, К.Б. Саламандра // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2023. — № 3. — С. 125-132.
11. Замурагин Ю. М. Анализ устройства сматывания и протягивания ленточного материала с постоянной скоростью / Ю. М. Замурагин // Современное машиностроение. Наука и образование. — 2023. — № 12. — С. 303-313.
12. Щербина Ю. В. Системы управления натяжением ленты в рулонных печатных машинах [Текст] / Щербина Ю. В. // Вестник Московского государственного университета печати. — 2011. — № 1. — С. 221-237.
13. Вайсман Л. Н. Структура бумаги и методы её контроля [Текст] / Вайсман Л. Н. — М.: Лесная промышленность, 1973 — 150 с.
14. Ерыхов Б. П. Неразрушающие методы исследования целлюлозно-бумажных и древесных материалов [Текст] / Ерыхов Б. П. — 1. — М.: Лесная промышленность, 1977 — 247 с.
15. Смирнов Ю. Н., Фейгин В. Б., Чичаев В. А. Оборудование для отделки и резки бумаги [Текст] / Смирнов Ю. Н., Фейгин В. Б., Чичаев В. А. — 1. — М.: Лесная промышленность, 1985 — 200 с.
16. Михайлов И. Е., Суворов И. А. Численное решение задачи о гашении колебаний движущегося полотна [Текст] / Михайлов И. Е., Суворов И. А. // Журнал вычислительной математики и физики. — 2021. — № 1. — С. 150-161.
17. Романенков А. М. О решениях уравнения малых поперечных колебаний движущегося полотна [Текст] / Романенков А. М. // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. — 2022. — № 2. — С. 346-356.
18. Вульфсон И. И. Колебания машин с механизмами циклового действия [Текст] / И. И. Вульфсон — Л.: Машиностроение, 1990. — 309 с.

19. Жавнер В. Л. Исследование мехатронного устройства для размотки и протягивания рулонных материалов в дискретном режиме // В. Л. Жавнер, Чжао Вэнь, У Лун. - Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 4. С. 322—329

20. Щербаков М. А., Лысова Н. В., Федяев А. А. Моделирование автоматизированной системы управления продольно-резательным станком бумагоделательной машины [Текст] / Щербаков М. А., Лысова Н. В., Федяев А. А. // Инженерный вестник Дона. — 2023. — № 8.

21. Куцубина Н. В. Удинцева С. Н. Астафьев Л. А. Моделирование самовозбуждающихся колебаний батарей валов бумагоделательных и отделочных машин [Текст] / Куцубина Н. В. Удинцева С. Н. Астафьев Л. А. // Леса России и хозяйство в них. — 2008. — № 1.

22. Воронов Е. А. Теория и расчет механических приводов многокрасочных рулонных ротационных машин [Текст] / Воронов Е. А. — ИПК Омич, 1992. — 112 с.

23. Селиверстов Л. Ю. Применение индивидуальных приводов в рулонных печатных машинах // Л. Ю. Селиверстов. Известия ТулГУ. Технические науки. — Тула, 2013, вып. 3. — С. 138 – 143.

24. Лебедев И. С. Совершенствование приводов многокрасочных рулонных машин по требованиям к неприводке печати // Автореф. дисс... к.т.н. спец. 05.02.13 ФГОУ ВПО ОГТУ (Омск). М.: 2013, 18 с. URL: [autoref-sovershenstvovanie-privodov-mnogokrasochnykh-rulonnykh-mashin-po-trebovaniyam-k-neprivodke-p.pdf](#) Дата обращения 23.11.2024.

25. Никишин В. С. Задачи теории упругости для многослойных сред / В. С. Никишин, Г. С. Шапиро. - М.: «Наука», 1973. — 131 с.

26. Болотин В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков.— М.: «Машиностроение», 1980. — 375 с.

27. Куцубина Н. В. Удинцева С. Н. Математическое моделирование процессов намотки рулонов бумаги на продольно-резальных станках [Текст] /

Куцубина Н. В. Удинцева С. Н. // ИВУЗ. «Лесной журнал». — 2006. — № 1. — С. 90-95.

28. Удинцева С. Н. Вибрационные процессы при намотке рулонов бумаги на продольно-резательных станках: специальность 05.21.03 «Технология и оборудование химической переработки биомассы дерева; химия древесины»: Автореферат на соискание кандидата технических наук / Удинцева С. Н.; ФГБОУ ВО УГЛТУ. — Екатеринбург, 2004. — 20 с.

29. Еловенко Д. А. Тенденции развития технологии формообразования многослойных цилиндрических конструкций и методы оценки остаточных технологических напряжений // Д. А. Еловенко. Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Изд-во: Иркутский ГУПС. № 2 (62) 2019 С. 48-58.

