

Автономная некоммерческая организация  
дополнительного профессионального образования  
«Научно-образовательный центр воздушно-космической обороны  
«Алмаз – Антей» им. академика В. П. Ефремова»

На правах рукописи



**Рязанский Валерий Павлович**

**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ПРОИЗВОДСТВА  
ИЗДЕЛИЙ МАШИНОСТРОЕНИЯ НА ОСНОВЕ РАЗРАБОТКИ  
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО  
ИНСТРУМЕНТАРИЯ**

2.5.22. Управление качеством продукции. Стандартизация. Организация  
производства

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
профессор С.В. Юдин

Москва – 2025

## Оглавление

Оглавление.....	2
Введение.....	7
Актуальность темы исследования. ....	7
Степень разработанности темы исследования .....	8
Для достижения поставленной цели поставлены задачи: .....	9
Научная новизна:.....	9
Положения, выносимые на защиту. ....	10
Глава 1. Роль контрольных карт при механообработке изделий машиностроения: основы, преимущества и проблемы внедрения .....	12
1.1. Контрольные карты Шухарта: роль и современные тенденции в применении .....	12
1.2. Основы контрольных карт кумулятивных сумм (CUSUM) .....	13
1.3. Применение CUSUM-карт в процессе шлифования.....	14
1.4. Сравнение CUSUM-карт с другими методами статистического контроля качества .....	15
1.5. Особенности при внедрении контрольных карт в машиностроении .....	16
1.6 Индекс воспроизводимости процесса шлифования ( $Cp$ , $Cpk$ ): понятие, методы оценки и значимость .....	17
1.6.1 Определения и основные формулы.....	17
1.6.2 Физическая интерпретация индекса воспроизводимости для шлифования .....	18
1.6.3 Статистическая оценка индексов с помощью параметрических, непараметрических и Байесовских методов .....	19
1.6.4 Связь индекса воспроизводимости $Cp/Cpk$ с контрольными картами. ....	20
1.6.5 Значимость индекса воспроизводимости производственного процесса .....	20
1.6.6 Ограничения при вычислении индекса воспроизводимости.....	21
1.7 Средняя длина серии (ARL) для карт Шухарта и карт кумулятивных сумм, ошибки I и II рода и связь с последовательным анализом Вальда .....	22
1.7.1 Понятие средней длины серии.....	22
1.7.2 ARL для классических карт Шухарта.....	23
1.7.3 Среднее время до ложного сигнала для карт CUSUM .....	23
1.7.4 Взаимосвязь с последовательным тестом отношения правдоподобия (SPRT) .....	24
1.7.5 Настройка контрольных карт и рекомендации по применению в процессе шлифования .....	24
1.8 Влияние усовершенствованных контрольных карт и методов оптимизации на индекс воспроизводимости процесса шлифования .....	25
1.8.1 Теоретическое обоснование влияния контрольных карт на показатели $Cp/Cpk$ .....	25
1.8.2 Анализ эффективности усовершенствованных контрольных карт .....	26
1.8.3 Методология оптимизации параметров контроля .....	27
1.8.4 Интеграционная составляющая с системой управления процессом .....	27

Выводы по главе 1 .....	28
Глава 2. Разработка научно-практического статистического инструментария управления качеством для усовершенствованных карт Шухарта и карт кумулятивных сумм .....	31
2.1. Построение контрольной карты для слежения за изменчивостью процесса на основе стандартного отклонения с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге.....	31
2.1.1. Постановка задачи и допущения .....	31
2.1.2. Распределительные свойства статистики $S$ .....	32
2.1.3. Классическая $S$ -карта с фиксированными пределами.....	34
2.1.4. Средняя длина серии: определение и связь с вероятностью выхода.....	35
2.1.5. Влияние объёма подгруппы $n$ на $ARL_0$ и $ARL(\varepsilon)$ .....	36
2.1.6. $S$ -карта с переменной длиной серии .....	37
2.1.7. Оптимизация параметра $k$ .....	38
2.1.8. Чувствительные места и практические рекомендации .....	40
2.1.9. Табличная реализация .....	43
2.2 Построение контрольной карты средних с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге.....	45
2.2.1. Постановка задачи и основные обозначения .....	45
2.2.2. Показатель средней длины серии и критерий оптимальности.....	46
2.2.3. Связь коэффициента $k$ , уровня ложных тревог и целевого значения $ARL_0$ .....	47
2.2.4. Математическая формулировка условной оптимизационной задачи по параметру $k$ ..	48
2.2.6. Теоретические и практические преимущества оптимизированной $X$ -карты и область её применения .....	51
2.3 Построение контрольной карты размахов для мониторинга изменчивости процесса с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге .....	57
2.3.1. Модель процесса и постановка задачи контроля изменчивости.....	57
2.3.2. Распределение размаха выборки и функция распределения нормированного размаха $Gn(z)$ .....	58
2.3.3. Классическая карта размахов: моменты размаха и границы $d_2 \pm 3d_3$ .....	58
2.3.4. Карта размахов с переменной шириной контрольной зоны .....	59
2.3.5. Оптимационная постановка: минимизация $ARL_1(k, \varepsilon)$ при ограничении на $ARL_0$ ..	62
2.3.6. Алгоритм численного поиска оптимального коэффициента $k_{opt}$ .....	64
2.3.7. Сравнение оптимизированной R-карты с классической R-картой .....	68
2.4 Построение контрольной карты средних на основе винзорированного среднего.....	73
2.4.1. Постановка задачи и основные определения .....	73
2.4.2. Вероятностный анализ выхода за контрольные границы .....	76
2.4.3. Оптимационная постановка и определение оптимального параметра $k$ .....	78
2.4.4. Оценка выигрыша винзоризованной карты при «грязной нормали» .....	81

2.4.5. Таблицы оптимальных настроек и пример применения метода .....	85
<b>2.5 Построение контрольной карты изменчивости на основе винзоризованной дисперсии.....</b>	<b>88</b>
2.5.1. Математическая модель процесса и основные обозначения.....	88
2.5.2. Статистические характеристики $S(W, h)$ при нормальном процессе.....	90
2.5.3. Аппроксимация распределения статистического критерия .....	92
2.5.4. Построение контрольных границ с регулируемым коэффициентом $k$ .....	95
2.5.5. Вероятностный анализ попадания в зону контроля и оптимизация ширины контрольной зоны .....	97
2.5.6. Количественная оценка выигрыша винзорированной S-карты при «грязной нормали» .....	100
2.5.7. Таблицы оптимальных настроек и пример применения метода .....	103
<b>2.6. Разработка научно-практического статистического инструментария управления качеством для карт кумулятивных сумм.....</b>	<b>107</b>
2.6.1 Методология расчёта ARL .....	108
2.6.2 Табличные значения $ARL_0$ как функция параметров $k$ и $h$ .....	110
2.6.3 Обратная задача: построение таблицы для определения порога $h$ по параметрам $k$ и заданному $ARL_0$ .....	112
2.6.4 Проверка точности: сравнение значений $ARL_0$ , вычисленных по цепям Маркова и методом Монте-Карло .....	114
2.6.5 Таблица значений $ARL_1$ при заданном сдвиге процесса .....	116
2.6.6 Учёт дисперсии длины серии при вычислении параметров CUSUM-схемы .....	117
2.6.7 Рекуррентная формула для начальных моментов длины серии.....	122
2.6.8 Развитие CUSUM-карты для контроля изменчивости процесса на основе выборочного стандартного отклонения .....	124
2.6.9 Применение таблиц параметров CUSUM-карты на основе $\log S^2$ .....	127
2.6.10 Таблица SDRL и квантилей для CUSUM-схемы на $\log S^2$ .....	130
2.6.11 Таблица ATS и частоты срабатываний для CUSUM-схемы на $\log S^2$ .....	134
<b>2.7 Сводная оценка влияния разработанных контрольных карт на показатели воспроизводимости процессов шлифования .....</b>	<b>137</b>
2.7.1 Цель и постановка.....	137
2.7.2 Результаты численного моделирования .....	137
2.7.3 Результаты производственных испытаний.....	138
<b>Выводы по главе 2.....</b>	<b>139</b>
<b>Глава 3. Комплексная оптимизация пар контрольных карт: сочетание статистической эффективности, экономических потерь и робастности для процессов механообработки.....</b>	<b>141</b>
<b>3.1 Метод выбора оптимальной пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса механообработки изделий машиностроения.....</b>	<b>141</b>
3.1.1. Постановка задачи .....	141

3.1.2. Система критериев: эффективность, интегральная чувствительность и робастность	142
3.1.3. Теоретические основы критериев .....	143
3.1.4. Статистическая взаимосвязь критериев и её влияние на выбор .....	146
3.1.5. Нормализация критериев для их совместного использования.....	147
3.1.6. Выбор весовых коэффициентов и режимы «чистоты» данных .....	151
3.1.7. Интегральный балл и анализ чувствительности ранжирования .....	152
3.1.8. Критерии совместимости карт и алгоритм формирования пар.....	155
3.1.9. Экспериментальная валидация методики многокритериального выбора.....	159
Выводы по разделу 3.1.....	160
3.2 Метод определения оптимальной средней длины контрольной карты .....	161
3.2.1. Постановка задачи и двойственная природа оптимизации .....	161
3.2.2. Экономико-статистический критерий оптимизации .....	163
3.2.3. Допущения модели и проверка их корректности .....	165
3.2.4. Ключевые параметры оптимизационной модели .....	167
3.2.5. Оптимизация контрольных карт уровня.....	169
3.2.6. Двумерная оптимизация парных схем контроля уровня и изменчивости .....	172
3.2.7. Экспериментальная апробация оптимизированных параметров .....	175
3.2.8. Анализ чувствительности оптимального решения.....	177
3.3 Обоснование критериев через начальные моменты длины серии CUSUM-карт .....	179
3.3.1. Ограничения традиционных характеристик ARL и необходимость анализа распределения длины серии RL .....	179
3.3.2. Спектральный критерий устойчивости: роль матрицы переходов и условия $\rho(R) < 1$ .....	182
3.3.3. Связь спектрального радиуса с критериями RE–AUC–RR.....	183
3.3.4. Алгоритм вычисления спектрального радиуса и моментов длины серии .....	185
3.3.5. Практическая проверка корректности параметров CUSUM-карт перед оптимизацией .....	186
3.3.6. Числовой пример для процесса шлифования.....	187
Выводы по разделу 3.3 .....	189
Выводы по главе 3 .....	190
Глава 4 Интегрированное статистическое управление качеством врезного шлифования беговых дорожек подшипников.....	192
4.1 Введение и постановка задачи .....	192
4.1.1 Необходимость замкнутого контура .....	192
4.1.2 Цели главы и задачи математического моделирования .....	193
4.2 Архитектуры управления шлифованием .....	194
4.2.1 От классических схем к современным системам с приборами активного контроля ..	194

4.2.2 Сравнительный анализ быстродействия, точности и стоимости .....	195
4.3 Цифровые регуляторы и авто-настройка .....	197
4.3.1 Структура контура: измеряемые переменные и исполнительные каналы.....	197
4.3.2 Методы и ограничения автотонастройки ПИД-регуляторов.....	198
4.4 Математические модели процесса.....	201
4.4.1 Детерминированная фазовая модель: ОДУ и устойчивость.....	201
4.4.2 Стохастическая модель (процесс Итô) .....	202
4.4.3 Верификация и калибровка: $\kappa_c, \beta, \gamma$ ; критерии RMSE/AIC/нормальность .....	203
4.5 Индекс воспроизводимости процесса $Cp^*$ : «до» и «после» внедрения контрольных карт.	204
4.5.1 Методика расчёта $Cp^*$ из траекторий стохастической модели .....	204
4.5.2 Результаты «до»: базовые PID-настройки без статистического контроля.....	206
4.5.3 Результаты «после»: интеграция пар контрольных карт .....	209
4.5.4 Статистическая значимость изменений: критерий Манна–Уитни, $\delta$ -метод, эффект-размера и мощность теста .....	214
4.6 Практические рекомендации и регламент внедрения .....	217
4.6.1 Технологическая интеграция в контур CNC/MES: обмен данными и управление событиями.....	217
4.6.2. Пилотное внедрение, мониторинг стабильности и механизмы безопасного отката .	218
4.6.3 Перенастройка для новой номенклатуры изделий .....	218
Выводы по главе 4.....	220
Заключение .....	222
<b>ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ .....</b>	<b>222</b>
Список литературы .....	224
Приложение А. Акт внедрения результатов диссертации .....	237
Приложение Б. Таблица значений $ARL0(k, h)$ для односторонней CUSUM .....	238
Приложение В. Таблица порогов $h$ для односторонней CUSUM в зависимости от $k$ и $ARL0$ .	248
Приложение Г. Таблица параметров $ARL1$ , $k$ и $h$ односторонней CUSUM по заданному сдвигу $\delta$ .....	251
Приложение Д. Таблица значений $SDL0(k, h)$ для односторонней CUSUM.....	254

## **Введение**

### **Актуальность темы исследования.**

В соответствии с Указом Президента РФ № 474 от 21.07.2020г. «О национальных целях развития РФ до 2030 года» особое внимание уделяется повышению эффективности производственных процессов и качества отечественной продукции. Национальный проект «Средства производства и автоматизации», реализуемый в рамках данного Указа, ставит задачу развития высокотехнологичного станкостроения и модернизации производственных процессов, что невозможно без совершенствования инструментов контроля качества.

Стабильность и точность производственных процессов в машиностроении определяют качество и надёжность изделий, в частности транспортных средств, которые эксплуатируются в тяжёлых климатических условиях, например, в Арктической зоне. Согласно данным исследований, проведённых для условий эксплуатации транспортной техники, частота отказов узлов и агрегатов грузовых тягачей существенно возрастает при эксплуатации в экстремальных климатических условиях и на некачественных дорогах. В подобных условиях до 65 % отказов связаны с узлами, детали которых изготавливаются посредством высокоточной механической обработки, в том числе шлифованием, такие как шестерни и подшипники трансмиссии.

В условиях реализации Национального проекта «Средства производства и автоматизации» особую значимость приобретает разработка усовершенствованных методов контроля качества механообработки, позволяющих обеспечить требуемый уровень надёжности изделий при эксплуатации в экстремальных условиях.

Несмотря на широкое распространение инструментов статистического управления процессами (SPC), существующие методики контроля в основном ориентированы на массовые стабильные процессы и нормальное распределение выходных параметров. В условиях высокоточной шлифовки, характеризующейся асимметричными, автокоррелированными выборками и жёсткими допусками, традиционные карты Шухарта и CUSUM теряют как чувствительность, так и специфичность: они запаздывают с обнаружением реальных сдвигов и, наоборот, реагируют на «ложный» сигнал. Отсутствие адаптивных критериев напрямую снижает индекс воспроизводимости, что ведёт к росту доли скрытого брака, который проявляется уже в процессе эксплуатации техники.

В связи с этим возникает объективная необходимость разработки и внедрения усовершенствованных контрольных карт, которые позволяют более тонко настраивать параметры контроля, что повысит чувствительность к реальным отклонениям и устойчивость к «шумовым» воздействиям. Разработка таких методик, а также обоснование подходов для выбора оптимальных параметров контрольных карт является важнейшей задачей, способствующей росту общей эффективности инструментов SPC. Это в свою очередь приведёт к повышению

индекса воспроизводимости процессов механообработки изделий машиностроения, что повысит качество и надёжность техники.

Таким образом, актуальность исследования обусловлена необходимостью повышения эффективности статистического управления процессами SPC в машиностроении, особенно при производстве ответственных узлов транспортных средств, детали которых подвергаются высокоточной механической обработке.

### **Степень разработанности темы исследования**

Статистические основы управления качеством заложил У. Шухарт, разработав концепцию контроля стабильности процессов и цикл PDCA. Дальнейшее развитие методологии связано с работами Г. Доджа, Х. Роминга, Д. Деминга, Дж. Джурана, А. Фейгенбаума и Ф. Кросби, которые внесли существенный вклад в развитие выборочного контроля, распространение статистического управления качеством (СУК) и создание основ тотального управления качеством.

В период с 1950-х по 1980-е годы японская школа в лице К. Исиакавы, Г. Тагути и Х. Кумэ обогатила методологию новыми инструментами, сделав статистические методы доступными для широкого круга работников и связав качество продукции с экономическими показателями. Это способствовало интеграции статистических подходов в международные стандарты ISO 9000.

В СССР развитие управления качеством шло по двум направлениям - нормативному и научно-методическому. Важным шагом стало принятие ГОСТ 15467-79, который создал единую терминологическую базу, а затем ГОСТ 40.9000 адаптировал международные стандарты к условиям плановой экономики.

Российская научная школа внесла существенный вклад в развитие статистических методов благодаря работам Б.А. Дубовикова, Ю.П. Адлера, А.И. Орлова, В.И. Гиссина, А.М. Кузьмина и других исследователей. Их труды позволили перейти от простого контроля к системному процессу управления качеством на основе статистических методов.

Проведённый анализ научной литературы показывает, что, несмотря на значительный теоретический и прикладной вклад отечественных и зарубежных исследователей в развитие SPC, по-прежнему отсутствует научно-практические методы, которые, с одной стороны, увязывают параметры шлифовального процесса (шероховатость, сила резания, температурные поля) с пороговыми значениями статистических критериев, с другой стороны, позволяет целенаправленно повышать индекс воспроизводимости именно для прецизионной обработки деталей трансмиссий.

**Цель работы** - разработка научно-практического статистического инструментария контроля качества для повышения индекса воспроизводимости процесса механообработки при производстве изделий машиностроения.

**Объектом исследования** является статистическое управление процессами механообработки изделий машиностроения.

**Предметом исследования** выступают методы и модели построения и совершенствования инструментов качества - контрольных карт и карт кумулятивных сумм.

**Для достижения поставленной цели поставлены задачи:**

1. Провести анализ существующих контрольных карт и определить их влияние на индекс воспроизводимости процесса механообработки изделий машиностроения.

2. Разработать статистический инструментарий контроля качества процесса механообработки при производстве изделий машиностроения для карт кумулятивных сумм на основе выборочного среднего, стандартного отклонения в широком диапазоне параметров карты и объема подгрупп.

3. Разработать контрольные карты на основе выборочного среднего, стандартного отклонения, винзоризованного среднего и винзоризованной дисперсии с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге в процессе механообработки изделий машиностроения.

4. Разработать метод определения оптимальной средней длины контрольной карты на основе многокритериальной оптимизации по стоимости брака и стоимости «ложной тревоги» при производстве изделий машиностроения.

5. Разработать метод выбора оптимальной пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса механообработки изделий машиностроения.

6. Провести апробацию разработанных научно-практических статистических инструментов контроля качества процесса механообработки.

**Научная новизна:**

1. Разработан статистический инструментарий контроля качества процесса механообработки при производстве изделий машиностроения для карт кумулятивных сумм на основе выборочного среднего, стандартного отклонения, включающий таблицы для выбора параметров карты, рекурсивные формулы начальных моментов и отличающийся тем, что построен в широком диапазоне параметров карты и объема подгрупп.

2. Разработаны контрольные карты на основе выборочного среднего, стандартного отклонения, винзоризованного среднего и винзоризованной дисперсии, которые в отличие от существующих карт Шухарта обладают минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге в процессе механообработки изделий машиностроения.

3. Предложен метод определения оптимальной средней длины контрольной карты, отличающейся тем, что использует многокритериальную оптимизацию по стоимости брака и стоимости «ложной тревоги» при производстве изделий машиностроения.

4. Разработан метод выбора оптимальной пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса механообработки изделий машиностроения, отличающийся тем, что основан на трех критериях, характеризующих контрольные карты.

**Теоретическая значимость работы** состоит в обобщении и развитии существующих методов статистического контроля качества производственных процессов механообработки.

**Практическая значимость работы** заключается в том, что разработанный метод выбора оптимальной пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса механообработки изделий машиностроения позволяет строить выбор для разных участков производства и может быть практически использован на предприятиях машиностроительной отрасли. Практическое применение предложенных в диссертации методов при механообработке изделий машиностроения позволит улучшить контроль за качеством изделий и оперативно устранять причины отклонений в процессе.

Результаты научной работы внедрены в Акционерном обществе «Брянский автомобильный завод» (АО «БАЗ») (г. Брянск, Брянская область). Результатом внедрения стало повышение индекса воспроизводимости процесса механообработки изделий машиностроения. Акт внедрения результатов диссертации в Акционерном обществе «Брянский автомобильный завод» (АО «БАЗ») № 334 от 28.11.2025г находится в приложении А.

### **Методология и методы исследования**

При решении поставленных задач использовались: математическая статистика, теория вероятностей, численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы для решения стохастических дифференциальных уравнений, методы математического моделирования, метод симуляции Монте-Карло.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Статистический инструментарий контроля качества для карт кумулятивных сумм на основе выборочного среднего, стандартного отклонения, включающий таблицы для выбора параметров карты, рекурсивные формулы начальных моментов, который позволяет реагировать на небольшие отклонения по уровню и изменчивости, а также повысить индекс воспроизводимости процесса механообработки изделий машиностроения.

2. Разработаны контрольные карты на основе выборочного среднего, стандартного отклонения, винзоризованного среднего и винзоризованной дисперсии, позволяющие снизить уровень дефектов в процессе механообработки изделий машиностроения за счёт переменной средней длины серии контрольных карт.

3. Методы определения оптимальной средней длины контрольной карты и выбора оптимальной пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости, которые учитывают стоимость брака и стоимость «ложной тревоги» и обеспечивают повышение индекса воспроизводимости процесса мехобработки изделий машиностроения.

**Область исследований диссертации** соответствует пунктам 8, 9 паспорта специальности 2.5.22. «Управление качеством продукции. Стандартизация. Организация производства». Пункт 8. Разработка научно-практического статистического инструментария управления качеством, пункт 9. Разработка и совершенствование научных инструментов оценки, мониторинга и прогнозирования качества продукции и процессов.

## **Глава 1. Роль контрольных карт при механообработке изделий машиностроения: основы, преимущества и проблемы внедрения**

В первой главе рассмотрена роль контрольных карт в механообработке изделий машиностроения, изложены основы контрольных карт кумулятивных сумм. Изложено применение CUSUM-карт в процессе механообработки изделий машиностроения и их преимущества. Проведено сравнение CUSUM-карты с другими методами контроля. Рассмотрены основные особенности, возникающие при внедрении контрольных карт в машиностроении.

### **1.1. Контрольные карты Шухарта: роль и современные тенденции в применении**

Контрольные карты Шухарта являются одним из ключевых инструментов статистического контроля качества (СКК), широко применяемых в различных производственных процессах, включая шлифование. В последние годы применение контрольных карт Шухарта при механообработке изделий машиностроения претерпело значительные изменения благодаря развитию технологий и методологий управления качеством.

Рассмотрим роль контрольных карт Шухарта в механообработке изделий машиностроения и современные тенденции в применении. В частности, шлифование – это высокоточный процесс обработки материалов, требующий строгого контроля параметров для обеспечения качества поверхности и геометрических размеров детали. Контрольные карты Шухарта позволяют проводить мониторинг стабильности процесса путем выявления изменений в процессе, которые могут привести к дефектам, а также осуществлять раннюю диагностику проблем на основе быстрого обнаружения отклонений от нормы для своевременного принятия корректирующих мер. Сверх того, контрольные карты позволяют анализировать тенденции, отслеживая долгосрочные изменения и улучшения процессов на основе полученных данных [73].

Современные производственные системы все чаще интегрируют контрольные карты Шухарта с цифровыми технологиями на основе автоматизации сбора данных. При этом используются датчики и системы мониторинга для автоматического сбора параметров шлифования. Хранение и анализ данных проводится в реальном времени для более точного контроля и прогнозирования.

Оборудования и системы управления связываются для улучшения взаимодействия и быстрого реагирования на отклонения.

Современные подходы осваивают продвинутые аналитические методы: машинное обучение и искусственный интеллект для анализа сложных зависимостей и предсказание возможных отклонений на основе исторических данных, а также многомерные контрольные карты для одновременный мониторинг нескольких параметров процесса для комплексного контроля качества.

Применение контрольных карт Шухарта в механообработке изделий машиностроения приводит к повышению качества продукции в виде снижения уровня дефектов за счет своевременного обнаружения и устранения причин отклонений; увеличивает производительность за счет минимизации простоев и переработок благодаря более стабильному процессу; снижает затраты путем оптимизации использования материалов и ресурсов, уменьшение брака и затрат на контроль качества.

Наряду с картами Шухарта применяют еще контрольные карты кумулятивных сумм или CUSUM-карты. Данные карты являются мощным инструментом статистического контроля качества и применяются для мониторинга процессов с целью обнаружения малых, но постоянных отклонений от целевых значений. В контексте шлифования использование CUSUM-карт позволяет повысить эффективность контроля качества и своевременно реагировать на изменения в процессе. Рассмотрим подробнее применение контрольных карт кумулятивных сумм при механообработке изделий машиностроения.

## 1.2. Основы контрольных карт кумулятивных сумм (CUSUM)

Исторически первой схемой кумулятивных сумм была V-маска или схема Бернарда, однако она не получила широкого применения из-за сложности её использования. Более удобной оказалась рекурсивная форма схемы, известная как схема Пейджа. Принцип работы CUSUM-карты в том, что они отслеживают накопленные суммы отклонений характеристики качества от установленного целевого значения. В отличие от традиционных контрольных карт, которые анализируют отдельные точки данных, CUSUM учитывает последовательность данных, что позволяет быстрее выявлять небольшие сдвиги в процессе [43, 132, 151, 154, 128]. Существует два основных типа CUSUM-карт: Накопительные суммы, которые обнаруживают увеличение параметра.

$$C_n^+ = \max(0, C_{n-1}^+ + X_t - k), \quad C_0^+ = 0,$$

Накопительные суммы, которые обнаруживают уменьшение параметра.

$$C_n^- = \max(0, C_{n-1}^- + X_t - k), \quad C_0^- = 0,$$

Контрольная карта CUSUM сигнализирует об увеличении среднего, если  $C_n^+$  превышает интервал принятия решения  $h \cdot \sigma$  или об уменьшении среднего отклонения, если  $C_n^-$  становится менее-  $h \cdot \sigma$ .

X-карта Шухарта представляет собой частный случай CUSUM-схемы среднего при  $k = 3$  и  $h = 0$ . CUSUM-схема эквивалентна последовательному тесту Вальда отношения вероятностей, с тем отличием, что нулевая гипотеза никогда не принимается. После отклонения нулевой гипотезы схема CUSUM перезагружается и начинается заново. Основной характеристикой

CUSUM-схемы является длина серии - случайная величина, равная числу измерений или наблюдений до момента возникновения сигнала об особой причине.

Для вычисления средней длины серии (ARL) применяются три метода: интегральное уравнение Фредгольма второго типа, модель на основе цепей Маркова и метод Монте-Карло. Известно, что применение интегрального уравнения с последующим приближённым решением эквивалентно использованию цепей Маркова. Метод Монте-Карло является достаточно ресурсоёмким и обычно применяется для проверки решений, полученных другими методами. Таким образом, основным методом вычисления ARL является модель на основе цепей Маркова.

Стандарт ГОСТ Р ИСО 7870-4-2023 рекомендует использовать CUSUM-схемы для контроля уровня процесса на основе индивидуальных наблюдений или выборочного среднего. Для контроля изменчивости процесса стандарт предлагает применять CUSUM-схемы размаха и выборочного стандартного отклонения. В стандарте подробно описана CUSUM-схема среднего, тогда как схемы стандартного отклонения и размаха изложены менее подробно.

При заданной статистике, используемой в рекурсивных вычислениях кумулятивной суммы, CUSUM-схема полностью определяется двумя параметрами: спецификацией  $k$  и уровнем принятия решения  $h$ . После определения этих параметров средняя длина серии вычисляется однозначно с помощью модели на основе цепей Маркова. В CUSUM-схемах предполагается нормальное распределение характеристик качества. Интервал принятия решения  $h$  кумулятивной суммы делится на конечное число интервалов (обычно тысячу или две тысячи), на основе чего описываются состояния цепей Маркова и вычисляется матрица вероятностей переходов.

### **1.3. Применение CUSUM-карт в процессе шлифования**

CUSUM-карты в процессе механообработке изделий машиностроения применяются для мониторинга характеристик качества изделий. В механообработке изделий машиностроения важны такие характеристики качества, как: размеры и геометрия обрабатываемой детали, шероховатость, температурный режим, скорость подачи суппорта.

Процесс внедрения CUSUM-карт при механообработке изделий машиностроения включает следующие этапы.

- Определение целевых значений и допусков, для чего устанавливаются стандартные параметры процесса на основе требований к качеству.
- Сбор данных на основе регулярные измерения характеристики качества шлифования с использованием автоматизированных систем измерения.
- Расчет кумулятивных сумм проводят для каждого измерения и при этом рассчитывается отклонение от целевого значения и накапливается сумма отклонений.

- Определяются границы срабатывания, превышение которых сигнализирует о возможном отклонении процесса.
- При выходе кумулятивной суммы за границы выполняется анализ и поиск причины отклонения и принимаются корректирующие меры.

Преимущества применения CUSUM-карт при механообработке изделий машиностроения заключается в быстром обнаружение отклонений. CUSUM-карты эффективны в выявлении даже небольших, но постоянных изменений в процессе, которые могут быть незаметны на традиционных контрольных картах. Использование данных карт приводит к повышению качества продукции, за счет своевременного обнаружения и устранения отклонений, что способствует стабильному поддержанию высокого качества шлифованных деталей [14, 54]. Применение карт приводит к снижению производственных затрат за счет минимизации брака и переработок благодаря более точному контролю процессов. Повышение производственной эффективности обусловлено за счет быстрого реагирования на изменения, что позволяет поддерживать стабильный процесс. В итого это способствует увеличению производительности и снижению простоев.

#### **1.4. Сравнение CUSUM-карт с другими методами статистического контроля качества**

В то время как контрольные карты Шухарта хорошо подходят для обнаружения больших отклонений, CUSUM-карты более чувствительны к небольшим и постепенным изменениям, что делает их более эффективными для процессов, требующих высокой точности, таких как шлифование.

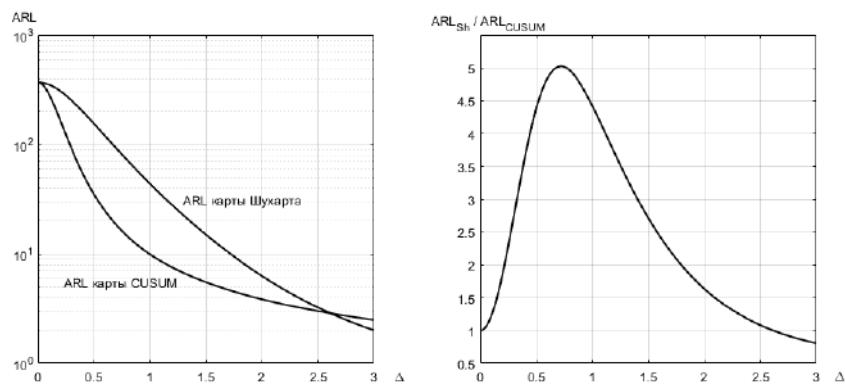


Рисунок 1 – Средняя длина серии карты Шухарта и карты кумулятивных сумм, отношение средней длины серии карты Шухарта к средней длине карты кумулятивных сумм

На левой диаграмме расположена средняя длина серии карты Шухарта и карты кумулятивных сумм, на правой диаграмме – отношение данных средних длин серий. Из левой диаграммы видно, что CUSUM-карты имеют в более чем четыре с половиной раза меньшую

среднюю длину серии, чем карты Шухарта, а следовательно, быстрее детектируют сдвиг, равный от половины до одного стандартного отклонения.

Экспоненциально взвешенные скользящие средние (EWMA) также эффективны для обнаружения малых сдвигов. Однако, CUSUM-карты проще в реализации и требуют меньших вычислительных ресурсов, что может быть преимуществом в некоторых производственных условиях.

Контрольные карты кумулятивных сумм (CUSUM) представляют собой эффективный инструмент статистического контроля качества, особенно полезный в высокоточных процессах шлифования. Их способность быстро обнаруживать малые, но постоянные отклонения делает их незаменимыми для обеспечения стабильности и высокого качества продукции. Несмотря на некоторые сложности при внедрении, преимущества CUSUM-карт существенно перевешивают возможные трудности, что способствует их все более широкому применению в современных производственных системах.

Внедрение контрольных карт в машиностроении представляет собой сложный процесс, требующий учета множества факторов. Несмотря на доказанную эффективность контрольных карт в обеспечении качества и стабильности производственных процессов, предприятия машиностроения сталкиваются с рядом особенностей при их интеграции.

### **1.5. Особенности при внедрении контрольных карт в машиностроении**

Основные особенности, возникающие при внедрении контрольных карт при механообработке изделий машиностроения [58, 133].

Трудности с качеством и доступностью данных выражаются в неполноте и неточности данных. Это является следствием ошибки при сборе данных.

Некорректные измерения или ошибки в регистрации данных могут привести к неверным выводам. Отсутствие стандартизации и использование различных методов измерения и записи данных могут затруднять их анализ.

Недостаточная частота сбора данных может замедлить обнаружение отклонений. Несвоевременность данных, а именно задержки в сборе и анализе данных могут препятствовать своевременному реагированию на проблемы.

При интеграции с существующими системами возникает проблема совместимость программного обеспечения. Новые системы контроля качества могут не интегрироваться с уже используемыми производственными системами. Сложности возникают при адаптации и модернизации оборудования и программного обеспечения для поддержки контрольных карт.

Еще одной сложностью является отсутствие автоматизации, что может усложнить и замедлить процесс сбора и анализа данных.

Выбор и настройка подходящих контрольных карт является важным элементом внедрения этого инструмента качества. Использование неподходящих типов контрольных карт для конкретных процессов может привести к неэффективному контролю.

Неправильная выбор и настройка параметров контрольных карт и контрольных границ может исказить результаты анализа. Недостаточное понимание статистических методов может привести к ошибкам в интерпретации данных. Неправильное понимание статистических основ может привести к неверным выводам и решениям.

При этом важно поддерживать и постоянно проводить улучшение системы контроля. Нехватка времени и ресурсов для регулярного обновления.

Многие методы со временем устаревают. Поэтому без регулярного пересмотра и обновления методов контроля качество может снижаться. Недостаточный контроль за эффективностью внедренных систем может привести к их деградации.

Необходимость адаптации к изменяющимся условиям обусловлена изменением производственных процессов. Внедрение новых технологий или изменение условий производства требует адаптации контрольных карт. Поэтому система должна быть достаточно гибкой, чтобы быстро реагировать на изменения в процессе производства.

## **1.6 Индекс воспроизводимости процесса шлифования ( $C_p$ , $C_{pk}$ ): понятие, методы оценки и значимость**

### **1.6.1 Определения и основные формулы**

Индексы  $C_p$  и  $C_{pk}$  являются ключевыми показателями оценки воспроизводимости и способности производственного процесса. Они позволяют количественно определить, насколько эффективно процесс способен производить продукцию в пределах установленных допусков. В данном контексте, USL (Upper Specification Limit) обозначает верхний предел допуска, а LSL (Lower Specification Limit) – нижний предел допуска.

Индекс  $C_p$  характеризует потенциальную способность процесса при условии его центрирования, то есть, когда среднее значение характеристик находится точно в центре диапазона допуска. Он рассчитывается по формуле:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

где  $\sigma$  – истинное стандартное отклонение характеристик качества процесса. Значение  $C_p$  больше 1.00 свидетельствует о том, что естественное рассеяние процесса ( $\pm 3\sigma$ ) полностью укладывается в диапазон допусков, что говорит о высокой стабильности и предсказуемости процесса.

Индекс Срк учитывает смещение среднего значения процесса относительно центра диапазона допуска.

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right\}$$

Он показывает реальную способность процесса производить продукцию в пределах требований, учитывая возможное смещение. Значения Срк также выше 1.00 свидетельствуют о хорошем уровне контроля и стабильности процесса.

Для практических целей, значение Ср и Срк выше 1.33 считается оптимальным, что соответствует шестисигмовому уровню качества. Такой уровень обеспечивает минимальный риск дефектов и высокую надежность производства. В частности, для операций точной обработки, таких как шлифование, значение 1.33 часто рассматривается как стандартный показатель высокого качества [67, 156].

Таким образом, использование индексов Ср и Срк является важным инструментом для оценки и улучшения производственных процессов, что способствует повышению качества продукции и снижению затрат на исправление дефектов.

### 1.6.2 Физическая интерпретация индекса воспроизводимости для шлифования

При точном фрезеровании беговых дорожек подшипников, допуски на размеры и шероховатость поверхности зачастую устанавливаются на уровне менее 10 мкм. Размах  $6\sigma$ , определённый на основе выборочных данных, напрямую связан с микроскопическими стохастическими колебаниями удаления материала, износом абразивного круга и термодеформационными эффектами, возникающими в процессе обработки. В результате, показатели Ср и Срк интегрируют в себе параметры, характеризующие точность станочного оборудования и приспособлений, стабильность работы абразивного инструмента, а также колебания режимных параметров резания, таких как скорость подачи (V), глубина резания (S) и температура (T). Кроме того, важным фактором является эффективность системы охлаждения, которая влияет на стабильность процесса и качество поверхности.

Высокий индекс воспроизводимости обработки способствует снижению числа корректирующих воздействий, что уменьшает удельную трудоёмкость и обеспечивает более предсказуемую шероховатость дорожек. Это, в свою очередь, ведёт к значительной экономии за счёт снижения уровня брака и необходимости переделок, а также увеличения ресурса эксплуатации подшипников. В результате, применение методов точной обработки и контроля параметров процесса позволяет повысить качество продукции, снизить издержки и обеспечить стабильность производственного процесса, что является ключевым аспектом в современных условиях высокотехнологичного машиностроения.

### 1.6.3 Статистическая оценка индексов с помощью параметрических, непараметрических и Байесовских методов

Для проведения статистической оценки индексов качества продукции или процессов применяются различные методологические подходы, включающие параметрические, непараметрические и Байесовские методы [137,145,153]. Каждый из этих подходов обладает своими преимуществами и ограничениями, что позволяет использовать их в зависимости от условий исследования и характеристик данных.

Параметрические методы предполагают наличие определённых предпосылок, таких как нормальность распределения и стационарность процесса. В рамках этих методов широко используется классическая оценка стандартного отклонения  $\sigma$ , которая основана на предположении о нормальном распределении данных.

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

При использовании контрольных карт для оценки  $\sigma$  применяются формулы,

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

где  $\bar{R}$  – среднее размахов подгрупп,  $\bar{S}$  – среднее стандартных отклонений,  $d_2$  – математическое ожидание размаха выборки из нормального стандартного распределения,  $c_4$  – математическое ожидание стандартного отклонения выборки из нормального стандартного распределения.