30. Шопин И. И., Бельский С. М. Математическая модель напряженно-деформированного состояния рулона с учетом взаимного влияния шероховатости и поперечной разнотолщинности полосы. // И. И. Шопин, С. М. Бельский. Производство проката, М., 2017, №8. — С.3-7

31. Усов С. В., Мещеряков В. Н. Математическое моделирование процесса намотки тонкой стальной полосы в рулон [Текст] / Усов С. В., Мещеряков В. Н. // Известия ТулГУ. Технические науки. — 2014. — № 10. — С. 157-162.

32. Антонов В. И. Напряжения в рулоне при дополнительном натяжении ленты //В. И. Антонов. Вестник МГСУ, 2013, №10. — С. 24-28

33. Антонов В. И. Начальные напряжения в анизотропном неоднородном цилиндре, образованном намоткой [Текст] / Антонов В. И. // Вестник МГСУ. — 2010. — № 4. — С. 29-33.

34. Антонов В. И. Метод определения начальных напряжений в рулоне при нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями [Текст] / Антонов В. И. // Вестник МГСУ. — 2010. — № 4. — С. 177-180.

35. Патент RU 2192379 C1 МПК B65H 18/16 Намоточное устройство / Веретено В. А., Железняков А. С., Сторожев В. В. Новосиб. Техн. Ин-т МГУТД. Заявл. 23.02.2001. Оpubл. 10.11.2002

36. Патент RU 2578469 C1 МПК B65H 77/00 Устройство для определения плотности намотки рулонных материалов / Глазунов В. Ф. ФГБОУ ИГЭУ. Заявл. 05.11.2014. Оpubл. 27.03.2016

37. Казаков Я. В., Казакова О. Я., Манахова Т. Н., Малков А. В. Определение упругих констант целлюлозно-бумажных материалов при растяжении в плоскости листа [Текст] / Казаков Я. В., Казакова О. Я., Манахова Т. Н., Малков А. В. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2015. — № 8. — С. 53-58.

38. Степанов П. Е. Математическое моделирование узла размотки рулона текстильных и полиграфических материалов / П. Е. Степанов, А. Г. Усов // Современные наукоемкие технологии. — 2020. — № 12-2. — С. 317-323.

39. Степанов П. Е. Разработка математической модели разматываемого рулона в листорезальной машине / П. Е. Степанов, А. Г. Усов, М. П. Блоков // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. — 2019. — № 3. — С. 34-40.

40. Лурье А. И. Аналитическая механика [Текст] / Лурье А. И. — М.: ГИФМЛ, 1961 — 824 с.

41. Кенио Т., Нагамори С. Двигатели постоянного тока с постоянными магнитами [Текст] / Кенио Т., Нагамори С. — М.: Энергоатомиздат, 1989 — 184 с.

42. Меркин Д. Е. Введение в механику гибкой нити [Текст] / Меркин Д. Е. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980 — 240 с.

43. Марковец А. В. Математическое моделирование процесса разматывания рулона при учете силы натяжения сматываемого материала / А. Е. Ануфриев, А. В. Марковец, Н. В. Рокотов, А. Г. Усов // Вестник Санкт-

Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 4: Промышленные технологии. – 2022. – № 1. – С. 45-50.

44. Степанов П. Е. К вопросу о перемотке рулонных материалов / П. Е. Степанов, А. Г. Усов // Наука - Технологии - Производство: Тезисы докладов Международной научно-технической конференции, посвященной инновационному развитию текстильной и легкой промышленности, Санкт-Петербург, 29–31 марта 2021 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, 2021. – С. 20-21.

45. Сенсорный вал PD 30 / [Электронный ресурс] // Системы автоматизации и технического зрения: [сайт]. — URL: https://www.erhardt-leimer.com/ru/ru/продукты-и-запчасти/усилие-на-полотне/сенсорные-валы/producttype-pd-30.html?related_page=1 (дата обращения: 05.07.2023).

46. Фиников С. П. Теория поверхностей [Текст] / Фиников С. П. — 4., 2016 — 304 с.

47. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии [Текст] / Норден А. П. — 3. — М.: Ленанд, 2019 — 248 с.

48. Степанов П. Е. Исследование геометрической модели идеального рулона / П. Е. Степанов, М. П. Блоков, А. В. Моисеев // Инновации молодежной науки: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции молодых ученых, Санкт-Петербург, 20–24 апреля 2020 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, 2020. – С. 14-15.

49. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х ч. / Г.М. Фихтенгольц. Ч. 2. – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2008. – 463 с.

50. Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.

51. Householder A. S. The numerical treatment of a single nonlinear equation [Текст] / Householder, A. S. — 1. — New York: New York: McGraw-Hill, 1970 — 216 с.

52. Ostrowski A. M. Solution of Equations and Systems of Equations: Pure and Applied Mathematics [Текст] / Ostrowski A. M. — 9. — New York: Academic Press, 2016 — 352 с.