Непараметрические методы не требуют предположений о форме распределения данных, что делает их особенно полезными при наличии данных, не соответствующих нормальному распределению или при малых объёмах выборок. В таких случаях используют эмпирические квантили, например, 0,135% и 99,865%, для оценки индексов качества, таких как Ср и Срк.

Байесовский подход включает использование априорных распределений для оценки параметров, таких как  $\sigma$ . Это позволяет интегрировать экспертные знания и дополнительные источники информации в оценку. Байесовская оценка особенно эффективна при малых выборках, где традиционные методы могут быть менее точными. В таких случаях применяются байесовские доверительные интервалы, которые обеспечивают более надёжную оценку неопределенности.

Использование байесовских методов также позволяет учитывать экспертные оценки и дополнительные данные, что повышает точность и надёжность оценки индексов качества в условиях ограниченной информации.

#### 1.6.4 Связь индекса воспроизводимости $Cp/Cpk$ с контрольными картами.

Перед вычислением индекса воспроизводимости необходимо убедиться, что  $\bar{X}$ -карта показывает стабильность, что подтверждает, что выборочные данные пригодны для оценки  $Cp/Cpk$ . Для динамической оценки может быть использована CUSUM-карты, потому что она реагируют на сдвиг уровня процесса быстрее, тем самым предотвращают снижение  $Cpk$ .

#### 1.6.5 Значимость индекса воспроизводимости производственного процесса

Индекс воспроизводимости выступает ключевым метрическим инструментом оценки стабильности и качества технологического процесса. Его аналитическое значение проявляется в нескольких взаимосвязанных аспектах: экономическом, эксплуатационном, логистическом и нормативном [143].

Экономический аспект обусловлен прямой зависимостью затрат на брак от уровня воспроизводимости процесса. Математически снижение издержек  $\Delta C$  может быть аппроксимировано выражением  $\Delta C \approx k \cdot (1 - \Phi(USL, LSL))$ , где  $k$  - удельная стоимость брака, а  $\Phi(USL, LSL)$  - функция, отражающая долю продукции в пределах верхних и нижних спецификационных пределов ( $USL$  – верхний допустимый предел,  $LSL$  – нижний допустимый предел). Таким образом, повышение  $Cpk$  ведёт к сужению распределения выходного параметра относительно границ допуска, что статистически снижает вероятность появления несоответствующей продукции.

Надёжность изделия коррелирует с индексом воспроизводимости через функциональную зависимость наработки до отказа от  $Cpk$ . В частности, для подшипниковых узлов экспериментально установлено, что средняя наработка возрастает как  $f(Cpk)$ , где функция  $f$  отражает нелинейный характер улучшения ресурсных характеристик при повышении стабильности технологического процесса. Это обусловлено снижением дисперсии критических параметров сборки и материалов, что в итоге повышает предсказуемость эксплуатационных свойств.

Производственная логистика выигрывает от высокой воспроизводимости за счёт сокращения объёмов внутрицеховых складских запасов комплектующих. Стабильный процесс минимизирует необходимость резервирования деталей на случай брака или доработок, что оптимизирует оборотные средства и площадь складских зон. Снижение вариабельности процесса позволяет переходить к принципам «точно в срок», уменьшая издержки хранения и риски устаревания запасов.

Сертификация по стандартам ISO предъявляет формализованные требования к документальному подтверждению индексов воспроизводимости. В соответствии с

международными нормами, для прохождения аудита и поддержания сертификата качества необходимо демонстрировать значения  $Cp$  и  $Cpk$  не ниже 1,33. Данный порог соответствует уровню процесса, при котором не менее 99,73 % продукции укладывается в допуски (при условии нормальности распределения). Поэтому мониторинг и поддержание  $Cpk \geq 1,33$  становится не только технической, но и регуляторной необходимостью для предприятий, ориентированных на глобальные рынки.

В совокупности перечисленные аспекты демонстрируют, что индекс воспроизводимости  $Cpk$  выполняет роль интегрального показателя, связывающего технические параметры процесса с экономическими, логистическими и нормативными результатами деятельности предприятия.

#### 1.6.6 Ограничения при вычислении индекса воспроизводимости

При оценке воспроизводимости технологического процесса с использованием индексов  $Cp$  и  $Cpk$  необходимо учитывать ряд существенных ограничений, определяющих корректность их применения и достоверность получаемых результатов. Прежде всего, расчёт данных индексов строго регламентирован условием статистической управляемости процесса: их применение оправдано исключительно в отношении процессов, находящихся в состоянии статистической стабильности, где отсутствуют особые причины вариаций и распределение выходных параметров сохраняет устойчивость во времени. В случаях, когда распределение характеризуется наличием «тяжёлых хвостов», свидетельствующих о значительном отклонении от нормальности, использование традиционных индексов  $Cp$  и  $Cpk$  может привести к некорректным выводам. В подобных ситуациях целесообразно переходить к применению индекса  $C_{pm}$ , рассчитываемого на основе квантилей распределения (0,135 % и 99,865 %), что позволяет адекватно учитывать реальную форму распределения и обеспечивает более устойчивую оценку воспроизводимости процесса [68].

При этом индексы  $Cp$  и  $Cpk$  рассматриваются как универсальный индикатор воспроизводимости, в частности, применительно к шлифовальным процессам, однако их корректная интерпретация требует проведения предварительного статистического контроля с использованием контрольных карт (таких как карты и CUSUM), позволяющих верифицировать состояние статистической управляемости. Существенное значение имеет также учёт автокорреляционных зависимостей между последовательными измерениями, поскольку их игнорирование может приводить к смещению оценки стандартного отклонения  $\sigma$ . Для повышения устойчивости расчётов рекомендуется применять робастные методы оценки  $\sigma$ , минимизирующие влияние выбросов и отклонений от предположений нормальности.

Практическая значимость корректного вычисления индексов воспроизводимости проявляется в прямой связи между их повышением и достижением значимых производственных

эффектов: ростом экономической эффективности за счёт снижения затрат на брак и доработки, увеличением ресурса подшипников благодаря стабилизации ключевых параметров процесса, а также обеспечением соответствия требованиям международных стандартов качества, где минимально допустимые значения  $C_p \geq 1,33$  и  $C_{pk} \geq 1,33$  выступают обязательными критериями для прохождения сертификационных аудитов.

Таким образом, обоснованное применение индексов воспроизводимости предполагает комплексный подход, объединяющий статистический анализ, выбор адекватных метрик и учёт специфики технологического процесса.

### **1.7 Средняя длина серии (ARL) для карт Шухарта и карт кумулятивных сумм, ошибки I и II рода и связь с последовательным анализом Вальда**

#### 1.7.1 Понятие средней длины серии

Средняя длина серии контрольной карты, ARL- это математическое ожидание числа единичных наблюдений (или числа подгрупп) до момента первого сигнала контрольной карты. Длина серии контрольной карты - это дискретная случайная величина, принимающая значения  $k=1,2,3\dots$  с вероятностями  $(1 - P)^{k-1}P$ . Где  $P$  – вероятность выхода контролируемой характеристики качества за границы контрольной карты, за границы интервала  $(L_{CL}, U_{CL})$ :

$$P = 1 - P\{X \in (L_{CL}, U_{CL})\}$$

Вероятность выхода контролируемой характеристики качества за границы контрольной карты при отсутствии сдвига есть ошибка первого рода,  $\alpha$ .

Средняя длина серии по определению математического ожидания равна:

$$ARL = \sum k(1 - P)^{k-1}P = \frac{P}{1 - P} \sum k(1 - P)^k = \frac{P}{1 - P} \frac{1 - P}{P^2} = P^{-1} = \frac{1}{\alpha}$$

Различают два ключевых значения:

- **ARL<sub>0</sub>** – при управляемом состоянии, процесс не имеет сдвига по уровню или изменчивости
- **ARL<sub>1</sub>** – при выходе процесса из-под контроля, процесс смешён или дисперсия возросла.

Вероятность нахождения контролируемой характеристики качества внутри границ контрольной карты при наличии сдвига есть ошибка второго рода,  $\beta$ . Тогда

$$\beta = P\{X \in (L_{CL}, U_{CL})\} = 1 - P = 1 - \frac{1}{ARL_1}, \text{ тогда}$$

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

Чем выше  $ARL_0$ , тем реже ложные срабатывания (ошибка I рода,  $\alpha$ ). Чем ниже  $ARL_1$ , тем быстрее обнаруживается реальный сдвиг (ошибка II рода,  $\beta$ ).

### 1.7.2 ARL для классических карт Шухарта

Для карт Шухарта с двусторонними границами  $L_{CL} = -k\sigma, U_{CL} = k\sigma$  при нормальных данных  $ARL_0$  определяется [80]:

$$ARL_0 = P^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1 - P\{X \in (L_{CL}, U_{CL})\}} = \frac{1}{2[1 - \Phi(k)]}$$

L	$\alpha$	$ARL_0$
3	0.0027	$\approx 370$
2.5	0.0124	$\approx 81$

Для смещённого процесса со сдвигом  $\delta = |\mu - \mu_0|/\sigma$  средняя длина серии вычисляется так:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - [\Phi(k - \delta) - \Phi(-k - \delta)]}$$

Диапазон изменения  $ARL_1$  сильно варьируется: при  $\delta = 1$  (сдвиг  $\approx 1\sigma$ )  $ARL_1$  около 44, при  $\delta = 2$  примерно 5.

### 1.7.3 Среднее время до ложного сигнала для карт CUSUM

Карта кумулятивных сумм (CUSUM) базируется на статистике одностороннего случайного блуждания, описываемой следующим рекуррентным соотношением [122,139]:

$$S_n^+ = \max(0, S_{n-1}^+ + (X_n - \mu_0) - k), \quad S_0^+ = 0,$$

где  $S_n^+$  – накопленная сумма на шаге  $n$ ;  $\mu_0$  – базовый уровень процесса;  $k$  – контрольное значение;  $h$  – интервал принятия решения.

Сигнал тревоги формируется при достижении условия  $S_n^+ \geq h$ . Параметры  $k$  и  $h$  определяют компромисс между  $ARL_0$  и  $ARL_1$ .

Для двусторонней CUSUM теоретический расчёт ARL осуществляется через Марковскую цепь размерности  $m = \lceil h/\Delta \rceil$  или посредством решения уравнения Ито–Колмогорова. Эмпирическая оценка имеет вид:

$$ARL_0^{(\text{CUSUM})} \approx \frac{e^{ah} - 1}{1 - e^{-a}}, \quad a = \frac{2k}{\sigma^2}.$$

Пример практического применения: при двусторонней CUSUM с  $\delta^* = 1\sigma$  рекомендуются параметры  $k = \delta^*/2 = 0.5\sigma$ ,  $h \approx 4 - 5\sigma$ , обеспечивающие  $ARL_0 \approx 500$  и  $ARL_1 \approx 5 - 7$ . Это существенно превосходит характеристики карты Шухарта при аналогичном  $ARL_0$ .

Существует прямая связь между вероятностями ошибок I и II рода и средним временем до сигнала:

$$\alpha = \frac{1}{ARL_0}, \quad \beta = 1 - \frac{1}{ARL_1}.$$

Требуемые характеристики системы контроля определяют соответствующие настройки: минимизация ложных тревог достигается увеличением  $L$  (для карты Шухарта) или  $h$  (для CUSUM), повышение чувствительности к малым сдвигам требует уменьшения  $L$  или  $k$ , либо применения адаптивного  $h$ .

#### 1.7.4 Взаимосвязь с последовательным тестом отношения правдоподобия (SPRT)

Карта CUSUM представляет собой дискретизированную версию SPRT, осуществляющую проверку гипотез [123]:

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu = \mu_0 + \delta\sigma.$$

Логарифм отношения правдоподобия на  $n$ -м шаге определяется как:

$$\ell_n = \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_{\mu_0 + \delta\sigma}(X_i)}{f_{\mu_0}(X_i)}.$$

SPRT формирует сигнал при достижении границ  $A$  (в пользу  $H_1$ ) или  $B$  (в пользу  $H_0$ ). При нормальном распределении с известным  $\sigma$  существует соответствие:

$$k = \frac{\delta\sigma}{2}, \quad h = \frac{\ln(A)}{\delta\sigma}.$$

#### 1.7.5 Настройка контрольных карт и рекомендации по применению в процессе шлифования

При организации статистического контроля качества в процессах шлифования критически важным является обоснованный выбор типа контрольной карты и настройка её параметров, обеспечивающая баланс между чувствительностью к отклонениям и частотой ложных срабатываний. Первоочередной задачей выступает определение экономически оправданных уровней ошибок первого  $\alpha$  и второго  $\beta$  рода, которые задают базовую вероятность ошибочного признания стабильного процесса нестабильным и пропуска реального нарушения соответственно. На следующем этапе осуществляется трансформация этих вероятностных критериев в целевые значения средней длины серии наблюдений до ложного сигнала  $ARL_0$  и

средней длины серии до обнаружения реального сдвига  $ARL_1$ , что позволяет перейти от абстрактных рисков к операционным показателям эффективности контрольной процедуры.

На основе заданных  $ARL_0$  и  $ARL_1$  производится расчёт ключевых параметров контроля: для классической карты Шухарта определяется величина контрольного предела  $L$  (в единицах стандартного отклонения), а для кумулятивной суммы (CUSUM) – параметры наклона эталонной линии  $k$  и порога срабатывания  $h$ . При этом выбор конкретного типа карты должен учитывать специфику этапа обработки. В условиях высокоточного окончательного шлифования, где приоритетом является выявление малых отклонений (порядка  $0,8\sigma$ ), целесообразно применять двустороннюю карту CUSUM с параметрами  $k = 0,4\sigma$  и  $h \approx 5\sigma$ , обеспечивающую  $ARL_0 \geq 1000$  при  $ARL_1 \leq 50$ . Для черновой обработки, где допустимы более значительные вариации, достаточной оказывается карта Шухарта, настраиваемая на  $ARL_0 \approx 200$  и  $ARL_1 \leq 10$  при обнаружении сдвигов не менее  $1,5\sigma$ .

Фундаментальное значение показателя  $ARL$  заключается в его прямой связи с ошибками  $\alpha$  и  $\beta$ :  $ARL_0$  обратно пропорционален  $\alpha$  (вероятности ложного сигнала), а  $ARL_1 - \beta$  (вероятности пропуска нарушения). При этом карта Шухарта, отличаясь простотой реализации и интерпретации, демонстрирует низкую чувствительность к смещениям менее  $1,5\sigma$ , что ограничивает её применимость в высокоточных процессах. В противовес ей алгоритм CUSUM, реализующий логику последовательного вероятностного отношения, обеспечивает оптимальное обнаружение малых систематических отклонений за счёт накопления информации о динамике процесса. Именно методология SPRT формирует теоретическую основу для формализованного согласования уровней  $\alpha$ ,  $\beta$ , целевых  $ARL$  и параметров контрольных карт, что находит практическое воплощение в процедурах калибровки, детально описанных во второй главе диссертации.

## **1.8 Влияние усовершенствованных контрольных карт и методов оптимизации на индекс воспроизводимости процесса шлифования**

### **1.8.1 Теоретическое обоснование влияния контрольных карт на показатели $C_p/C_{pk}$**

Основная гипотеза исследования заключается в том, что индекс воспроизводимости процесса шлифования  $C_{pk}(t)$  является функцией двух ключевых параметров: текущего стандартного отклонения  $\sigma(t)$  и смещения среднего значения  $\mu(t) - \mu_0$ .

Механизм влияния контрольных карт реализуется через оперативное выявление сдвига среднего значения  $\mu$ , что минимизирует период производства дефектной продукции (снижение вероятности ошибки второго рода  $\beta$ ) и диагностическое снижение вариабельности  $\sigma$  посредством своевременной корректировки режимов резания и контроля износа инструмента [84,86,96].

Математическое описание индекса способности имеет вид:

$$C_{pk}(t) = \min\left(\frac{USL - \mu(t)}{3\sigma(t)}, \frac{\mu(t) - LSL}{3\sigma(t)}\right)$$

Уменьшение значений  $\sigma(t)$  и  $|\mu(t) - \mu_0|$  приводит к увеличению числителя или уменьшению знаменателя формулы, что непосредственно повышает показатели  $C_p/C_{pk}$ .

### 1.8.2 Анализ эффективности усовершенствованных контрольных карт

В рамках исследования проведена комплексная оценка эффективности модернизированных контрольных карт, направленных на повышение воспроизводимости технологического процесса через оптимизацию процедур статистического контроля. Разработанные инструменты демонстрируют различные механизмы воздействия на ключевые параметры управления качеством, что в совокупности способствует росту индексов воспроизводимости  $C_p$  и  $C_{pk}$  [57, 86].

Так, карта с переменными контрольными границами обеспечивает стабилизацию уровня ошибки первого рода  $\alpha$  при варьировании объёма выборки. Это позволяет существенно снизить частоту ложных остановок процесса, минимизировать количество необоснованных перенастроек оборудования и, как следствие, уменьшить общую вариабельность выходного параметра  $\sigma$ . В свою очередь, карта  $\sigma$  с адаптивным алгоритмом управления средней длиной серии *ARL* реализует динамическое регулирование баланса между ошибками  $\alpha$  и  $\beta$  в условиях естественного износа инструмента и оборудования. Благодаря этому достигается оперативное реагирование на возрастание разброса контролируемого параметра, что способствует своевременному сдерживанию роста вариабельности процесса [79, 155].

Особого внимания заслуживает CUSUM-карта со стохастической коррекцией, которая учитывает неоднородность выборочной вариабельности при расчёте *ARL*. Данный подход обеспечивает существенное повышение чувствительности к малым систематическим сдвигам: обнаружение отклонений величиной  $\delta \leq 0,8\sigma$  происходит на 25–40 % быстрее по сравнению с традиционными методами контроля. Это особенно важно в условиях высокоточных операций, где раннее выявление дрейфа параметров критически важно для поддержания стабильности качества.

Результаты экспериментальной апробации предложенных решений подтвердили их практическую значимость. В частности, зафиксировано устойчивое увеличение интегрального показателя  $C_p$  на 0,18–0,22 единицы при целевом значении  $C_p \geq 1,33$ . Такой прирост свидетельствует о существенном улучшении индекса воспроизводимости процесса благодаря более точному и оперативному управлению его параметрами. Таким образом, внедрённые усовершенствования контрольных карт не только повышают эффективность мониторинга

качества, но и обеспечивают измеримый вклад в рост ключевых метрик воспроизводимости, что имеет прямое значение для повышения конкурентоспособности производственной системы.

### 1.8.3 Методология оптимизации параметров контроля

Предложена методология оптимизации параметров контрольных карт, базирующаяся на минимизации целевой функции ожидаемых потерь. Данная функция, обозначаемая как

$$C_{avg}(L, k, h) = f(ARL_0, ARL_1, C_{FA}, C_{MD}, C_S, C_{Adj})$$

представляет собой комплексную зависимость от ряда ключевых показателей: средней длины серии до ложного сигнала  $ARL_0$ , средней длины серии до обнаружения реального сдвига  $ARL_1$ , стоимости ложной тревоги  $C_{FA}$ , стоимости пропущенного нарушения  $C_{MD}$ , затрат на отбор выборки  $C_S$  и расходов на корректирующие действия  $C_{Adj}$ .

Оптимизационная задача заключается в нахождении таких значений параметров карты  $k, h$ , при которых функция достигает минимального значения. При этом накладываются жёсткие ограничения, обеспечивающие требуемый уровень качества процесса: минимальное значение индекса воспроизводимости не должно опускаться ниже 1,33, а минимально допустимая длина серии до ложного сигнала должна составлять не менее 400 наблюдений.

В результате решения данной оптимизационной задачи для условий финишного шлифования были определены следующие оптимальные параметры:  $k = 0,38\sigma$ ;  $h = 4,8\sigma$ ; для объёма выборки  $n = 5$ . Практическая апробация установленных параметров продемонстрировала их высокую эффективность. Достигнутые результаты:  $ARL_0 \approx 480$ ; частота ложных тревог  $< 2$  сигналов за смену;  $ARL_1 \approx 16$  при  $\delta = 0,8\sigma$ ; рост  $C_{pk}$  с 1,21 до 1,46 (увеличение на 21%). Данный факт свидетельствует о значительном улучшении стабильности технологического процесса и его способности стablyно обеспечивать качество продукции в рамках заданных допусков.

Таким образом, предложенная методология оптимизации не только обеспечивает минимизацию ожидаемых затрат на контроль и корректирующие действия, но и гарантирует достижение целевых показателей качества, требуемых для сертификации и устойчивого функционирования производственной системы.

### 1.8.4 Интеграционная составляющая с системой управления процессом

Разработана комплексная система управления технологическим процессом, базирующаяся на формировании замкнутого контура управления посредством интеграции трёх ключевых компонентов: методов статистического контроля качества (главы 2–3), динамической модели процесса шлифования (глава 4) и системы PID-регулирования. Такое взаимодействие

обеспечивает многоуровневый механизм мониторинга и коррекции, в котором каждый элемент выполняет строго определённую функцию, дополняя остальные и формируя синергетический эффект.

Статистические контрольные карты, разработанные в главе 2, создают техническую основу для раннего и высокоточного обнаружения отклонений в ходе технологического процесса. Их применение позволяет выявлять даже незначительные систематические сдвиги параметров до того, как они приведут к выходу продукции за пределы допустимых допусков. При этом экономический дизайн контрольных карт, обоснованный в главе 3, обеспечивает их практическую применимость за счёт согласования параметров мониторинга с реальными производственными затратами. В частности, данный подход позволяет установить оптимальный баланс между средней длиной серии до ложного сигнала  $ARL_0$  и средней длиной серии до обнаружения реального нарушения  $ARL_1$ , минимизируя совокупные издержки на контроль и корректирующие действия без ущерба для качества продукции.

Динамическая модель шлифования, интегрированная в систему, выполняет функцию прогнозного модуля, учитывающего физические и технологические особенности процесса. Она позволяет не только интерпретировать текущие отклонения, но и предсказывать их развитие, что существенно повышает оперативность принятия управлеченческих решений. Система PID-регулирования, в свою очередь, реализует механизм автоматической коррекции параметров процесса на основе данных статистического контроля и прогнозных оценок модели. Это обеспечивает замкнутость контура управления: от выявления отклонения до его устранения в режиме, близком к реальному времени.

Результатом интеграции указанных компонентов становится существенное повышение воспроизводимости технологического процесса, что подтверждается ростом индекса  $Cpk$  более чем на 20 %. Данний показатель свидетельствует о значительном улучшении стабильности процесса и его способности устойчиво поддерживать качество продукции в рамках заданных допусков. Таким образом, предложенная система управления демонстрирует не только теоретическую состоятельность, но и практическую эффективность, обеспечивая достижение целевых показателей качества при минимизации производственных затрат.

## **Выводы по главе 1**

В результате проведённого анализа установлено, что контрольные карты представляют собой ключевой инструмент обеспечения стабильности технологического процесса шлифования. Сопоставление классических карт Шухарта и карт кумулятивных сумм (CUSUM) продемонстрировало их универсальность в мониторинге как уровня, так и изменчивости процесса, что обеспечивает своевременное выявление отклонений и препятствует выходу параметров за допустимые пределы. При этом индекс воспроизводимости  $Cp/Cpk$  выступает

интегральным показателем качества шлифования, отражающим способность процесса стабильно обеспечивать требуемые характеристики продукции. Однако, корректная оценка данных индексов принципиально невозможна без предварительной верификации статистической стабильности данных, что подчёркивает первостепенную значимость контрольных карт на начальном этапе анализа.

Существенное значение в методологии контроля имеет показатель средней длины серии  $ARL$ , который находится в прямой функциональной зависимости от вероятностей ошибок первого  $\alpha$  и второго  $\beta$  рода. Осознание этой взаимосвязи позволяет проектировать контрольные схемы на основе критериев оптимального баланса между ложными и пропущенными срабатываниями, используя формализованный подход последовательного вероятностного отношения SPRT. При этом экономическая интерпретация  $ARL$  раскрывает его прикладную ценность: частота ложных тревог и пропущенных сдвигов непосредственно конвертируется в реальные производственные издержки, включающие затраты на брак, простой оборудования и переналадку. Даный факт обосновывает необходимость интеграции статистических и экономических критериев при разработке систем контроля качества, что определяет направление дальнейших исследований.

Проведённый анализ выявил существенные ограничения традиционных схем контроля. Использование фиксированных границ  $\pm 3\sigma$  и неизменных параметров контрольных карт не обеспечивает требуемой чувствительности к малым систематическим сдвигам (менее  $1\sigma$ ) и не учитывает вариативность объёма выборок. Эти недостатки существенно ограничивают потенциал повышения индекса  $Cpk$  и препятствуют достижению целевых показателей качества.

На основании полученных теоретических положений сформулирована необходимость перехода к усовершенствованным методам контроля. Для реального повышения индексов  $Cp/Cpk$  требуется разработка адаптивных контрольных карт с переменными параметрами, что представлено в главе 2, а также оптимизация их настроек с учётом экономических потерь и требований робастности, детализированная в главе 3. Без реализации этих мероприятий невозможно достичь статистически значимого прироста индекса воспроизводимости и существенного снижения совокупных производственных затрат.

Кроме того, результаты исследования формируют методологический задел для интеграции статистических методов в системы автоматического управления. Выявленные взаимосвязи между статистическими показателями контроля и их экономическим значением создают основу для построения замкнутого контура управления «контрольная карта → коррекция режима», детализация которого представлена в главах 3 и 4.

Таким образом, глава 1 заложила методологический фундамент, объединяющий статистические и экономические подходы к управлению качеством, и чётко обозначила

ограничения классических методов контроля. Это обуславливает необходимость дальнейшего развития и оптимизации методов контроля (главы 2 и 3) для достижения целевых значений индексов воспроизводимости  $Cp/Cpk$  при шлифовании изделий машиностроения.

## **Глава 2. Разработка научно-практического статистического инструментария управления качеством для усовершенствованных карт Шухарта и карт кумулятивных сумм**

Вторая глава содержит построение усовершенствованных X-, S- и R-карт Шухарта с переменной длиной серии. Предлагается единая методика построения и оптимизации контрольных карт с переменной длиной серии для мониторинга уровня и изменчивости процесса на основе винзоризованного среднего и винзоризованной дисперсии, устойчивых к выбросам и обладающих повышенной чувствительностью к малым сдвигам. Следующие разделы второй главы содержат совершенствование карт кумулятивных сумм. Для трех типов CUSUM-карты, а именно на основе выборочного среднего, стандартного отклонения и размаха представлены подробные таблицы для нахождения параметров карты. Построена номограмма для определения параметров CUSUM-схемы. Получена рекурсивная формула для начальных моментов длины серий. Для проверки результатов вычислений ARL на основе модели цепей Маркова, проведена симуляция по методу Монте Карло в широком диапазоне значений параметров k, h CUSUM-схемы. Построена номограмма для определения параметров CUSUM-схемы, в которой на каждой линии нанесены точки с пометками численно равными стандартам отклонения длины серии. Представлена таблица со значениями функции распределения длины серии в широком диапазоне значений параметров CUSUM-схемы таких как ARL, k, h.

### **2.1. Построение контрольной карты для слежения за изменчивостью процесса на основе стандартного отклонения с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге**

#### **2.1.1. Постановка задачи и допущения**

В дальнейшем рассматривается задача статистического контроля изменчивости стабильного процесса механообработки по выборочному стандартному отклонению  $S$ . Предполагается, что при нахождении процесса под статистическим управлением контролируемая характеристика качества  $X$  распределена нормально с параметрами  $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ , где  $\mu$  – целевой уровень, а  $\sigma_0$  – исходное (номинальное) значение среднеквадратического отклонения. Изменение состояния процесса по изменчивости моделируется переходом к распределению  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  с иной дисперсией при неизменном среднем. Таким образом, отклонение процесса от исходного состояния описывается мультипликативной моделью сдвига дисперсии

$$\sigma = \varepsilon \sigma_0, \varepsilon > 0,$$

где  $\varepsilon$  – безразмерный коэффициент, характеризующий относительный сдвиг изменчивости. Значения  $\varepsilon < 1$  соответствуют уменьшению дисперсии по сравнению с исходным

уровнем, а  $\varepsilon > 1$  – её увеличению. В рамках настоящего раздела основной интерес представляет повышение изменчивости ( $\varepsilon > 1$ ), связанное с ростом разброса размеров или параметров шероховатости в зоне жёстких допусков.

Использование мультипликативной модели  $\sigma = \varepsilon\sigma_0$  позволяет унифицировать постановку задачи для различных технологических процессов и масштабов измерений. Все расчёты средней длины серии, вероятностей выхода за контрольные пределы и параметров карты зависят от  $\sigma$  только через отношение  $\varepsilon = \sigma/\sigma_0$ , тогда как абсолютный уровень разброса  $\sigma_0$  определяет лишь масштаб оси  $X$ . Это даёт возможность проектировать контрольную карту в безразмерной форме, ориентируясь на заданные значения  $\varepsilon$ , которые интерпретируются как технологически значимые кратные изменения изменчивости (например, рост стандартного отклонения в 1.5 или 2 раза). В дальнейшем при вычислении характеристик средней длины серии  $ARL(\varepsilon)$  сдвиг  $\varepsilon$  будет рассматриваться как основной параметр, задающий альтернативную гипотезу о выходе процесса из-под контроля по изменчивости.

Для упрощения аналитических выкладок вводится нормализация исходного распределения: без ограничения общности полагается  $\mu = 0$ ,  $\sigma_0 = 1$ . Переход к реальным единицам измерения затем осуществляется обратным линейным преобразованием, причём параметры контрольной карты по стандартному отклонению масштабируются пропорционально  $\sigma_0$ . При фиксированном объёме подгруппы наблюдения  $X_1, \dots, X_n$  внутри подгруппы считаются независимыми и одинаково распределёнными  $N(0, \sigma^2)$ , где  $\sigma = \varepsilon$  после нормализации. В качестве статистики для слежения за изменчивостью используется выборочное стандартное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

где  $\bar{X}$  – выборочное среднее по подгруппе. Таким образом, последовательность значений  $S_t$ , вычисляемых по последовательным подгруппам, образует входной ряд для контрольной карты по изменчивости, а дальнейший анализ будет основан на распределительных свойствах этой статистики в нормальной модели.

### 2.1.2. Распределительные свойства статистики $S$

Классическая теория контрольных карт для слежения за изменчивостью опирается на точные распределительные свойства выборочного стандартного отклонения в нормальной совокупности [41, 42]. При выполнении допущений нормальности и независимости наблюдений статистика  $S$  оказывается функцией  $\chi^2$ -распределения, что позволяет в явном виде выражать

вероятность выхода за контрольные пределы через функции распределения  $\chi^2$  и строить точные зависимости средней длины серии ARL( $\varepsilon$ ) от параметров карты и сдвига изменчивости.

Если  $X_1, \dots, X_n$  – независимые наблюдения из нормального распределения  $N(0, \sigma^2)$ , то известен классический результат математической статистики: случайная величина

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

имеет  $\chi^2$ -распределение с  $(n-1)$  степенями свободы, то есть  $Y \sim \chi_{n-1}^2$ . Это означает, что все вероятностные характеристики  $S$  могут быть получены путём соответствующего преобразования  $\chi_{n-1}^2$ -распределения. В частности, события вида « $S$  не выходит за заданные пределы» эквивалентны событиям для квадратичной формы  $Y$ , и вероятность сигнала карты по изменчивости выражается через квантили и функции распределения  $\chi_{n-1}^2$ .

Рассмотрим безразмерную величину  $S/\sigma$ . Из соотношения  $Y = (n-1)(S/\sigma)^2$  и факта  $Y \sim \chi_{n-1}^2$  следует, что функция распределения статистики  $S/\sigma$  имеет вид

$$F_{S/\sigma}(x) = P\left(\frac{S}{\sigma} \leq x\right) = P(Y \leq (n-1)x^2) = F_{\chi_{n-1}^2}((n-1)x^2), x \geq 0,$$

где  $F_{\chi_{n-1}^2}(\cdot)$  – функция распределения  $\chi^2$ -распределения с  $(n-1)$  степенями свободы. В нормализованных единицах ( $\sigma_0 = 1$ ) это выражение непосредственно задаёт распределение  $S$  при различных значениях  $\varepsilon$ , поскольку  $\sigma = \varepsilon$ . Именно эта связь используется в дальнейшем для аналитического вычисления вероятностей выхода выборочного стандартного отклонения за заданные контрольные границы и, следовательно, для расчёта ARL( $\varepsilon$ ).

Математическое ожидание и дисперсия выборочного стандартного отклонения в нормальной совокупности также выражаются через параметры  $\chi^2$ -распределения. При общем  $\sigma$  имеет место представление

$$E(S) = c_4(n) \sigma, \text{Var}(S) = \sigma^2(1 - c_4^2(n)),$$

где  $c_4(n)$  – известная функция объёма подгруппы, задающая поправку на смещённость оценки стандартного отклонения. После принятой нормализации  $\sigma_0 = 1$  и при  $\varepsilon = 1$  получаем

$$E(S) = c_4(n), \text{Var}(S) = 1 - c_4^2(n).$$

Эти соотношения играют ключевую роль при параметризации контрольных пределов по стандартному отклонению через число среднеквадратичных отклонений  $k$  относительно ожидаемого значения  $E(S)$ . В последующих подразделах именно  $c_4(n)$  и  $1 - c_4^2(n)$  используются для задания центральной линии и ширины контрольной зоны классической  $S$ -карты, а также для построения модифицированной карты с нацеленной средней длиной серии.

### 2.1.3. Классическая $S$ -карта с фиксированными пределами

Классическая контрольная карта стандартного отклонения строится на основе распределительных характеристик статистики  $S$ , полученных в предыдущем подразделе. При нормализации  $\mu = 0$ ,  $\sigma_0 = 1$  и при процессе под контролем выполняются соотношения  $E(S) = c_4(n)$ ,  $\text{Var}(S) = 1 - c_4^2(n)$ . Центральная линия  $S$ -карты совпадает с математическим ожиданием выборочного стандартного отклонения, то есть с константой  $c_4(n)$ , а контрольные границы задаются по правилу «трёх сигм» относительно этой центральной линии. В результате нижний и верхний контрольные пределы записываются в виде

$$L_{CL} = c_4(n) - 3\sqrt{\text{Var}(S)}, U_{CL} = c_4(n) + 3\sqrt{\text{Var}(S)}.$$

С учётом явного выражения для  $\text{Var}(S)$  эта параметризация обеспечивает согласованность с классическим подходом Шухарта: при корректной калибровке границ вероятность ложного сигнала при неизменной изменчивости процесса ( $\varepsilon = 1$ ) оказывается малой, а средняя длина серии ARL<sub>0</sub> принимает значения порядка нескольких сотен подгрупп. На практике при малых объёмах подгруппы нижний предел  $L_{CL}$  может принимать отрицательные значения; в этом случае его усечённое значение принимается равным нулю, что не нарушает корректности контроля, поскольку стандартное отклонение по определению неотрицательно.

Выбор трёхкратного множителя при построении границ  $L_{CL}$  и  $U_{CL}$  основан на компромиссе между частотой ложных тревог и чувствительностью к существенным изменениям дисперсии. При нормальном распределении статистики, центрированной и нормированной по дисперсии, попадание за пределы  $\pm 3\sigma$  имеет вероятность порядка 0,0027, что соответствует средней длине серии  $\text{ARL}_0 \approx 1/0,0027$ . Для статистики  $S$  распределение отличается от нормального, однако использование конструкций вида  $c_4 \pm 3\sqrt{\text{Var}(S)}$  обеспечивает аналогичный порядок частоты ложных сигналов. Контрольные границы:

$$L_{CL} = c_4 - 3\sqrt{\text{Var}(S)}, U_{CL} = c_4 + 3\sqrt{\text{Var}(S)}$$

Эти границы, рассчитанные через  $c_4(n)$  и  $\text{Var}(S)$ , являются стандартным выбором в практике статистического управления процессами и служат естественной точкой отсчёта для дальнейших модификаций, в том числе для проектирования карт с нацеленной средней длиной серии.

Классическая  $S$ -карта с фиксированными пределами предназначена для мониторинга изменчивости процесса при соблюдении допущений нормальности распределения внутри подгрупп, независимости наблюдений и стационарности среднего уровня. При таких условиях выход точек за верхний контрольный предел  $U_{CL}$  интерпретируется как свидетельство увеличения разброса по сравнению с исходным уровнем  $\sigma_0$ , что, как правило, связано с

деградацией состояния оборудования, изменением режима обработки или нарушением системы управления. Систематическое попадание точек вблизи верхней границы либо последовательность значений, расположенных выше центральной линии  $c_4(n)$ , также может рассматриваться как ранний индикатор роста дисперсии. С другой стороны, устойчивое нахождение точек вблизи нижнего предела может указывать на потенциальное «улучшение» процесса (снижение вариабельности), однако такая интерпретация требует осторожности, так как слишком малые значения стандартного отклонения могут быть обусловлены ошибками измерений, ухудшением чувствительности контроля или сознательным «подгонкой» данных. Область корректной применимости классической  $S$ -карты ограничена ситуациями, когда объём подгруппы недостаточно велик для использования асимптотических приближений и когда отклонения от нормальности (асимметрия, тяжёлые хвосты) умеренны. В противном случае существенно возрастает риск искажения фактических значений  $ARL_0$  и  $ARL(\varepsilon)$ , что требует либо робастных модификаций статистики, либо предварительного анализа распределения.

#### 2.1.4. Средняя длина серии: определение и связь с вероятностью выхода

Характеристики работы контрольной карты часто удобнее описывать не через одномоментную вероятность выхода статистики за контрольные границы, а через среднее число подгрупп, наблюдаемых до возникновения сигнала. Эта величина называется средней длиной серии (ARL, Average Run Length) и служит ключевым критериями качества проектирования карт Шухарта. Отдельно рассматриваются  $ARL_0$  – средняя длина серии при процессе под контролем ( $\varepsilon = 1$ ), и  $ARL_1(\varepsilon)$  – средняя длина серии при наличии сдвига изменчивости ( $\varepsilon > 1$ ).