53. Встраиваемые моментные двигатели / [Электронный ресурс] // Системы прямого привода: [сайт]. — URL: https://e-motors.tech/product_types/vstraivaemye-povorotnye-dvigateli/ (дата обращения: 20.09.2023).

54. Дроздов В. Н., Мирошник И. В., Скорубский В. И. Системы автоматического управления с микроЭВМ [Текст] / Дроздов В. Н., Мирошник И. В., Скорубский В. И. — 1. — Л.: Машиностроение, 1989 — 288 с.

55. Дроздов В. Н. Синтез алгоритмов цифровых систем управления полиграфическим оборудованием [Текст] / Дроздов В. Н. — 1. — СПб.: Петербургский институт печати, 2003 — 200 с.

56. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики [Текст] / Марчук Г. И. — 1. — М.: Наука, 1977 — 456 с.

57. Мирошник И. В. Согласованное управление многоканальными системами [Текст] / Мирошник И. В. — 1. — Л.: Энергоатомиздат, 1990 — 128 с.

58. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы: учеб. пособие [Текст] / Мирошник И. В. — 1. — СПб: Питер, 2006 — 272 с.

59. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы [Текст] / Ким Д. П. — 1. — М.: Физматлит, 2004 — 464 с.

60. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. — 2. — М.: Наука, 1974 — 408 с.

61. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. — 2. — М.: Юрайт, 2024 — 385 с.

62. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Камке Э. — 4. — М.: Наука, 1971 — 576 с.

63. Dimitrios E., Theodoros I. Construction of Exact Parametric or Closed Form Solutions of Some Unsolvable Classes of Nonlinear ODEs (Abel's Nonlinear ODEs of the First Kind and Relative Degenerate Equations) [Текст] / Dimitrios E., Theodoros I. // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2011. — С. 1-13.

64. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert W Function [Текст] / Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. // Advances in Computational Mathematics. — 1996. — № 5. — С. 329-359.

65. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. [Текст] / Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. — СПб: Наука, 1999. — 467 с.

66. Юревич Е. И. Теория автоматического управления. 4-е изд., пер. и доп. / Юревич Е. И. — СПб.: BHV, 2016. — 560 с.

67. Barbot J-P., Djemai M., Boukhobza T. Sliding mode observers [Текст] / Barbot J-P., Djemai M., Boukhobza T. — 1. — Boca Raton, Florida: CRC Press, 2002 — 28 с.

68. Juan Diego S´anchez-Torres, Alexander G. A high order sliding mode observer for systems in triangular input observer form / Juan Diego S´anchez-Torres, Alexander G. [Текст] // XI Latin American Robotics Competition & Colombian

Conference on Automatic Control & II Industry Applications Society Colombian Workshop: 2011. — С. 106-110.

69. Barbot J-P., Djemai M., Manamanni N. Sliding mode observer for triangular input hybrid system / Barbot J-P., Djemai M., Manamanni N. [Текст] // Proceedings of the 16th IFAC World Congress:, 2005. — С. 181-186.

70. Встраиваемые поворотные двигатели / [Электронный ресурс] // Ruch Servomotor. Системы прямого привода: [сайт]. — URL: https://e-motors.tech/product_types/vstraivaemye-povorotnye-dvigateli/ (дата обращения: 05.07.2023).

71. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов [Текст] / Сергиенко А. Б. — 3. — СПб: БХВ-Петербург, 2011 — 768 с.

72. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 584 с.

73. Использование оконных функций в задачах цифрового спектрального анализа. Примеры и рекомендации / [Электронный ресурс] // Теория и практика цифровой обработки сигналов: [сайт]. — URL: <http://www.dsplib.ru/content/winex/winex.html> (дата обращения: 05.07.2023).

74. Степанов П. Е. Определение модели внешнего воздействия в алгоритме грубого управления движением на участке контроля перемоточной машины [Текст] / Степанов П. Е. // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 4: промышленные технологии. — 2023. — № 4. — С. 52-56.

75. Уонем М., Линейные многомерные системы: Геометрический подход. [Текст] / Уонем М. — М.: Наука, 1980 — 376 с.

76. Предотвращение и диагностика разрывов полотна / [Электронный ресурс] // [сайт]. — URL: https://www.publish.ru/articles/200605_4056764 (дата обращения: 05.07.2023).

77. Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю., Шевченко В. А. Адаптивное управление с эталонной моделью приводом постоянного тока [Текст] /

Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю., Шевченко В. А. // Известия Южного федерального университета. Технические науки. — 2015. — № 1. — С. 6-18.

78. Лебедев А. В., Филаретов В. Ф. Самонастраивающаяся система с эталонной моделью для управления движением подводного аппарата [Текст] / Лебедев А. В., Филаретов В. Ф. // Автометрия. — 2015. — № 5. — С. 42-52.

79. Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю. Многоконтурное адаптивное управление подвижными объектами при решении задач траекторных задач [Текст] / Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю. // Проблемы управления. — 2018. — № 6. — С. 62-72.

80. Галаган Т. А., Еремин Е. Л., Плутенко А. Д. Робастный алгоритм управления нестационарным нелинейным объектом для систем с явной эталонной моделью [Текст] / Галаган Т. А., Еремин Е. Л., Плутенко А. Д. // Информатика и системы управления. — 2001. — № 2. — С. 100-105.

81. Арановский С.В., Бобцов А.А., Кремлев А.С., Лукьянова Г.В., Робастный алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 1–6.

82. Андриевский Б. Р., Гузенко П. Ю., Фрадков А. Л. Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента [Текст] / Андриевский Б. Р., Гузенко П. Ю., Фрадков А. Л. // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 4. — С. 4-17.

83. Томчина О. П., Поляхов Д. Н., Токарева О. И., Фрадков А. Л. Адаптивное управление нестационарными нелинейными объектами на основе алгоритмов скоростного градиента [Текст] / Томчина О. П., Поляхов Д. Н., Токарева О. И., Фрадков А. Л. // Информационно-управляющие системы. — 2019. — № 3. — С. 4-17.

84. Дроздов, В. Н. Синтез алгоритма управления узлом размотки / В. Н. Дроздов, П. Е. Степанов // Тези доповідей 16ї міжнародної науковотехнічної конференції студентів і аспірантів «Друкарство молоде», Київ, Національний

технічний університет України «Київський політехнічний інститут» видавничополіграфічний інститут, 2016. – С. 109.

85. Степанов, П. Е. Синтез алгоритма управления узлом размотки листорезальной машины с применением метода замороженных коэффициентов / В. Н. Дроздов, П. Е. Степанов // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1: Естественные и технические науки. – 2017. – № 3. – С. 120-125.

86. Дроздов, В. Н. Алгоритм управления узлом размотки / В. Н. Дроздов, П. Е. Степанов // Инновации молодёжной науки – Тезисы докладов 19 (ежегодной) конференции студентов, аспирантов и молодых учёных института ПТиО ВШПМ СПбГУПТД, 2016. – С. 179.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