Пусть вероятность того, что карта подаст сигнал на данной подгруппе (то есть статистика  $S$  выйдет за границы  $[L_{CL}, U_{CL}]$ ), равна  $P$ . При фиксированном состоянии процесса и при независимости подгрупп длина серии  $N$  – число подгрупп до первого сигнала – имеет геометрическое распределение с параметром  $P$ . Вероятность того, что первый сигнал возникнет на  $k$ -й подгруппе, равна

$$P(N = k) = (1 - P)^{k-1}P, k = 1, 2, \dots$$

Из свойств геометрического распределения следует, что математическое ожидание длины серии выражается через обратную величину к параметру распределения:

$$ARL = E(N) = \frac{1}{P}.$$

Таким образом, средняя длина серии полностью определяется вероятностью сигнала на одной подгруппе. В частности,  $ARL_0 = 1/P_0$ , где  $P_0$  – вероятность выхода  $S$  за границы при  $\varepsilon = 1$ , а  $ARL_1(\varepsilon) = 1/P(\varepsilon)$ , где  $P(\varepsilon)$  соответствует сдвинутому состоянию процесса.

Для  $S$ -карты вероятность сигнала при заданном сдвиге изменчивости  $\varepsilon$  может быть выражена в замкнутом виде через функцию распределения  $\chi^2$ -распределения. Предположим, что контрольные пределы  $L_{CL}$  и  $U_{CL}$  рассчитаны для нормализованного процесса ( $\sigma_0 = 1$ ) и остаются фиксированными. При сдвиге дисперсии до  $\sigma^2 = \varepsilon^2$  сохраняется соотношение

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Событие «нет сигнала» эквивалентно тому, что  $S$  попадает в интервал  $[L_{CL}, U_{CL}]$ . Тогда вероятность отсутствия сигнала при сдвиге  $\varepsilon$  равна

$$P_{in}(\varepsilon) = P(L_{CL} \leq S \leq U_{CL}) = F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{(n-1)U_{CL}^2}{\varepsilon^2}\right) - F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{(n-1)L_{CL}^2}{\varepsilon^2}\right),$$

где  $F_{\chi_{n-1}^2}(\cdot)$  – функция распределения  $\chi^2$ -распределения с  $(n-1)$  степенями свободы.

Соответственно, вероятность сигнала (выхода за границы) при сдвиге  $\varepsilon$  записывается как

$$P(\varepsilon) = 1 - P_{in}(\varepsilon) = 1 - [F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{(n-1)U_{CL}^2}{\varepsilon^2}\right) - F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{(n-1)L_{CL}^2}{\varepsilon^2}\right)].$$

Средняя длина серии как функция сдвига изменчивости определяется выражением

$$ARL(\varepsilon) = \frac{1}{P(\varepsilon)}.$$

При  $\varepsilon = 1$  получаем  $ARL_0 = ARL(1)$ , характеризующую устойчивость карты при стабильном процессе. При  $\varepsilon > 1$  величина  $ARL(\varepsilon)$  убывает, отражая уменьшение числа подгрупп, необходимых для обнаружения роста дисперсии. Именно эти зависимости лежат в основе последующего нацеленного выбора параметров карты, обеспечивающего требуемый компромисс между  $ARL_0$  и  $ARL_1(\varepsilon)$ .

#### 2.1.5. Влияние объёма подгруппы $n$ на $ARL_0$ и $ARL(\varepsilon)$

Выбор объёма подгруппы является одним из ключевых проектных решений при построении  $S$ -карты, поскольку именно через  $n$  определяется форма распределения выборочного стандартного отклонения и, следовательно, вероятности выхода за контрольные границы. Как следует из соотношений предыдущих подразделов, при фиксированном состоянии процесса ( $\sigma = \varepsilon\sigma_0$ ) статистика  $S$  связана с  $\chi^2$ -распределением с  $n-1$  степенями свободы, а её математическое ожидание и дисперсия задаются выражениями  $E(S) = c_4(n)\sigma$ ,  $Var(S) = \sigma^2(1 - c_4^2(n))$ . При увеличении  $n$  распределение  $S$  становится более концентрированным вокруг  $E(S)$ , а относительный разброс  $\sqrt{Var(S)}/E(S)$  уменьшается. Это приводит к тому, что при фиксированных контрольных границах, заданных через множитель  $k$  относительно  $E(S)$ , вероятность ложного сигнала при процессе под контролем снижается, а  $ARL_0$  растёт. В то же время при наличии сдвига изменчивости ( $\varepsilon > 1$ ) увеличение объёма подгруппы повышает

чувствительность карты, поскольку каждая точка  $S$  усредняет большее число наблюдений и быстрее реагирует на рост дисперсии, что уменьшает  $ARL(\varepsilon)$ . Таким образом, объём подгруппы оказывает разнонаправленное влияние на устойчивость и оперативность обнаружения сдвига, и выбор  $n$  должен учитывать как допустимый уровень  $ARL_0$ , так и требуемую скорость реакции на технологически значимые изменения  $\varepsilon$ .

При  $\varepsilon = 1$ , то есть при процессе под контролем, увеличение объёма подгруппы  $n$  делает распределение  $S$  более «узким» по сравнению с центральной линией  $E(S) = c_4(n)$ . Для фиксированного множителя  $k$  в формуле границ

$$L_{CL} = E(S) - k\sqrt{\text{Var}(S)}, U_{CL} = E(S) + k\sqrt{\text{Var}(S)}$$

это приводит к уменьшению площади хвостов распределения за пределами  $[L_{CL}, U_{CL}]$ , а значит к уменьшению вероятности ложной тревоги  $P_0$  и росту  $ARL_0 = 1/P_0$ . Иначе говоря, при больших  $n$  классическая  $S$ -карта становится «более консервативной» в отношении срабатываний на случайные флуктуации. При  $\varepsilon > 1$  ситуация принципиально иная: хотя распределение  $S$  остаётся более узким для больших  $n$ , его центр смещается вверх, к значениям  $\varepsilon c_4(n)$ , так что при достаточно крупном сдвиге  $\varepsilon$  значительная часть распределения оказывается выше верхнего контрольного предела  $U_{CL}$ . В результате вероятность сигнала  $P(\varepsilon)$  возрастает, а  $ARL(\varepsilon) = 1/P(\varepsilon)$  снижается. Качественно это отражает ожидаемый эффект: крупные подгруппы позволяют быстрее и надёжнее выявлять увеличение разброса, однако цена за это – рост затрат на измерения и потенциальное увеличение интервала между последовательными подгруппами во времени.

#### 2.1.6. $S$ -карта с переменной длиной серии

Классическая  $S$ -карта с фиксированным выбором множителя  $k = 3$  обеспечивает лишь один, эмпирически сложившийся уровень средней длины серии при процессе под контролем и некоторую «усреднённую» чувствительность к сдвигам изменчивости. В ряде приложений такого подхода оказывается недостаточно: требуется обеспечить заданную устойчивость к ложным сигналам ( $ARL_0 \geq ARL_0^{\text{дел}}$ ) и одновременно минимизировать задержку обнаружения конкретного технологически значимого сдвига  $\varepsilon > 1$ . Для решения этой задачи предлагается рассматривать множитель  $k$  как проектный параметр, позволяющий управлять средней длиной серии и, следовательно, адаптировать карту под требования конкретного процесса. Термин «карта с переменной длиной серии» в данном контексте подчёркивает, что вместо фиксированного эмпирического выбора  $k = 3$  рассматривается семейство  $S$ -карт с различными значениями  $k$ , приводящими к различным  $ARL_0$  и  $ARL(\varepsilon)$ . Выбор оптимального значения  $k$  осуществляется на основе нацеленного критерия, сформулированного в следующем подразделе.

Параметризация пределов приводит к следующим контрольным границам:

$$L_{CL} = E(S) - k\sqrt{\text{Var}(S)}, U_{CL} = E(S) + k\sqrt{\text{Var}(S)}$$

Для перехода от классической карты к нацеленной по средней длине серии используется параметризация контрольных пределов через математическое ожидание и стандартное отклонение статистики  $S$ . При процессе под контролем ( $\varepsilon = 1$ ) в нормализованных единицах  $\sigma_0 = 1$  имеем  $E(S) = c_4(n)$  и  $\text{Var}(S) = 1 - c_4^2(n)$ . Тогда семейство возможных пар  $(L_{CL}, U_{CL})$  можно задать формулами

$$L_{CL} = c_4(n) - k\sqrt{1 - c_4^2(n)}, U_{CL} = c_4(n) + k\sqrt{1 - c_4^2(n)},$$

где  $k > 0$  выступает в роли регулируемого параметра ширины контрольной зоны. При увеличении  $k$  границы раздвигаются, вероятность сигнала при  $\varepsilon = 1$  уменьшается, и  $\text{ARL}_0(k)$  растёт. При уменьшении  $k$  интервалы сужаются, возрастает вероятность как ложных сигналов, так и своевременного обнаружения реального сдвига, что приводит к снижению  $\text{ARL}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon > 1$ . Таким образом, функция  $\text{ARL}_0(k)$  задаёт требуемую связь между шириной контрольной зоны и устойчивостью карты, а  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  описывает чувствительность к заданному сдвигу. Это создаёт основу для формального выбора  $k$  как решения задачи оптимизации.

Нациленность карты по длине серии формализуется как задача условной оптимизации по параметру  $k$ . Предполагается, что для рассматриваемого процесса выделен технологически значимый сдвиг изменчивости  $\varepsilon > 1$ , при достижении которого сигнал контрольной карты должен поступать максимально быстро. Одновременно управление процессом качества требует, чтобы при отсутствии сдвига ( $\varepsilon = 1$ ) частота ложных тревог не превышала допустимого уровня, выражаемого через целевую среднюю длину серии  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$ . В этих условиях целевой критерий проектирования формулируется в виде: выбрать значение  $k$  так, чтобы минимизировать  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  при заданном ограничении на  $\text{ARL}_0(k)$ :

$$\text{ARL}_0(k) \geq \text{ARL}_0^{\text{цел}}.$$

Иначе говоря, требуется найти компромисс между устойчивостью к ложным сигналам и скоростью срабатывания при сдвиге изменчивости, причём компромисс задаётся явно через параметры  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$  и  $\varepsilon$ . В следующем подразделе эта постановка будет уточнена в виде задачи на нахождение оптимального параметра  $k_{\text{opt}}$ , будут даны выражения для расчёта  $\text{ARL}_0(k)$  и  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ , а также рассмотрены практические методы выбора и визуальной калибровки  $k_{\text{opt}}$  на основе графиков  $\text{ARL}_0(k)$  и  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ .

### 2.1.7. Оптимизация параметра $k$

Введённая выше параметризация  $S$ -карты через множитель  $k$  позволяет рассматривать не одну фиксированную карту с эмпирически выбранным значением  $k = 3$ , а целое семейство карт,

отличающихся устойчивостью при неизменном процессе и чувствительностью к сдвигу дисперсии. Для закреплённого технологически значимого сдвига  $\varepsilon > 1$  и заданного допустимого уровня ложных тревог (в виде целевой  $ARL_0^{\text{цел}}$ ) задача проектирования карты сводится к выбору такого значения  $k$ , при котором средняя длина серии при сдвиге  $ARL_1(k, \varepsilon)$  минимальна, а  $ARL_0(k)$  не опускается ниже заданного уровня. В данном подразделе формализуется соответствующая оптимационная постановка, показывается переход к удобным для вычислений  $\chi^2$ -квантилям и описывается практический графический метод выбора  $k_{\text{opt}}$ , иллюстрируемый конкретным численным примером.

Формулировка задачи оптимизации. Пусть для фиксированного объёма подгруппы  $n$  и выбранного сдвига изменчивости  $\varepsilon > 1$  по формулам предыдущих подразделов заданы функции  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon)$ , зависящие от параметра ширины контрольной зоны  $k$ . Тогда нацеленный выбор параметра можно записать в виде задачи условной минимизации

$$k_{\text{opt}} = \arg \min_k ARL_1(k, \varepsilon) \text{ при ограничении } ARL_0(k) \geq ARL_0^{\text{цел}}.$$

Ограничение  $ARL_0(k) \geq ARL_0^{\text{цел}}$  задаёт допустимую область по  $k$ , в пределах которой частота ложных сигналов не превышает согласованного с производством уровня. Поскольку при увеличении  $k$  контрольные границы раздвигаются,  $ARL_0(k)$  монотонно возрастает, и существует минимальное значение  $k_{\min}$ , при котором достигается граница  $ARL_0(k_{\min}) = ARL_0^{\text{цел}}$ . На практике это означает, что поиск решения сводится к выбору малейшего значения  $k$ , удовлетворяющего ограничению по  $ARL_0$ , поскольку последующее увеличение  $k$  уже не улучшает, а ухудшает чувствительность  $ARL_1(k, \varepsilon)$ . Тем самым задача оптимизации приобретает конструктивный характер и может решаться численно на дискретной сетке значений  $k$ .

Для вычисления  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon)$  удобно перейти от пределов по  $S$  к эквивалентным пределам по случайной величине

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Пусть при фиксированном  $k$  контрольные границы для статистики  $S$  заданы в виде

$$L_{CL}(k) = E(S) - k\sqrt{\text{Var}(S)}, U_{CL}(k) = E(S) + k\sqrt{\text{Var}(S)}.$$

Тогда соответствующие границы для величины  $Y$  равны

$$t_1(k) = (n-1) \frac{L_{CL}^2(k)}{\sigma^2}, t_2(k) = (n-1) \frac{U_{CL}^2(k)}{\sigma^2}.$$

В нормализованном случае  $\sigma_0 = 1$  при процессе под контролем ( $\varepsilon = 1$ ) имеем  $\sigma^2 = 1$  и, следовательно,

$$t_1(k) = (n-1)L_{CL}^2(k), t_2(k) = (n-1)U_{CL}^2(k).$$

Именно эти величины  $t_1(k)$  и  $t_2(k)$  входят в аргументы функции распределения  $\chi^2_{n-1}$  при вычислении вероятностей выхода за пределы и, через них, в выражения для  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon)$ .

Используя связь между статистикой  $S$  и  $\chi^2$ -распределением, вероятность отсутствия сигнала на одной подгруппе при заданном  $k$  и сдвиге  $\varepsilon$  может быть записана для  $P(\varepsilon)$  как

$$P_{\text{in}}(k, \varepsilon) = F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{(n-1)U_{CL}^2(k)}{\varepsilon^2}\right) - F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{(n-1)L_{CL}^2(k)}{\varepsilon^2}\right),$$

где  $F_{\chi^2_{n-1}}(\cdot)$  – функция распределения  $\chi^2_{n-1}$ . Тогда вероятность сигнала (выхода за контрольные границы) равна

$$P(k, \varepsilon) = 1 - P_{\text{in}}(k, \varepsilon),$$

а средняя длина серии определяется как

$$ARL(k, \varepsilon) = \frac{1}{P(k, \varepsilon)}.$$

В случае процесса под контролем ( $\varepsilon = 1$ ) получаем

$$ARL_0(k) = ARL(k, 1) = \frac{1}{P(k, 1)},$$

а для заданного сдвига  $\varepsilon > 1$

$$ARL_1(k, \varepsilon) = ARL(k, \varepsilon) = \frac{1}{P(k, \varepsilon)}.$$

Таким образом, вычисление  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon)$  сводится к подстановке параметризованных границ  $L_{CL}(k)$ ,  $U_{CL}(k)$  в формулу и численному вычислению значений функции распределения  $\chi^2_{n-1}$ . На практике это выполняется с помощью стандартных библиотек статистических функций или заранее подготовленных таблиц квантилей  $\chi^2$ .

### 2.1.8. Чувствительные места и практические рекомендации

Предложенный подход нацеленного проектирования  $S$ -карты по параметру  $k$  копируется на классическую нормальную модель и предполагает, что объём подгруппы достаточно велик для корректного использования распределительных свойств статистики  $S$ . В реальных производственных условиях эти предпосылки выполняются не всегда, что порождает ряд чувствительных моментов, требующих отдельного обсуждения. К ключевым из них относятся влияние ненормальности распределения исходных данных, ограниченность объёма подгруппы, выбор репрезентативного сдвига изменчивости  $\varepsilon$ , под который нацеливается карта, а также согласование карты изменчивости с парной картой уровня, обеспечивающее интегрированный контроль  $\mu$  и  $\sigma$  в едином контуре управления качеством.

Рассмотрим чувствительность к ненормальности и малым  $n$ . Все полученные аналитические выражения для  $ARL_0$  и  $ARL(\varepsilon)$  базируются на предположении нормальности распределения внутри подгрупп, то есть на точной справедливости связи

$$Y = \frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

При существенной асимметрии, тяжёлых хвостах или наличии мультимодальности реальные распределительные свойства статистики  $S$  могут заметно отличаться от теоретических, что приводит к систематическим искажениям фактических значений  $ARL_0$  и  $ARL(\varepsilon)$  относительно расчётных. Это означает, что карта, настроенная на целевое значение  $ARL_0^{\text{цел}}$  в предположении нормальности, в реальности может давать либо избыточное количество ложных сигналов, либо, напротив, быть слишком «инертной» и запаздывать с обнаружением сдвига изменчивости.

Особенно остро эта проблема проявляется при малых подгруппах  $n$ , когда распределение  $S$  существенно асимметрично, а оценка дисперсии обладает высокой вариативностью. В этом случае даже небольшие отклонения от нормальности приводят к значительным смещениям и изменению формы распределения  $S$ , делая расчётные значения  $ARL$  малоадекватными. Практически это требует либо предварительного анализа распределения (включая проверку на выбросы и грубые нарушения нормальности), либо использования робастных альтернатив стандартного отклонения, а также, при необходимости, перехода к более крупным подгруппам, обеспечивающим более стабильные оценки изменчивости.

С точки зрения применения нацеленного дизайна по  $k$  это означает, что полученные оптимальные значения  $k_{\text{opt}}$  следует рассматривать как ориентировочные при существенной ненормальности и, по возможности, верифицировать их с помощью имитационного моделирования, основанного на реальном распределении данных.

Ключевым элементом постановки задачи оптимизации является выбор значения  $\varepsilon > 1$ , под которое нацеливается минимизация  $ARL_1(k, \varepsilon)$ . На практике  $\varepsilon$  интерпретируется как кратность роста стандартного отклонения относительно исходного уровня  $\sigma_0$ , при которой сдвиг уже считается технологически значимым и требующим корректирующих действий. Слишком малое значение  $\varepsilon$  приводит к тому, что карта становится чрезмерно чувствительной к несущественным флюктуациям, тогда как слишком большое  $\varepsilon$  фокусирует проектирование лишь на грубых нарушениях, оставляя малые и средние сдвиги практически неотслеживаемыми.

Выбор репрезентативного  $\varepsilon$  должен опираться на спецификацию допусков, анализ исторических данных и оценку влияния роста изменчивости на показатели пригодности процесса ( $C_p, C_{pk}$ ) и уровень брака. В операциях финишного шлифования естественным ориентиром может служить такой рост стандартного отклонения, при котором ожидаемый процент выхода

параметра за пределы поля допуска достигает экономически неприемлемого уровня. В этом смысле связывает статистические характеристики карты с технологическими и экономическими критериями качества.

Следует подчеркнуть, что выбор  $\varepsilon$  не является единственным и раз навсегда заданным: для различных стадий жизненного цикла процесса могут быть оправданы разные значения репрезентативного сдвига. На этапе отладки процесса разумен выбор более чувствительного уровня  $\varepsilon$ , тогда как при устойчивом серийном производстве целесообразно нацеливать карту на более крупные сдвиги, снижая нагрузку на систему реагирования.

Контроль изменчивости по  $S$ -карте в реальном производстве практически никогда не используется изолированно: он дополняется контролем среднего уровня процесса с помощью карты  $\bar{X}$ , медианной, винзоризованной или иной робастной статистики. Такое сочетание обеспечивает интегрированное управление двумя ключевыми параметрами распределения – положением центра  $\mu$  и разбросом  $\sigma$ . При этом параметризация и нацеленный дизайн  $S$ -карты по  $k$  должны быть согласованы с характеристиками парной карты уровня, чтобы совместный контур управления обеспечивал требуемое поведение производственного процесса.