S-модели анализа процессов перемотки рулонных материалов

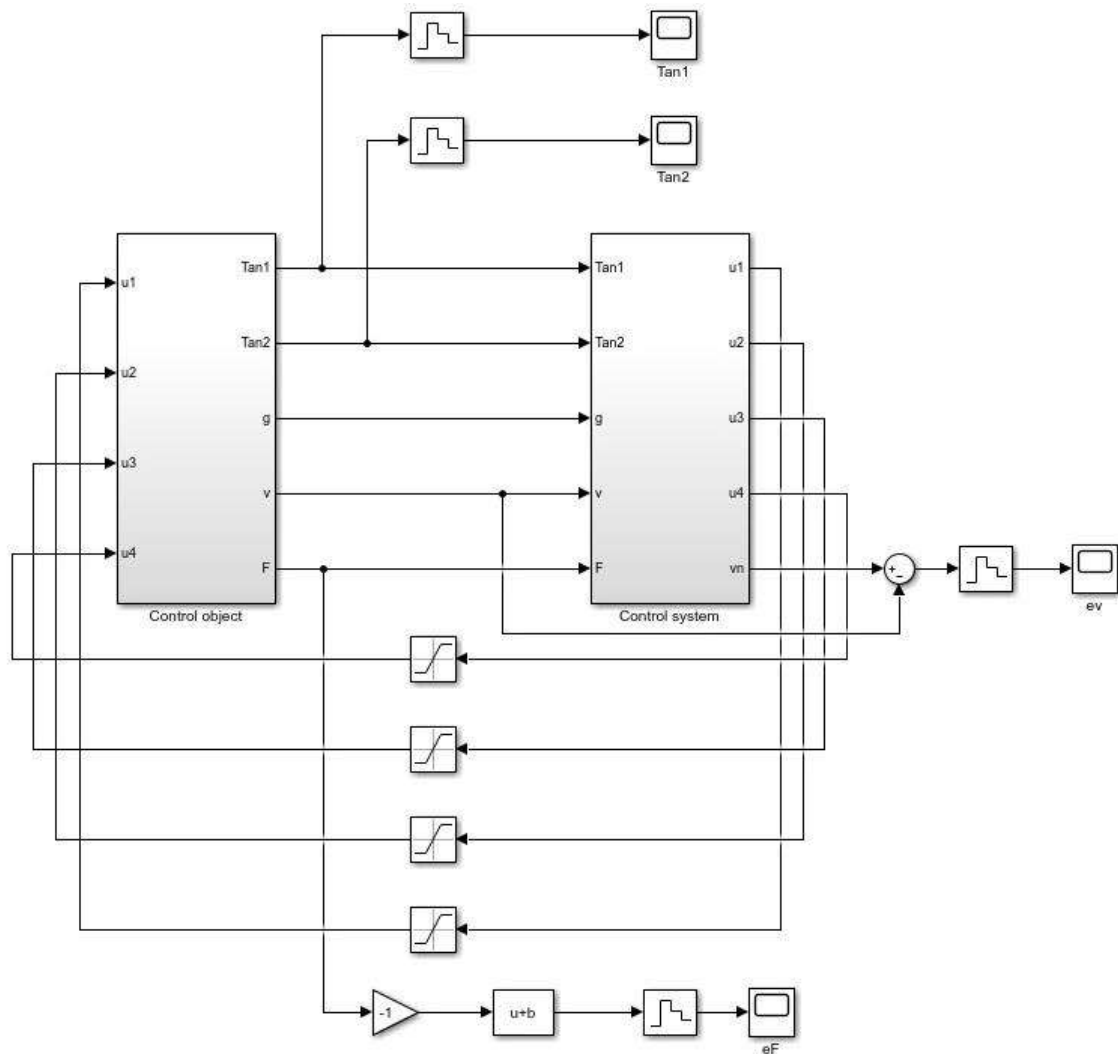


Рисунок А.1 – S-модель перемоточной машины и системы управления
(Общая схема)