Во-первых, целевые значения  $ARL_0^{\text{цел}}$  для карт уровня и изменчивости должны быть согласованы между собой и с ресурсами системы реагирования: слишком частые сигналы любой из карт будут вызывать перегрузку персонала и повышать риск несанкционированного вмешательства, так называемого «тамперинга», тогда как чрезмерно большие  $ARL_0$  снижают оперативность обнаружения реальных изменений. Во-вторых, при выборе репрезентативного сдвига  $\varepsilon$  для  $S$ -карты полезно учитывать типичные сдвиги по уровню  $\mu$ : рост изменчивости и смещение центра часто возникают совместно (например, при износе инструмента), и парные карты должны быть настроены так, чтобы сигналы по уровню и дисперсии дополняли, а не противоречили друг другу.

Наконец, при интерпретации сигналов в регламенте корректирующих действий следует рассматривать комбинации срабатываний обеих карт. Сигнал только по  $S$ -карте при стабильном уровне  $\mu$  может указывать на деградацию стабильности процесса без явного смещения центра, тогда как одновременный сигнал по уровню и изменчивости требует более глубокого анализа причин, включая возможные изменения режима обработки, настройку оборудования или системные проблемы с сырьём. Таким образом,  $S$ -карта с нацеленным по  $k$  дизайном должна рассматриваться как элемент связанного комплекса карт, обеспечивающего полноту и согласованность контроля параметров распределения качества.

### 2.1.9. Табличная реализация

Несмотря на то, что все необходимые характеристики  $S$ -карты могут быть вычислены аналитически через функции распределения  $\chi^2$ , для практического применения в производственной среде удобнее опираться на заранее подготовленные таблицы. Такие таблицы позволяют инженеру по качеству быстро выбрать параметры карты ( $k$ , контрольные пределы, ожидаемую  $ARL_1$ ) без обращения к специализированному программному обеспечению и численным процедурам оптимизации. Для фиксированного объема подгруппы  $n$  таблица представляет собой компактное сводное представление для набора целевых значений  $ARL_0^{\text{цел}}$  и сетки сдвигов изменчивости  $\varepsilon$  в ней приводятся значения  $ARL_1(k_{\text{опт}}, \varepsilon)$ , соответствующие оптимальным по критерию минимальной средней длины серии при сдвиге параметрам карты.

Таблица 1 – Значения  $ARL_1(k_{\text{опт}}, \varepsilon)$  для целевых значений  $ARL_0^{\text{цел}}$  и набора сдвигов изменчивости  $\varepsilon$

$ARL_0^{\text{цел}}$	$k_{\text{опт}}$	$\varepsilon$									
		1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
150	2.71	41.95	16.19	8.09	4.86	3.33	2.51	2.03	1.73	1.53	1.39
200	2.82	51.51	18.98	9.17	5.37	3.60	2.67	2.14	1.80	1.58	1.43
250	2.90	60.59	21.53	10.13	5.81	3.84	2.81	2.22	1.86	1.62	1.46
300	2.97	69.32	23.92	11.01	6.21	4.05	2.94	2.30	1.91	1.66	1.49
370	3.05	81.10	27.05	12.14	6.71	4.31	3.09	2.40	1.98	1.70	1.52
400	3.08	86.02	28.33	12.59	6.92	4.42	3.15	2.44	2.00	1.72	1.53
500	3.16	101.95	32.39	14.01	7.53	4.73	3.33	2.55	2.08	1.77	1.57
600	3.22	117.29	36.18	15.30	8.09	5.01	3.49	2.65	2.14	1.82	1.60
700	3.28	132.15	39.76	16.50	8.59	5.26	3.63	2.73	2.20	1.86	1.63
800	3.33	146.61	43.17	17.62	9.06	5.49	3.76	2.81	2.25	1.89	1.66
1000	3.41	174.52	49.56	19.68	9.90	5.90	3.99	2.95	2.34	1.96	1.70

Для заданного объема подгруппы  $n$  формируется отдельная таблица. В качестве примера рассмотрим  $n = 9$ , характерный для операций финишного шлифования. На подготовительном этапе выбирается набор целевых уровней устойчивости  $ARL_0^{\text{цел}}$ , отражающих типичные требования производства (например,  $ARL_0^{\text{цел}} = 200, 370, 500, 700, 1000$ ). Для каждого такого значения  $ARL_0^{\text{цел}}$  решается задача оптимизации по параметру  $k$ , описанная в подразделе 2.1.7: находится  $k_{\text{опт}}(n, ARL_0^{\text{цел}}, \varepsilon^*)$ , обеспечивающий минимальное  $ARL_1$  для выбранного репрезентативного сдвига  $\varepsilon^* > 1$  при соблюдении ограничения  $ARL_0 \geq ARL_0^{\text{цел}}$ .

После нахождения  $k_{\text{опт}}$  для каждой строки вычисляется семейство значений  $ARL_1(k_{\text{опт}}, \varepsilon_j)$  на сетке  $\varepsilon_j$ , включающей малые и умеренные сдвиги изменчивости (например,  $\varepsilon_j = 1.1; 1.2; 1.3; \dots; 2.0$ ). В результате основная таблица для  $n = 9$  представляет собой матрицу, где

каждая строка соответствует фиксированному  $ARL_0^{\text{цел}}$ , а каждый столбец – конкретному значению  $\varepsilon_j$ . Для удобства эксплуатации к мастер-таблице целесообразно добавлять вспомогательные столбцы, содержащие найденные значения  $k_{\text{opt}}$  и соответствующие им контрольные пределы  $L_{CL}$  и  $U_{CL}$ , чтобы инженер по качеству мог непосредственно перенести эти параметры в регламент настройки карты.

Стандартный формат таблиц предполагает, что по вертикали откладываются целевые значения  $ARL_0^{\text{цел}}$ , а по горизонтали – сетка сдвигов  $\varepsilon$ , для которых требуется знать ожидаемую среднюю длину серии при уже оптимизированных параметрах карты. Элемент таблицы на пересечении строки, соответствующей  $ARL_0^{\text{цел}}$ , и столбца, соответствующего  $\varepsilon_j$ , содержит значение

$$ARL_1(k_{\text{opt}}(ARL_0^{\text{цел}}, \varepsilon^*), \varepsilon_j),$$

то есть среднюю длину серии при сдвиге  $\varepsilon_j$  для карты, спроектированной под целевой уровень  $ARL_0^{\text{цел}}$  и репрезентативный сдвиг  $\varepsilon^*$ .

Такой формат обеспечивает интуитивно понятный сценарий использования. На этапе проектирования инженер выбирает нужную строку, исходя из допустимой частоты ложных сигналов (целевое  $ARL_0^{\text{цел}}$ ). Далее он просматривает значения  $ARL_1$  по горизонтали и оценивает, насколько быстро карта будет реагировать на сдвиги изменчивости, представляющие интерес в данной операции. При необходимости можно сопоставить несколько строк (разные  $ARL_0^{\text{цел}}$ ), чтобы увидеть, как изменение допустимого уровня ложных тревог влияет на задержку обнаружения сдвига. Дополнительная таблица или блок параметров, содержащий  $k_{\text{opt}}$ ,  $L_{CL}$  и  $U_{CL}$  для каждой строки, обеспечивает прямую трассировку от выбранного режима работы к конкретным числовым параметрам контрольной карты.

Поскольку в таблицу включаются лишь конечное число узлов по  $\varepsilon$ , на практике возникает необходимость оценивать  $ARL_1(k_{\text{opt}}, \varepsilon)$  для значений сдвига, не попадающих точно в сетку. С учётом того, что для фиксированного  $k$  функция  $ARL(\varepsilon)$  монотонно убывает и гладко изменяется по  $\varepsilon > 1$ , в большинстве случаев достаточно простой линейной интерполяции по  $\varepsilon$  между двумя ближайшими столбцами. При более строгих требованиях к точности предпочтительно интерполировать не сами значения  $ARL$ , а их обратные величины  $1/ARL$  или логарифмы, что лучше отражает практически важные изменения скорости срабатывания карты при крупных сдвигах.

Перенастройка под иные объёмы подгруппы  $n$  может осуществляться двумя путями. Более строгий и предпочтительный подход состоит в том, чтобы для каждого интересующего значения  $n$  ( $n = 5, 9, 15, 25$ ) формировать отдельную таблицу по описанной схеме, используя точные функции  $E(S)$ ,  $\text{Var}(S)$  и  $\chi^2$ -распределение с  $(n - 1)$  степенями свободы. Такой набор

таблиц покрывает подавляющее большинство практических ситуаций и позволяет выбирать  $n$ , исходя из технологических и метрологических ограничений.

## **2.2 Построение контрольной карты средних с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге**

### 2.2.1. Постановка задачи и основные обозначения

Рассматривается контрольная карта выборочных средних для нормального процесса, находящегося в состоянии статистического контроля. Предполагается, что контролируемая характеристика качества  $X$  при исправном процессе распределена нормально с параметрами  $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ , где  $\mu_0$  – номинальное значение среднего, а  $\sigma$  – известное или надёжно оценённое среднеквадратическое отклонение.

Контрольная карта строится в виде схемы Шухарта с симметричными границами по среднему [41, 42]. Нижняя и верхняя контрольные границы задаются соотношениями

$$LCL = \mu_0 - k\sigma, UCL = \mu_0 + k\sigma,$$

где  $k > 0$  – настраиваемый параметр ширины контрольной зоны. В дальнейшем именно коэффициент  $k$  рассматривается как основной параметр синтеза карты.

После возникновения нарушения процесса предполагается смещение математического ожидания контролируемой величины от  $\mu_0$  до  $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ . Величина  $\delta$  интерпретируется как относительное смещение среднего в единицах  $\sigma$  и рассматривается как технологически критический сдвиг, обнаружение которого должно происходить с минимально возможной задержкой. Таким образом,  $\delta > 0$  задаётся как параметр постановки задачи, исходя из требований к чувствительности карты для конкретной операции механообработки.

Основной задачей подраздела является выбор значения  $k$ , обеспечивающего при фиксированном уровне защиты от ложных срабатываний заданную скорость обнаружения сдвига  $\delta$ . Введём обозначения  $ARL(k, 0)$  для средней длины серии при отсутствии сдвига, когда процесс остаётся под контролем, и  $ARL(k, \delta)$  для средней длины серии до момента регистрации сигнала при наличии смещения  $\delta > 0$ . Тогда параметр  $k$  определяется из задачи условной оптимизации: при заданном целевом значении  $ARL_0 = ARL(k, 0)$ , характеризующем частоту ложных тревог, требуется минимизировать  $ARL(k, \delta)$  для заранее фиксированного критического сдвига  $\delta$ .

Таким образом, уже на этапе постановки задачи вводится совокупность основных обозначений  $\mu_0$ ,  $\sigma$ ,  $k$ ,  $\delta$ ,  $ARL(k, 0)$ ,  $ARL(k, \delta)$ , позволяющих формализовать проблему как однопараметрическую задачу синтеза контрольной карты с учётом компромисса между устойчивостью к ложным сигналам и чувствительностью к сдвигу уровня процесса.

### 2.2.2. Показатель средней длины серии и критерий оптимальности

Ключевой характеристикой эффективности контрольной карты в рамках предлагаемого подхода является средняя длина серии ARL, определяемая как математическое ожидание числа выборок до появления сигнала. В условиях процесса под статистическим контролем ( $\delta = 0$ ) показатель  $ARL(k, 0)$  описывает средний интервал между ложными срабатываниями. При наличии сдвига среднего на величину  $\delta > 0$  величина  $ARL(k, \delta)$  характеризует ожидаемую задержку в обнаружении данного сдвига.

Для одноступенчатой карты Шухарта, основанной на нормальном распределении,  $ARL(k, 0)$  непосредственно связана с вероятностью ложной тревоги  $\alpha$  при одной выборке. При симметричных границах

$$LCL = \mu_0 - k\sigma, UCL = \mu_0 + k\sigma$$

и нормальности распределения имеем

$$\alpha = P\{X < LCL \text{ или } X > UCL \mid \delta = 0\} = \Phi(-k) + 1 - \Phi(k),$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция распределения стандартного нормального закона. Поскольку сигналы на последовательных выборках при независимых наблюдениях являются редкими событиями, средняя длина серии при процессе под контролем выражается как

$$ARL(k, 0) = \frac{1}{\alpha}.$$

Классический выбор  $k = 3$  даёт  $\alpha \approx 0,0027$  и, следовательно,  $ARL_0 \approx 370$ , что традиционно принимается в машиностроении в качестве эталонного уровня защиты от ложных сигналов.

В настоящей работе показатель ARL используется не только для описания устойчивости к ложным тревогам, но и как критерий чувствительности карты к заданному сдвигу. При фиксированном значении  $ARL_0$ , соответствующем требуемой частоте ложных срабатываний, параметр  $k$  выбирается таким образом, чтобы минимизировать  $ARL(k, \delta)$  при заранее заданном критическом сдвиге  $\delta > 0$ :

$$ARL(k, \delta) \rightarrow \min \square, \text{при условии } ARL(k, 0) = ARL_0.$$

Такой критерий оптимальности естественно согласуется с практической задачей сокращения времени между возникновением критического смещения процесса и его сигнализацией, при этом уровень ложных тревог остаётся сопоставимым с уровнем стандартной трёхсигмовой карты.

Методологически подобный подход восходит к классическим работам по оптимизации CUSUM-карт, где минимизируется ожидаемое время до обнаружения сдвига при заданной  $ARL_0$  для процесса под контролем. В настоящем подразделе данная логика адаптируется к простым картам Шухарта: вместо структурных изменений схемы контроля (накопление сумм, введение памяти) оптимизируется единственный параметр  $k$ , определяющий ширину контрольной зоны. Это позволяет, с одной стороны, сохранить привычный формат карт средних и существующие регламенты их интерпретации, а с другой – существенно повысить чувствительность к заранее определённому технологически значимому сдвигу  $\delta$  без ухудшения заданного уровня  $ARL_0$ .

### 2.2.3. Связь коэффициента $k$ , уровня ложных тревог и целевого значения $ARL_0$

Коэффициент  $k$  в формулах контрольных границ

$$LCL = \mu_0 - k\sigma, UCL = \mu_0 + k\sigma$$

является ключевым параметром, определяющим уровень защиты от ложных тревог. При нормальном распределении контролируемой величины и отсутствии сдвига ( $\delta = 0$ ) вероятность сигнала на одной выборке равна

$$\alpha(k) = P\{X < LCL \text{ или } X > UCL \mid \delta = 0\} = \Phi(-k) + 1 - \Phi(k),$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция распределения стандартного нормального закона. Для симметричных границ  $\Phi(-k) = 1 - \Phi(k)$ , поэтому

$$\alpha(k) = 2[1 - \Phi(k)].$$

Средняя длина серии для процесса под контролем выражается через  $\alpha(k)$  как

$$ARL(k, 0) = \frac{1}{\alpha(k)} = \frac{1}{2[1 - \Phi(k)]}.$$

Тем самым устанавливается взаимно однозначная связь между параметром  $k$ , уровнем ложных тревог  $\alpha$  и целевым значением  $ARL_0$ . Задание  $ARL_0$  эквивалентно заданию допустимой вероятности ложного сигнала  $\alpha_0 = 1/ARL_0$ , а требуемое значение  $k$  находится как решение уравнения

$$2[1 - \Phi(k)] = \frac{1}{ARL_0}.$$

В классическом варианте трёхсигмовой карты принимается  $k = 3$ , что даёт  $\alpha \approx 0,0027$  и  $ARL_0 \approx 370$ . В предлагаемом подходе этот выбор рассматривается не как жёсткий стандарт, а как частный случай, соответствующий определённому уровню ложных срабатываний. При изменении требований к частоте ложных тревог (например, при переходе к более жёсткому или более либеральному режиму контроля) целевое значение  $ARL_0$  может задаваться в широком

диапазоне, а соответствующее значение  $k$  вычисляется аналитически или по заранее подготовленным таблицам.

Важно отметить, что в случае карты выборочных средних  $\bar{X}$  также соотношения применимы к стандартизованной статистике  $(\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ , где  $\sigma/\sqrt{n}$  – стандартное отклонение выборочного среднего. Тогда контрольные границы для  $\bar{X}$  записываются в виде

$$LCL_{\bar{X}} = \mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad UCL_{\bar{X}} = \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

а связь между  $k$ ,  $\alpha$  и  $ARL_0$  остаётся прежней, поскольку стандартизованная статистика имеет стандартное нормальное распределение. Это обеспечивает переносимость полученных результатов на практические схемы контроля партийных выборок.

Таким образом, коэффициент  $k$  выступает посредником между практическим требованием к частоте ложных тревог, выражаемым через  $ARL_0$ , и теоретическими характеристиками контрольной карты. Фиксация  $ARL_0$  однозначно задаёт допустимый уровень  $\alpha$  и, следовательно, определяет область допустимых значений  $k$ , в рамках которой далее решается задача оптимизации чувствительности к заданному сдвигу процесса.

#### 2.2.4. Математическая формулировка условной оптимизационной задачи по параметру $k$

Для формального описания задачи оптимального выбора коэффициента  $k$  введём вероятности сигнала контрольной карты при отсутствии и при наличии сдвига. Пусть после сдвига среднего на величину  $\delta\sigma$  контролируемая величина распределена как  $X \sim N(\mu_0 + \delta\sigma, \sigma^2)$ . Стандартизовав  $X$  относительно нового среднего, получаем  $Z = (X - (\mu_0 + \delta\sigma))/\sigma \sim N(0,1)$ . Условие выхода за контрольные границы в этом случае переписывается как

$$X < LCL \Leftrightarrow Z < -k - \delta, \quad X > UCL \Leftrightarrow Z > k - \delta.$$

Тогда вероятность сигнала на одной выборке при сдвиге  $\delta > 0$  равна

$$p_\delta(k) = P\{Z < -k - \delta\} + P\{Z > k - \delta\} = \Phi(-k - \delta) + 1 - \Phi(k - \delta),$$

а соответствующая средняя длина серии определяется соотношением

$$ARL(k, \delta) = \frac{1}{p_\delta(k)}.$$

Аналогично для процесса под контролем ( $\delta = 0$ ) имеем

$$p_0(k) = 2[1 - \Phi(k)], \quad ARL(k, 0) = \frac{1}{p_0(k)} = \frac{1}{2[1 - \Phi(k)]}.$$

Целевое значение  $ARL_0$  задаётся технологическими требованиями к частоте ложных тревог и рассматривается как параметр задачи синтеза.

Тогда идеализированная математическая постановка задачи выбора коэффициента  $k$  для заданного критического сдвига  $\delta > 0$  имеет вид

$$\text{ARL}(k, \delta) \rightarrow \min_{k>0}$$

при ограничении

$$\text{ARL}(k, 0) = \text{ARL}_0.$$

Условие  $\text{ARL}(k, 0) = \text{ARL}_0$  обеспечивает сохранение фиксированного уровня ложных срабатываний, совпадающего с уровнем эталонной контрольной карты (например, с классической трёхсигмовой картой при  $\text{ARL}_0 \approx 370$ ). Критерий минимизации  $\text{ARL}(k, \delta)$  формализует требование максимально быстрого обнаружения заранее заданного технологически значимого сдвига  $\delta$ .