Продолжение приложения А

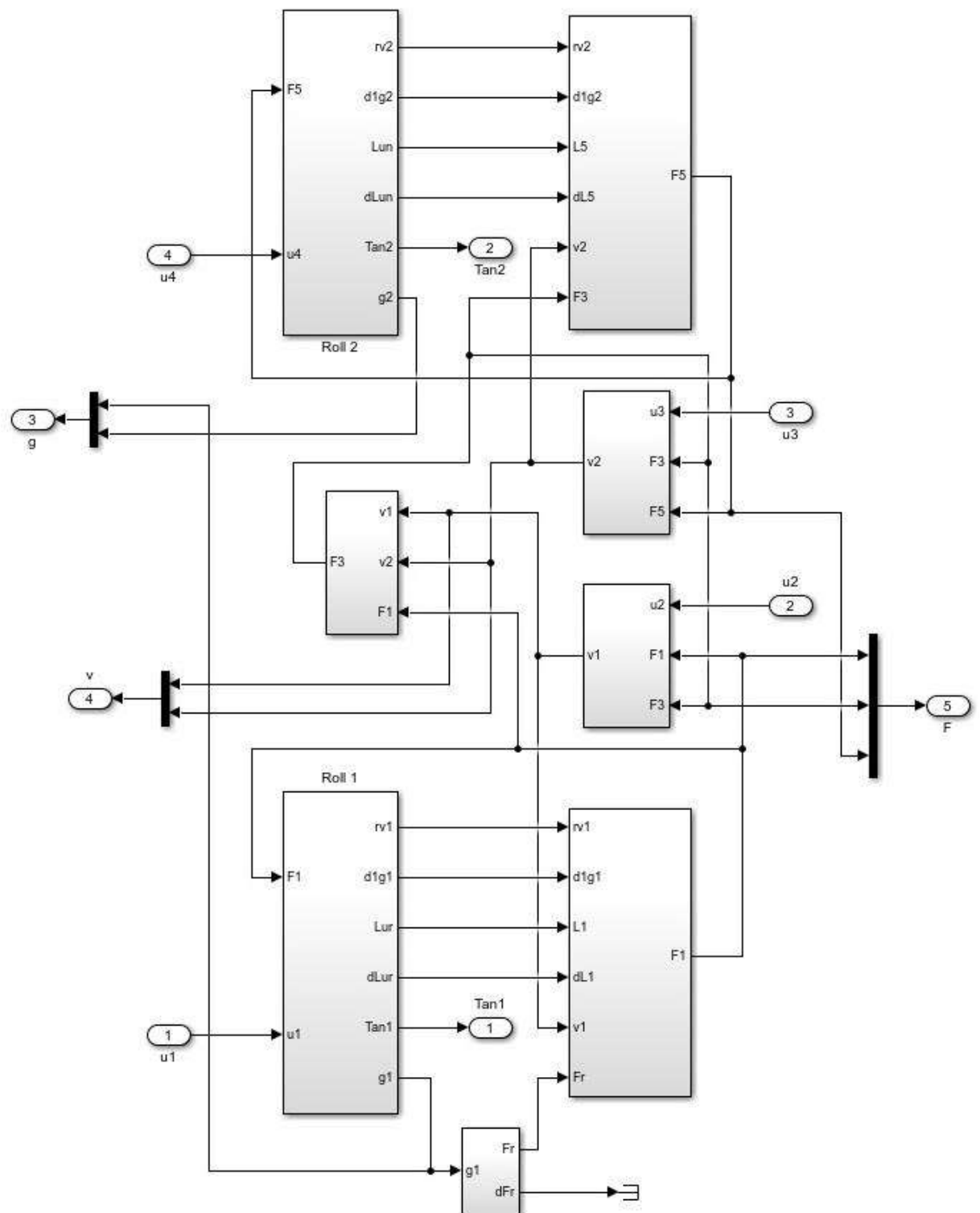


Рисунок А.2 – S-модель объекта управления

Продолжение приложения А

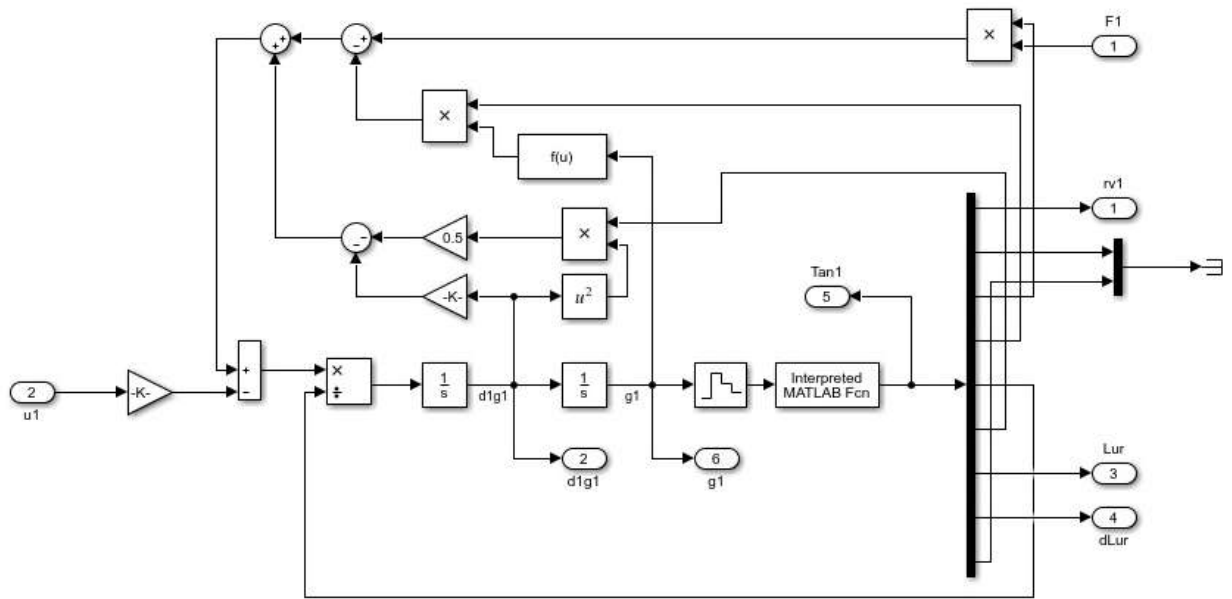


Рисунок А.3 – S-модель рулона размотки

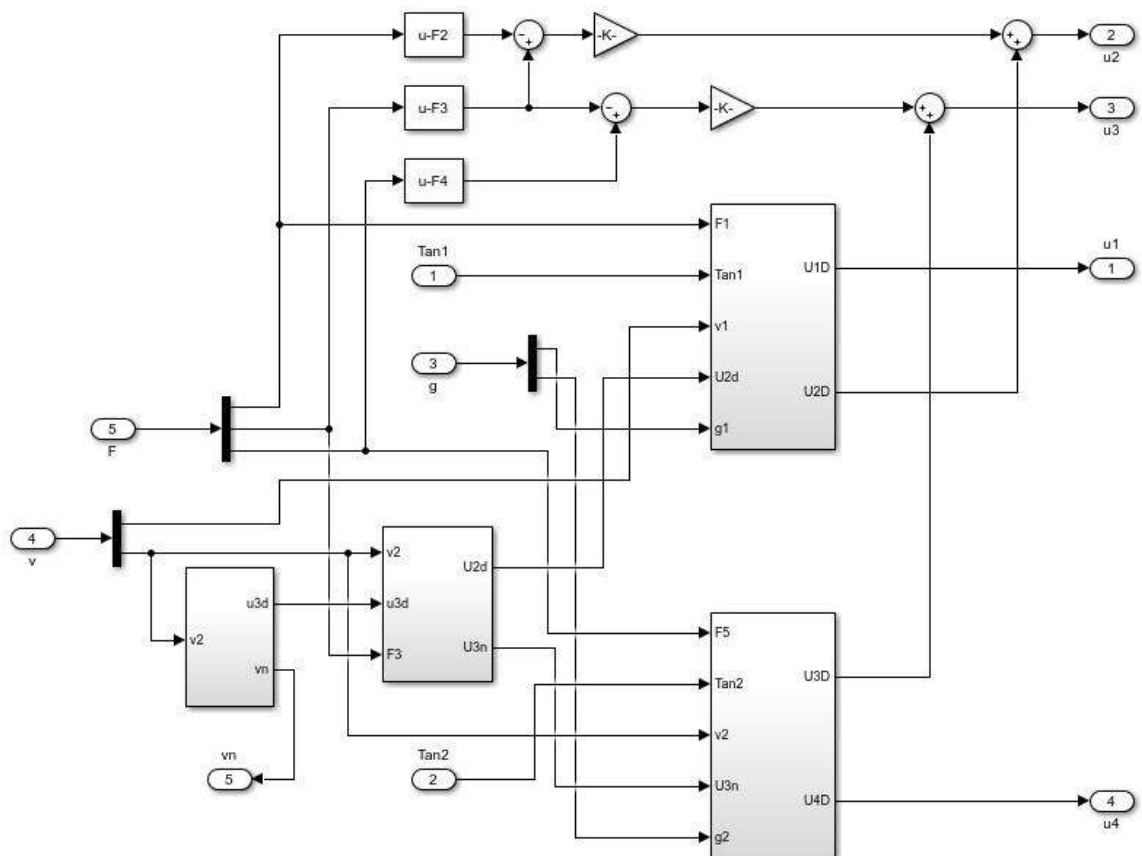


Рисунок А.4 – S-модель системы управления

Продолжение приложения А

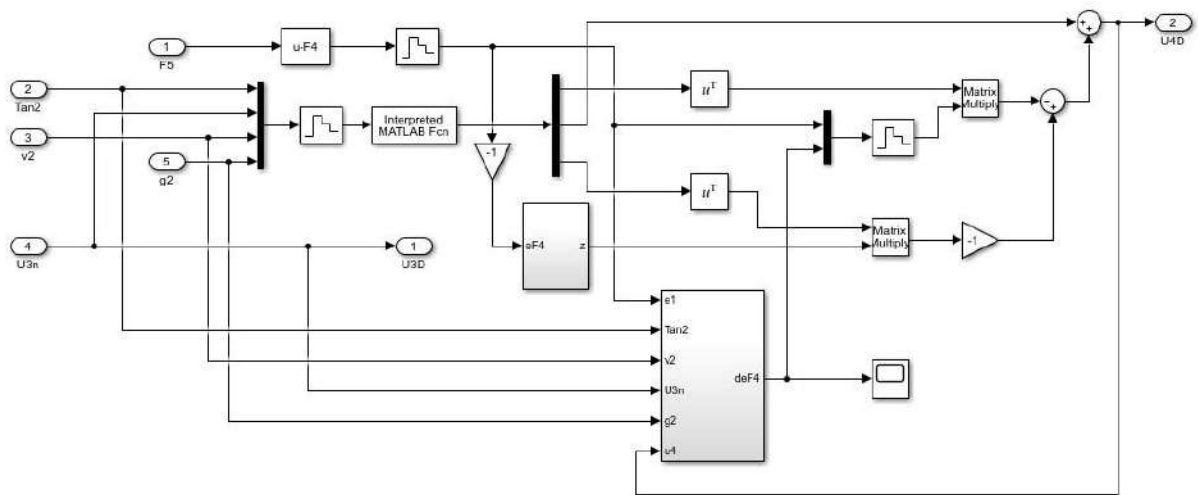


Рисунок А.5 – S-модель системы управления участком намотки