В практической реализации задачи оптимизации учитываются следующие особенности. Во-первых, в реальных условиях  $\mu_0$  и  $\sigma$  оцениваются по конечным выборкам, что вносит дополнительную вариабельность в фактические значения  $\alpha$  и  $\text{ARL}_0$ . Поэтому вместо точного равенства  $\text{ARL}(k, 0) = \text{ARL}_0$  используется допуск на отклонение фактической  $\text{ARL}_0$  от целевого значения. Во-вторых, при использовании таблиц или численного моделирования для расчёта  $\text{ARL}(k, \delta)$  оптимизация по  $k$  проводится по дискретной сетке или посредством одномерных методов поиска (поиска минимума) на заданном интервале  $(k_{\min}, k_{\max})$ , согласованном с технологическими ограничениями.

Таким образом, с одной стороны, демонстрируется связь аналитических выражений для  $\text{ARL}(k, 0)$  и  $\text{ARL}(k, \delta)$  с используемыми таблицами, позволяющими практикующему инженеру быстро выбирать значения  $k$  под заданные  $\text{ARL}_0$  и  $\delta$ . С другой стороны, формулируется численный алгоритм однопараметрической оптимизации, который служит основой для автоматизированной настройки оптимальной контрольной карты средних в условиях конкретного производства.

## 2.2.5. Алгоритм поиска оптимального коэффициента $k$ и построение контрольных границ

Практическая реализация предложенного подхода к выбору параметра  $k$  опирается на сочетание аналитических соотношений для  $\text{ARL}(k, 0)$ ,  $\text{ARL}(k, \delta)$  и заранее подготовленных таблиц (мастер-таблиц), позволяющих существенно ускорить настройку контрольной карты.

Алгоритм синтеза оптимальной карты включает следующие логические этапы. На первом этапе задаются исходные требования: целевое значение  $\text{ARL}_0$ , отражающее допустимую частоту ложных тревог, и технологически значимый сдвиг  $\delta > 0$ , для которого требуется минимизировать задержку обнаружения. Эти параметры задаются на уровне конкретной операции (например, высокоточного шлифования) и фиксируются как входные данные процедуры оптимизации.

На втором этапе выбирается способ расчёта  $ARL(k, 0)$  и  $ARL(k, \delta)$ . Для процесса под контролем используется аналитическое выражение

$$ARL(k, 0) = \frac{1}{2[1 - \Phi(k)]},$$

позволяющее по заданному  $ARL_0$  однозначно восстановить исходное приближение для  $k$  или, наоборот, вычислить фактический  $ARL_0$  для выбранного значения  $k$ . Для процесса со сдвигом  $\delta$  вероятность сигнала на одной выборке определяется формулой

$$p_\delta(k) = \Phi(-k - \delta) + 1 - \Phi(k - \delta), ARL(k, \delta) = \frac{1}{p_\delta(k)}.$$

На этом шаге возможно два режима работы: прямой аналитический расчёт по указанным формулам либо использование заранее вычисленной мастер-таблицы значений  $ARL(k, \delta)$  на регулярной сетке по  $k$  и  $\delta$ .

На третьем этапе реализуется собственно однопараметрическая оптимизация. На заданном интервале допустимых значений  $k \in (k_{\min}, k_{\max})$ , согласованном с требованиями к  $ARL_0$ , проводится поиск такого значения  $k^*$ , при котором выполняется условие  $ARL(k^*, 0) \approx ARL_0$  и одновременно достигается минимум  $ARL(k, \delta)$ . В численном плане это может быть реализовано либо как решение задачи с явным ограничением (поиск минимума  $ARL(k, \delta)$  при одновременном контроле отклонения  $ARL(k, 0)$  от  $ARL_0$ ), либо как двухшаговая процедура, когда сначала по  $ARL_0$  подбирается начальное приближение  $k_0$ , а затем в малой окрестности  $k_0$  уточняется  $k^*$ , обеспечивающий наилучший компромисс между сохранением  $ARL_0$  и уменьшением  $ARL(k, \delta)$ . При использовании мастер-таблиц оптимальное значение  $k^*$  выбирается из дискретного набора значений, для которых заранее рассчитаны  $ARL(k, 0)$  и  $ARL(k, \delta)$ .

На четвертом этапе по найденному оптимальному коэффициенту  $k^*$  строятся окончательные контрольные границы карты средних. Для индивидуальных наблюдений они имеют вид

$$LCL = \mu_0 - k^* \sigma, UCL = \mu_0 + k^* \sigma,$$

для карт по выборочным средним –

$$LCL_{\bar{x}} = \mu_0 - k^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, UCL_{\bar{x}} = \mu_0 + k^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

На этом шаге формируются регламентные параметры карты и связываются с целевыми характеристиками:  $ARL_0$  и  $ARL(k^*, \delta)$ .

Отдельно следует подчеркнуть, что в рассматриваемой постановке возможно построить «настоящую» мастер-таблицу  $ARL(k, \delta)$ , которая не зависит от размера подгруппы  $n$ . Это достигается за счёт перехода к стандартизованному описанию сдвига в единицах среднеквадратического отклонения статистики, а не исходной величины. В результате все

зависимости  $ARL(k, \delta)$  сохраняют свою форму при переходе от индивидуальных наблюдений к выборочным средним, а влияние размера подгруппы проявляется только при обратном переходе к физическим границам по  $\bar{X}$ . С практической точки зрения это означает, что инженер качества может пользоваться единой универсальной мастер-таблицей по параметрам  $k$  и  $\delta$ , а пересчёт к конкретным значениям  $LCL_{\bar{X}}$  и  $UCL_{\bar{X}}$  выполняется уже на уровне конкретной операции через множитель  $\sigma/\sqrt{n}$ .

#### 2.2.6. Теоретические и практические преимущества оптимизированной $\bar{X}$ -карты и область её применения

Предложенная методика проектирования контрольной карты средних опирается на сформулированный критерий оптимальности: минимизацию средней длины серии  $ARL(k, \delta)$  при фиксированном уровне защиты от ложных тревог, то есть при условии  $ARL(k, 0) = ARL_0$ . С теоретической точки зрения это означает, что для заранее заданного критического сдвига  $\delta$  решается задача условной оптимизации по единственному параметру  $k$ , обеспечивающая оптимальное в смысле  $ARL$  поведение карты в окрестности интересующего сдвига. В отличие от традиционного выбора  $k = 3$ , обусловленного историческими соображениями и удобством интерпретации, оптимизированное значение  $k^*$  выводится из явной связи между параметром карты, вероятностью ложного сигнала и функцией распределения нормального закона.

Преимущество разработанного подхода является его согласованность с современными методами оптимизации последовательных схем контроля. Логика минимизации  $ARL(k, \delta)$  при фиксированном  $ARL_0$ , широко применяемая при построении CUSUM- и EWMA-карт, перенесена на простую  $\bar{X}$ -карту без изменения её структуры. Тем самым достигается компромисс между математической оптимальностью и сохранением привычного для инженеров формата контрольной карты. Дополнительным результатом является возможность построения универсальной мастер-таблицы  $ARL(k, \delta)$ , не зависящей от размера подгруппы, что теоретически упрощает анализ чувствительности карты и делает полученные зависимости масштабируемыми для различных схем выборочного контроля.

С практической стороны оптимизированная  $\bar{X}$ -карта обладает рядом важных преимуществ. Во-первых, она ориентирована на обнаружение конкретного, технологически значимого сдвига  $\delta$ , который задаётся исходя из требований к точности и стабильности конкретной операции (например, финишного шлифования с жёсткими допусками). Это позволяет фокусировать ресурсы контроля на действительно критичных отклонениях, вместо универсального, но не всегда оптимального режима трёхсигмовой карты.

Во-вторых, за счёт снижения  $ARL(k^*, \delta)$  при неизменном  $ARL_0$  сокращается ожидаемое время между возникновением сдвига и его сигнализацией, что непосредственно уменьшает объём продукции, потенциально выводимой за пределы допусков, и снижает риск накопления скрытого брака.

В-третьих, предлагаемая карта сохраняет простоту внедрения и использования: на уровне цеха и участка она не отличается по форме и правилам интерпретации от классической  $\bar{X}$ -карты. Все изменения сосредоточены в значении коэффициента  $k^*$ , а вычисление оптимального значения может быть вынесено в специализированный программный модуль или предварительно подготовленные номограммы и таблицы. Это облегчает включение метода в действующие регламенты статистического управления, не требуя радикальной перестройки обучающих материалов и инструкций для персонала.

Область применения оптимизированной  $\bar{X}$ -карты охватывает, в первую очередь, серийные и массовые производства с относительно стабильным распределением контролируемых характеристик и надёжно оцениваемыми параметрами  $\mu_0$  и  $\sigma$ . К таким процессам относятся операции высокоточной механообработки, шлифование ответственных поверхностей, прецизионная сборка узлов, где невелики смещения по уровню, но критичны даже умеренные отклонения от номинала. В этих условиях предложенный подход позволяет, не увеличивая поток ложных сигналов, повысить оперативность реагирования на сдвиги, влияющие на пригодность продукции. Вместе с тем метод менее эффективен при выраженных отклонениях от нормальности, значительной нестабильности дисперсии или при необходимости одновременно контролировать широкий спектр возможных сдвигов; в таких случаях целесообразно сочетать оптимизированную  $\bar{X}$ -карту с более сложными схемами контроля (CUSUM, EWMA, робастные карты).

Для практической реализации алгоритма используется универсальная мастер-таблица значений средней длины серии  $ARL(k, \delta)$ , построенная в стандартизованных единицах. Фрагмент такой таблицы приведён ниже.

Таблица 2 – Значения средней длины серии  $ARL(k, \delta)$

$k$	$ARL_0$	$\delta$										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
2	22.0	22.0	21.5	20.1	18.1	15.9	13.7	11.7	10.0	8.5	7.3	6.2
2.05	24.8	24.8	24.2	22.5	20.2	17.7	15.2	12.9	10.9	9.3	7.9	6.8
2.1	28.0	28.0	27.3	25.4	22.7	19.7	16.8	14.2	12.0	10.1	8.6	7.3
2.15	31.7	31.7	30.9	28.6	25.4	22.0	18.7	15.7	13.2	11.1	9.4	7.9
2.2	36.0	36.0	35.0	32.3	28.6	24.6	20.8	17.4	14.6	12.2	10.2	8.6

$k$	$ARL_0$	$\delta$										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
2.25	40.9	40.9	39.7	36.6	32.3	27.6	23.2	19.4	16.1	13.4	11.2	9.4
2.3	46.6	46.6	45.2	41.5	36.5	31.1	26.0	21.5	17.8	14.8	12.3	10.3
2.35	53.3	53.3	51.6	47.3	41.3	35.0	29.1	24.0	19.8	16.3	13.5	11.2
2.4	61.0	61.0	59.1	53.9	46.9	39.5	32.7	26.8	22.0	18.0	14.9	12.3
2.45	70.0	70.0	67.7	61.5	53.3	44.7	36.8	30.0	24.5	20.0	16.4	13.5
2.5	80.5	80.5	77.8	70.5	60.8	50.7	41.5	33.7	27.3	22.2	18.1	14.9
2.55	92.8	92.8	89.5	80.9	69.4	57.6	46.9	37.9	30.5	24.7	20.1	16.5
2.6	107.3	107.3	103.3	93.0	79.4	65.6	53.1	42.7	34.2	27.6	22.3	18.2
2.65	124.2	124.2	119.5	107.2	91.1	74.8	60.3	48.2	38.5	30.8	24.8	20.2
2.7	144.2	144.2	138.6	123.8	104.7	85.5	68.5	54.5	43.3	34.5	27.7	22.4
2.75	167.8	167.8	161.0	143.4	120.7	98.0	78.1	61.8	48.9	38.8	31.0	24.9
2.8	195.7	195.7	187.5	166.4	139.3	112.6	89.2	70.2	55.3	43.7	34.7	27.8
2.85	228.7	228.7	218.9	193.5	161.2	129.5	102.1	80.0	62.6	49.2	38.9	31.0
2.9	268.0	268.0	256.1	225.5	187.0	149.4	117.2	91.3	71.1	55.6	43.8	34.8
2.95	314.7	314.7	300.3	263.4	217.3	172.7	134.7	104.4	80.9	63.0	49.4	39.0
3	370.4	370.4	352.9	308.4	253.1	200.1	155.2	119.7	92.3	71.6	55.8	43.9
3.05	437.0	437.0	415.8	361.9	295.5	232.3	179.3	137.5	105.5	81.4	63.2	49.5
3.1	516.7	516.7	490.9	425.7	345.8	270.3	207.5	158.3	120.9	92.8	71.8	55.9
3.15	612.5	612.5	581.0	501.8	405.5	315.2	240.6	182.7	138.9	106.1	81.6	63.3
3.2	727.7	727.7	689.2	592.8	476.5	368.4	279.7	211.3	159.8	121.5	93.1	71.9
3.25	866.5	866.5	819.4	702.0	561.3	431.6	325.9	244.9	184.3	139.5	106.3	81.7
3.3	1034.3	1034.3	976.5	833.2	662.7	506.7	380.6	284.5	213.1	160.5	121.8	93.2
3.35	1237.4	1237.4	1166.4	991.1	784.1	596.2	445.4	331.3	246.9	185.1	139.8	106.5
3.4	1484.0	1484.0	1396.5	1181.7	929.9	703.1	522.5	386.6	286.7	213.9	160.8	121.9
3.45	1783.8	1783.8	1676.0	1412.1	1105.3	831.1	614.3	452.2	333.7	247.8	185.4	139.9
3.5	2149.3	2149.3	2016.0	1691.4	1316.7	984.5	723.8	530.1	389.3	287.7	214.3	161.0

Первая колонка содержит значения коэффициента  $k$ , задающего ширину контрольной зоны  $\pm k$  для стандартизованной статистики. Вторая колонка  $ARL_0$  показывает среднюю длину серии при отсутствии сдвига ( $\delta = 0$ ) и совпадает с колонкой  $ARL_0$ , вынесенной отдельно для удобства. Начиная с третьей колонки приводятся значения  $ARL(k, \delta_j)$  для фиксированной сетки стандартизованных сдвигов  $\delta_j = 0,00; 0,10; 0,20; \dots; 2,10$ . Таким образом, каждая строка таблицы соответствует конкретной настройке карты по параметру  $k$ , а каждый столбец –

определенной величине сдвига  $\delta_j$  в единицах среднеквадратического отклонения контролируемой статистики.

Важно, что таблица построена в нормированной постановке, когда дисперсия статистики равна единице. Для карты средних  $\bar{X}$  это означает, что  $\delta$  трактуется как сдвиг в единицах  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ . В терминах исходного процесса, если среднее смещается на  $\Delta\mu$ , выраженное в единицах  $\sigma$  процесса, то эффективный сдвиг для статистики  $\bar{X}$  равен  $\delta_{\text{eff}} = (\Delta\mu/\sigma)\sqrt{n}$ . Именно  $\delta_{\text{eff}}$  затем используется для выбора соответствующего столбца в мастер-таблице. Благодаря такой нормировке мастер-таблица не зависит от размера подгруппы  $n$  и может применяться для любой схемы выборочного контроля, а пересчёт к конкретным границам  $\bar{X}$ -карты выполняется отдельно.

В строке с  $k = 3,00$  видно, что  $ARL_0 \approx 370,40$ , что соответствует классической трёхсигмовой карте. В той же строке значения в колонках  $\delta = 0.80$ ,  $\delta = 1.00$ ,  $\delta = 1.50$  и т. д. показывают, как убывает средняя длина серии по мере роста сдвига  $\delta$ , то есть насколько быстрее карта сигнализирует при всём более выраженных отклонениях среднего.

Рассмотрим пример настройки  $\bar{X}$ -карты для конкретного процесса. Пусть технологически обоснован целевой уровень защиты от ложных срабатываний  $ARL_0 \approx 370$ , а критическим считается сдвиг среднего процесса на  $\Delta\mu = 0,5\sigma$  при размере подгруппы  $n = 4$ .

Переход к стандартизованному сдвигу. Для карты средних дисперсия статистики равна  $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/n$ . Тогда сдвиг в единицах  $\sigma_{\bar{X}}$  составляет

$$\delta_{\text{eff}} = \frac{\Delta\mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{0,5\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} = 0,5\sqrt{n}.$$

При  $n = 4$  получаем  $\delta_{\text{eff}} = 0,5 \cdot 2 = 1,0$ . Следовательно, для оценки чувствительности карты к выбранному сдвигу следует использовать столбец  $\delta = 1,0$ .

Выбор строки по целевому  $ARL_0$ . В мастер-таблице находим строку, в которой  $ARL_0$  максимально близко к заданному значению 370. Для  $k = 3,00$  имеем  $ARL_0 = 370,40$ , что практически совпадает с целевым уровнем. Это означает, что выбор  $k \approx 3,0$  обеспечивает требуемую частоту ложных тревог.

Оценка задержки обнаружения сдвига. В той же строке для  $k = 3,00$  смотрим значение в столбце  $ARL_{\text{delta\_1.00}}$ . По фрагменту таблицы оно составляет примерно  $ARL(3,0; \delta = 1,0) \approx 43,9$ . Это означает, что при сдвиге среднего процесса на  $\Delta\mu = 0,5\sigma$  и размере подгруппы  $n = 4$  классическая трёхсигмовая карта в среднем срабатывает через около 44 подгруппы после появления сдвига.

Интерпретация и сравнение вариантов. Если обнаруженная задержка считается избыточной, инженер может рассмотреть альтернативные уровни  $ARL_0$ . Например, при более

«жёстком» контроле ( $ARL_0$  ниже 370) выбираются строки с меньшими значениями  $k$ ; по соответствующим значениям  $ARL(k, \delta_{\text{eff}})$  легко сравнить, насколько уменьшается средняя длина серии при сдвиге и какова цена этого в виде увеличения частоты ложных тревог.

Таким образом, мастер-таблица  $ARL(k, \delta)$  служит удобным инструментом для быстрой оценки компромисса «устойчивость к ложным тревогам – скорость обнаружения заданного сдвига» и позволяет в явном виде реализовать описанный в подразделе 2.2.5 алгоритм выбора оптимального коэффициента  $k$  построения границ  $\bar{X}$ -карты.

В практическом использовании универсальной мастер-таблицы  $ARL(k, \delta)$  процедура проектирования оптимизированной  $\bar{X}$ -карты сводится к последовательному выбору параметра  $k$  на основе заданных целевых характеристик. В качестве исходных данных задаются требуемый уровень защиты от ложных срабатываний  $ARL_0^{\text{target}}$  и технологически значимый сдвиг среднего процесса  $\Delta\mu$ , обычно выражаемый в единицах  $\sigma$  процесса. При известном размере подгруппы  $n$  соответствующий эффективный сдвиг для статистики  $\bar{X}$  вычисляется как

$$\delta_{\text{eff}} = \frac{\Delta\mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\Delta\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \left(\frac{\Delta\mu}{\sigma}\right)\sqrt{n},$$

после чего в мастер-таблице используется столбец, соответствующий ближайшему значению  $\delta$  к  $\delta_{\text{eff}}$ . Поскольку таблица построена в нормированных единицах, эта операция не зависит от конкретного значения  $n$  и реализует заявленную инвариантность мастер-таблицы по размеру подгруппы.