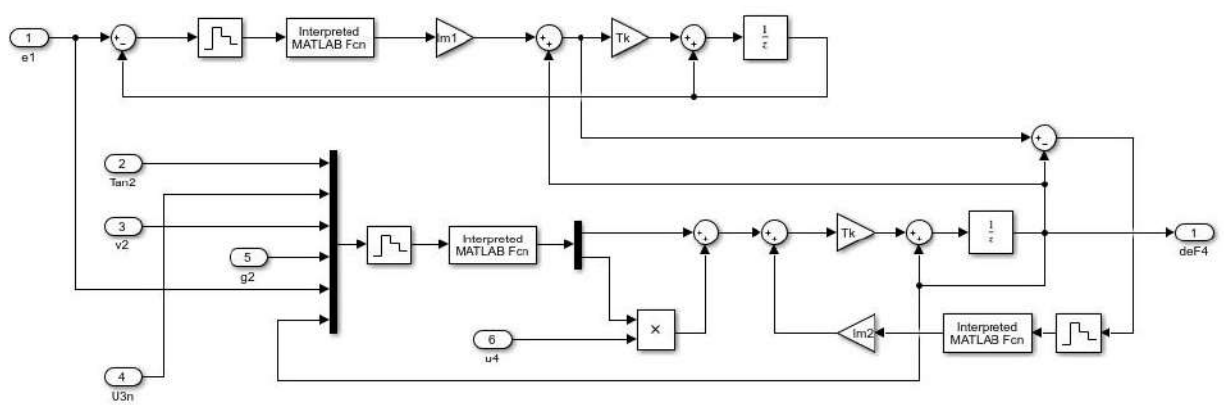


Рисунок А.5 – S-модель наблюдателя со скользящим режимом

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Акты об использовании результатов диссертационной работы

УТВЕРЖДАЮ

Генеральный директор
АО «СПб Образцовая Типография»
Юридический адрес: 197374, г.
Санкт-Петербург, ул. Мебельная, д.
3, литера а

 А.Г. Филатов

« 14 » 04. 2025 г.

АКТ

Об использовании результатов диссертационной работы
Степанова Петра Евгеньевича
«Анализ и управление процессами перемотки рулонных материалов в
машинах полиграфического производства»

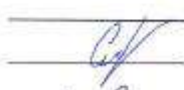
Принципы управления процессами перемотки рулонных материалов, предложенные в диссертации, и разработанные на их основе математические модели узлов оборудования допечатных и постпечатных операций, а также программное обеспечение для исследования колебаний полотна бумаги в процессе перемотки могут быть рекомендованы к внедрению в условиях полиграфического производства.

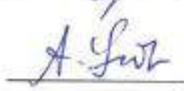
Предлагаемое в диссертации программное обеспечение позволяет по заданным параметрам бумаги выполнить моделирование поперечного сечения рулона. Разработанная методика даст возможность совершенствовать технологические операции по размотке и намотке рулонного материала и служит дополнительным описанием процесса и средством регулировки и настройки полиграфического оборудования.

Заместитель начальника
производственного отдела
АО «СПб Образцовая Типография»

Соискатель
Научный руководитель
д. т. н., доцент

  Лукин А.И.

 Степанов П. Е.

 Усов А. Г.

Продолжение приложения Б

УТВЕРЖДАЮ

Директор
 ООО "ТИПОГРАФИЯ ЛИТАС +"
 Юридический адрес: 190020,
 г. Санкт-Петербург,
 вн.тер.г. Муниципальный Округ
 Екатерингофский,
 ул Лифляндская, д. 3, литера О,
 помещ. 2-Н

«23» 04.2025

Федотов О.В.

г.

АКТ

Об использовании результатов диссертационной работы
 Степанова Петра Евгеньевича
 «Анализ и управление процессами перемотки рулонных материалов в
 машинах полиграфического производства»

Предложенные в диссертации математические модели узлов размотки и намотки рулонных материалов в машинах полиграфического производства, алгоритмы и программы для расчета и анализа движения полотна, перемещаемого в процессе перемотки, апробированы в условиях производства. Разработанные методики и программное обеспечение для расчета и анализа движения полотна позволяют выдавать рекомендации по проектированию, настройке и управлению оборудованием, предназначенным для работы с ролями бумаги разных типов.

Предлагаемая в диссертации методика, математическое и программное обеспечение открывают возможность совершенствовать машины и обеспечивать эффективное выполнение технологических операций по размотке и намотке рулонного материала на различной технике полиграфического производства.

Директор
 ООО "ТИПОГРАФИЯ ЛИТАС +"
 Соискатель
 Научный руководитель
 д. т. н., доцент

 Федотов О.В.
 Степанов П. Е.
 Усов А. Г.

Продолжение приложения Б

УТВЕРЖДАЮ

Генеральный директор
 ООО «РостБалт»
 Гаврилов Владимир Валентинович
 Юридический адрес:
 197374, г.Санкт-Петербург, ул.
 Оптиков, д. 4 корпус 506 литера а,
 пом. 13-н



АКТ

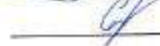
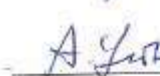
Об использовании результатов диссертационной работы
 Степанова Петра Евгеньевича
 «Анализ и управление процессами перемотки рулонных материалов в
 машинах полиграфического производства»

Алгоритмы управления узлами размотки и намотки полиграфического оборудования, программы для расчета управляющих воздействий приводов узлов и машин, обеспечивающих перемещение рулонного материала, апробированы в условиях производства.

Разработанное программное обеспечение для получения согласованного движения приводов перемоточных машин, позволяют выдавать рекомендации по проектированию и настройке допечатного и постпечатного оборудования, работающего с рулонами бумаги, имеющими различные механические характеристики.

Предлагаемый в диссертации метод синтеза алгоритма управления и программ для моделирования геометрических характеристик узлов размотки и намотки обеспечивают возможность совершенствовать принтмедиа-системы и технологические операции полиграфического производства.

Генеральный директор
 ООО «РостБалт»
 Соискатель
 Научный руководитель
 д. т. н., доцент

 Гаврилов В.В.
 Степанов П. Е.
 Усов А. Г.