Далее осуществляется отбор допустимых значений коэффициента  $k$  по уровню  $ARL_0$ . Для этого используется столбец  $ARL_0(k)$ , содержащий значения средней длины серии при  $\delta = 0$ . Из всех строк таблицы выбирается подмножество значений  $k$ , для которых выполняется условие приближённого совпадения с целевым уровнем, например  $ARL_0(k) \in [ARL_0^{\text{target}} = 0,95, ARL_0^{\text{target}} = 1,05]$ . Такой отбор задаёт множество вариантов настройки карты, которые не нарушают заданный режим ложных тревог и, следовательно, сопоставимы с принятым в отрасли эталонным уровнем (например,  $ARL_0 \approx 370$  для трёхсигмовой карты).

На следующем этапе среди отобранных значений  $k$  проводится оптимизация по критерию минимизации задержки обнаружения указанного сдвига. Для фиксированного столбца  $ARL(k, \delta_{\text{eff}})$  выбирается такое значение  $k^*$ , для которого  $ARL(k, \delta_{\text{eff}})$  минимально на множестве допустимых  $k$ . Таким образом, из всех схем с примерно одинаковой частотой ложных срабатываний выбирается та, которая обеспечивает наименьшую среднюю длину серии при критическом сдвиге  $\Delta\mu$ . При достаточно плотной сетке по  $k$  (например, с шагом 0,05)

оптимальное значение  $k^*$  может быть найдено непосредственно по таблице; при необходимости допускается дополнительная интерполяция между соседними значениями.

После определения оптимального коэффициента  $k^*$  выполняется переход от стандартизованного описания к конкретным границам контрольной карты для данного процесса. Для карты выборочных средних с параметрами  $\mu_0$ ,  $\sigma$  и размером подгруппы  $n$  границы рассчитываются по формулам

$$LCL_{\bar{X}} = \mu_0 - k^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, UCL_{\bar{X}} = \mu_0 + k^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

В результате описанная процедура обеспечивает непосредственное «навешивание» проектного решения на универсальную поверхность  $ARL(k, \delta)$ : целевые значения  $ARL_0^{\text{target}}$  и  $\Delta\mu$  однозначно приводят к выбору оптимального  $k^*$ , при котором сохраняется требуемый уровень ложных тревог и одновременно минимизируется средняя задержка обнаружения заданного сдвига процесса.

Таким образом, сформулирована и решена задача синтеза контрольной карты средних с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге уровня процесса. На основе нормальной модели и показателя  $ARL$  введён формальный критерий оптимальности, заключающийся в минимизации  $ARL(k, \delta)$  при фиксированном значении  $ARL_0$ , и получена строгая связь между коэффициентом  $k$ , уровнем ложных тревог и целевым  $ARL_0$ .

Показано, что задача выбора параметра  $k$  сводится к однопараметрической условной оптимизации, для которой разработан алгоритм численного решения на основе аналитических выражений или универсальной мастер-таблицы  $ARL(k, \delta)$ . На базе найденного оптимального значения  $k^*$  сформированы практические рекомендации по построению контрольных границ  $\bar{X}$ -карты как для индивидуальных наблюдений, так и для выборочных средних при произвольном размере подгруппы.

Разработанная методика обеспечивает одновременное соблюдение заданного уровня защиты от ложных срабатываний и повышение чувствительности карты к заранее определённому технологически значимому сдвигу процесса. Тем самым  $\bar{X}$ -карта из традиционного инструмента «наблюдения» за процессом превращается в настраиваемый с учётом целей качества элемент замкнутого контура статистического управления, пригодный для внедрения в серийных и массовых производствах с высокими требованиями к стабильности и воспроизводимости характеристик продукции.

## 2.3 Построение контрольной карты размахов для мониторинга изменчивости процесса с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге

### 2.3.1. Модель процесса и постановка задачи контроля изменчивости

Рассматривается однопараметрическая модель технологического процесса, для которого в статистически управляемом состоянии контролируемая характеристика качества  $X$  имеет нормальное распределение

$$X \sim N(\mu, \sigma_0^2),$$

где  $\mu$  – стационарное среднее значение процесса,  $\sigma_0$  – исходное (номинальное) среднеквадратическое отклонение. В дальнейшем без ограничения общности предполагается центрированная шкала измерений  $\mu = 0$  и нормировка по исходному стандарту  $\sigma_0 = 1$ .

После изменения изменчивости процесса (ухудшения стабильности, появления дополнительных источников разброса и т.п.) дисперсия возрастает, и распределение наблюдений принимает вид

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma = \varepsilon\sigma_0, \varepsilon > 1,$$

где  $\varepsilon$  – безразмерный множитель сдвига по изменчивости, характеризующий относительное увеличение стандартного отклонения по сравнению с исходным уровнем.

В качестве статистики для слежения за изменчивостью используется размах выборки  $\{x_1, \dots, x_n\}$  объёма  $n$ :

$$R = \max_i x_i - \min_i x_i.$$

Размах традиционно применяется в контрольных картах Шухарта для процессов с малым и средним объёмом подгруппы и обладает удобной интерпретацией как оценка ширины разброса внутри подгруппы.

Постановка задачи заключается в синтезе контрольной карты размахов, обеспечивающей, с одной стороны, заданную устойчивость к ложным срабатываниям, описываемую целевым значением  $ARL_0$  при отсутствии сдвига ( $\varepsilon = 1$ ), а с другой стороны – минимальную задержку обнаружения технологически значимого увеличения дисперсии, характеризуемую средней длиной серии  $ARL_1(\varepsilon)$  при  $\varepsilon > 1$ . Для этого в дальнейшем параметризуются контрольные границы через регулируемый коэффициент и строится зависимость  $ARL(\varepsilon)$  на основе точного распределения размаха при нормальном законе.

Таким образом, рассматриваемая модель процесса и выбор статистики  $R$  задают основу для дальнейшего анализа функции распределения нормированного размаха, вычисления вероятностей выхода за контрольные границы и последующей оптимизации параметров R-карты по критерию минимизации средней длины серии при заданном уровне  $ARL_0$ .

### 2.3.2. Распределение размаха выборки и функция распределения нормированного размаха $G_n(z)$

Для вывода вероятностных характеристик контрольной карты размахов ключевую роль играет распределение нормированного размаха. Пусть  $R$  – размах выборки объёма  $n$ , полученной из нормального распределения с параметрами  $N(\mu, \sigma^2)$ . Введём нормированную статистику

$$Z = \frac{R}{\sigma}.$$

Тогда распределение  $Z$  не зависит от конкретных значений  $\mu$  и  $\sigma$  и определяется только объёмом подгруппы  $n$ . Обозначим через  $G_n(z)$  функцию распределения нормированного размаха:

$$G_n(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{R}{\sigma} \leq z\right\}.$$

Для нормально распределённых наблюдений функция  $G_n(z)$  может быть выражена через функцию распределения и плотность стандартного нормального закона  $\Phi(\cdot)$  и  $\varphi(\cdot)$ :

$$G_n(z) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(t+z) - \Phi(t)]^{n-1} \varphi(t) dt.$$

Интегральное представление показывает, что  $G_n(z)$  зависит от объёма подгруппы только через показатель степени  $n - 1$  и коэффициент  $n$ , а также является гладкой, строго возрастающей функцией по  $z$ , принимающей значения от 0 до 1.

Поскольку при изменении дисперсии процесса стандартное отклонение  $\sigma$  заменяется на  $\varepsilon\sigma_0$ , нормированный размах  $Z = R/\sigma$  позволяет удобно выразить вероятности выхода статистики  $R$  за любые заданные границы через одну и ту же функцию  $G_n(z)$ , а влияние сдвига  $\varepsilon$  сводится к пересчёту аргумента  $z$ . Это обстоятельство будет использовано далее при выводе зависимостей допустимого уровня ложных тревог  $ARL_0$  и средней длины серии  $ARL_1(\varepsilon)$  от параметров контрольных границ R-карты.

### 2.3.3. Классическая карта размахов: моменты размаха и границы $d_2 \pm 3d_3$

В классической теории контрольных карт Шухарта для мониторинга изменчивости процесса при малых и средних объёмах подгруппы используется карта размахов, R-карта [41, 42]. При предположении нормальности наблюдений  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  моменты размаха выборки  $R$  могут быть выражены через табличные коэффициенты  $d_2$  и  $d_3$ , зависящие только от объёма подгруппы  $n$ . Для нормированного размаха  $Z = R/\sigma$  имеет место соотношение

$$E[Z] = d_2(n), \text{Var}[Z] = d_3^2(n),$$

откуда следует

$$E[R] = \sigma d_2, \text{Var}[R] = d_3^2 \sigma^2.$$

Значения коэффициентов  $d_2$  и  $d_3$  получены численно на основе распределения нормированного размаха и приводятся в справочниках по статистическому контролю процесса и стандартах на контрольные карты.

Классическая схема построения R-карты предполагает задание симметричных контрольных границ вокруг математического ожидания размаха. В нормированных единицах ( $\sigma = 1$ ) верхняя и нижняя контрольные границы задаются формулами

$$UCL = d_2 + 3d_3, LCL = d_2 - 3d_3.$$

Тем самым фактическая ширина контрольной зоны определяется «трёхсигмовым» уровнем по размаху, аналогичным правилу  $\mu \pm 3\sigma$  для карт среднего. При переходе к реальному масштабу достаточно умножить границы на оценку  $\hat{\sigma}$  либо использовать стандартные преобразования через  $\bar{R}$  и  $d_2$ .

Вероятность выхода размаха за контрольные границы при отсутствии сдвига по изменчивости ( $\varepsilon = 1$ ) выражается через функцию распределения нормированного размаха  $G_n(z)$ . В нормированных единицах эта вероятность имеет вид

$$P(\varepsilon = 1) = 1 - [G_n(UCL) - G_n(LCL)],$$

а соответствующая средняя длина серии при состоянии «под контролем» равна

$$ARL_0 = \frac{1}{P(\varepsilon = 1)}.$$

При классическом выборе границ  $d_2 \pm 3d_3$  значение  $ARL_0$  оказывается фиксированным (зависящим только от объёма подгруппы  $n$ ) и не подлежит тонкой настройке под конкретные требования к частоте ложных тревог.

При увеличении дисперсии процесса до  $\sigma = \varepsilon\sigma_0$ ,  $\varepsilon > 1$ , размах  $R$  стремится выходить за установленные границы чаще, что приводит к снижению  $ARL_1(\varepsilon)$  и ускорению обнаружения сдвига по изменчивости. Однако, жестко заданная ширина контрольной зоны, определяемая коэффициентом «3» при  $d_3$ , не позволяет управлять компромиссом между устойчивостью к ложным срабатываниям и чувствительностью к заданному сдвигу  $\varepsilon$ . Это обстоятельство мотивирует переход к обобщённой схеме R-карты с регулируемой шириной контрольной зоны.

#### 2.3.4. Карта размахов с переменной шириной контрольной зоны

Для повышения гибкости настройки R-карты вводится обобщённая схема, в которой ширина контрольной зоны задаётся произвольным коэффициентом  $k > 0$ , а не фиксированным значением 3. Используя результаты о математическом ожидании и дисперсии размаха, контрольные границы в нормированных единицах записываются в виде

$$LCL(k) = E[Z] - k\sqrt{Var[Z]} = d_2 - kd_3, UCL(k) = d_2 + kd_3.$$

Таким образом, классическая карта Шухарта соответствует частному случаю  $k = 3$ , тогда как в общем случае параметр  $k$  рассматривается как регулируемый параметр, определяющий ширину контрольной зоны и, следовательно, частоту сигналов.

Для заданного значения  $k$  вероятность выхода размаха за границы при сдвиге по изменчивости  $\varepsilon$  выражается через функцию  $G_n(z)$ . При наблюдениях с дисперсией  $\sigma^2 = \varepsilon^2 \sigma_0^2$  нормированный размах записывается как  $Z = R/(\varepsilon\sigma_0)$ , что эквивалентно замене аргумента в функции распределения:

$$P(k, \varepsilon) = 1 - [G_n(\text{UCL}(k)/\varepsilon) - G_n(\text{LCL}(k)/\varepsilon)].$$

Соответствующая средняя длина серии при данном сдвиге равна

$$\text{ARL}(k, \varepsilon) = \frac{1}{P(k, \varepsilon)}.$$

При  $\varepsilon = 1$  эта формула определяет  $\text{ARL}_0(k)$  – устойчивость R-карты к ложным тревогам при отсутствии изменения дисперсии, а при  $\varepsilon > 1$  –  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  – скорость обнаружения сдвига по изменчивости.

Варьируя параметр  $k$ , можно целенаправленно управлять компромиссом между  $\text{ARL}_0$  и  $\text{ARL}_1(\varepsilon)$ . Уменьшение  $k$  приводит к сужению контрольной зоны, росту вероятности выхода размаха за границы и уменьшению  $\text{ARL}_1(\varepsilon)$ , то есть к более быстрому обнаружению изменений, но одновременно снижает  $\text{ARL}_0(k)$  и увеличивает частоту ложных тревог. Увеличение  $k$ , напротив, расширяет контрольную зону, повышает  $\text{ARL}_0(k)$  и снижает чувствительность к заданному сдвигу  $\varepsilon$ .

Обобщённая R-карта с переменной шириной контрольной зоны рассматривается как основа для дальнейшей оптимизации параметра  $k$ . В следующих подразделах формализуется критерий выбора  $k$  в виде задачи минимизации средней длины серии при заданном технологически значимом сдвиге  $\varepsilon$  и ограничении на целевое значение  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$ . Такая постановка позволяет получить оптимизированные границы R-карты, которые при заданном уровне ложных тревог обеспечивают максимально быстрое обнаружение изменения дисперсии процесса.

Как отмечалось выше, статистика размаха  $R$  при нормальном распределении наблюдений полностью характеризуется своим математическим ожиданием и дисперсией, которые могут быть представлены в виде

$$\mathbb{E}[R] = \sigma d_2(n), \text{Var}[R] = d_3^2(n) \sigma^2,$$

где  $d_2(n)$  и  $d_3(n)$  – табличные коэффициенты, зависящие только от объёма подгруппы  $n$ .

Для перехода от классической схемы  $d_2 \pm 3d_3$  к более гибкой настройке вводится регулируемый параметр  $k > 0$ , который задаёт ширину контрольной зоны в единицах среднеквадратического отклонения размаха. В общем виде нижняя и верхняя контрольные границы определяются соотношениями

$$\text{LCL}(k) = \text{E}[R] - k\sqrt{\text{Var}[R]}, \text{UCL}(k) = \text{E}[R] + k\sqrt{\text{Var}[R]}.$$

Подставляя выражения для моментов размаха при нормальной модели, получаем в нормированных единицах ( $\sigma_0 = 1$ )

$$\text{LCL}(k) = d_2 - kd_3, \text{UCL}(k) = d_2 + kd_3.$$

Тем самым классический выбор  $\text{LCL} = d_2 - 3d_3$ ,  $\text{UCL} = d_2 + 3d_3$  соответствует частному случаю  $k = 3$ , а вариация  $k$  позволяет строить целое семейство карт размахов с различной шириной контрольной зоны.

Такое параметрическое задание границ через  $\text{E}[R]$  и  $\text{Var}[R]$  удобно тем, что опирается на инвариантные характеристики статистики  $R$  и не привязано к конкретному уровню  $\sigma$ : при изменении дисперсии процесса пересчёт вероятностей выхода за границы сводится к изменению нормирующего множителя в аргументах функции распределения нормированного размаха. Параметр  $k$  в этой схеме выступает основной настройкой, через которую далее будет formalизована связь между геометрией контрольной зоны и вероятностными показателями работы R-карты.

Введённый параметр  $k$  непосредственно определяет вероятность сигнала контрольной карты как при отсутствии сдвига по изменчивости, так и при его наличии. Пусть  $\text{LCL}(k)$ ,  $\text{UCL}(k)$  заданы формулами из предыдущего подраздела. Рассмотрим сначала состояние процесса «под контролем», когда  $\sigma = \sigma_0$  и  $\varepsilon = 1$ . В нормированных единицах вероятность выхода размаха за границы при одном наблюдении подгруппы равна

$$P_0(k) = 1 - [G_n(\text{UCL}(k)) - G_n(\text{LCL}(k))],$$

где  $G_n(z)$  – функция распределения нормированного размаха  $Z = R/\sigma_0$ . Тогда средняя длина серии в управляемом состоянии процесса выражается как

$$\text{ARL}_0(k) = \frac{1}{P_0(k)}.$$

Из этой зависимости следует, что  $\text{ARL}_0(k)$  является строго убывающей функцией параметра  $k$ : чем уже контрольная зона (меньше  $k$ ), тем выше вероятность ложного сигнала и тем меньше  $\text{ARL}_0$ ; и наоборот, увеличение  $k$  приводит к росту  $\text{ARL}_0$  и снижению частоты ложных тревог.

При наличии сдвига по изменчивости  $\sigma = \varepsilon\sigma_0$ ,  $\varepsilon > 1$ , распределение размаха растягивается, и нормированный размах  $Z = R/(\varepsilon\sigma_0)$  имеет ту же функцию распределения  $G_n(z)$ , но с изменённым масштабом. Вероятность срабатывания карты при заданных  $k$  и  $\varepsilon$  записывается в виде

$$P_1(k, \varepsilon) = 1 - \left[ G_n\left(\frac{\text{UCL}(k)}{\varepsilon}\right) - G_n\left(\frac{\text{LCL}(k)}{\varepsilon}\right) \right],$$

а соответствующая средняя длина серии при сдвиге

$$\text{ARL}_1(k, \varepsilon) = \frac{1}{P_1(k, \varepsilon)}.$$

При фиксированном  $\varepsilon > 1$  уменьшение  $k$  приводит к снижению  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ , то есть к более быстрому обнаружению изменения дисперсии, однако одновременно снижает и  $\text{ARL}_0(k)$ . Таким образом, параметр  $k$  определяет компромисс между устойчивостью к ложным срабатываниям в управляемом процессе и чувствительностью карты к заданному сдвигу  $\varepsilon$ .

Формально связь  $k \mapsto (\text{ARL}_0(k), \text{ARL}_1(k, \varepsilon))$  задаёт множество допустимых дизайнов R-карты. В последующих подразделах этот компромисс будет разрешён путём постановки задачи оптимизации: для заданного целевого уровня  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$  и интересующего сдвига  $\varepsilon$  подбирается такое значение  $k_{\text{opt}}$ , при котором выполняется ограничение  $\text{ARL}_0(k) \geq \text{ARL}_0^{\text{цел}}$  и одновременно минимизируется  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ .

### 2.3.5. Оптимационная постановка: минимизация $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ при ограничении на $\text{ARL}_0$

Связь параметра  $k$  с характеристиками  $\text{ARL}_0(k)$  и  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ , установленная в предыдущем подразделе, позволяет сформулировать задачу синтеза R-карты в явном оптимационном виде. Целью проектирования является выбор такого значения параметра  $k$ , при котором карта размахов обеспечивает, с одной стороны, требуемую устойчивость к ложным тревогам при отсутствии сдвига по изменчивости, а с другой – минимальную среднюю длину серии при технологически значимом увеличении дисперсии процесса.

В качестве показателя устойчивости принимается средняя длина серии  $\text{ARL}_0(k)$  в управляемом состоянии ( $\varepsilon = 1$ ). Для карты, пригодной к практическому применению, необходимо обеспечить не меньший уровень  $\text{ARL}_0$ , чем заданное целевое значение  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$ , отражающее допустимую частоту ложных срабатываний. Одновременно чувствительность к сдвигу по изменчивости характеризуется функцией  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ , вычисленной при фиксированном значении относительного увеличения стандартного отклонения  $\varepsilon > 1$ , которое считается технологически существенным.

Таким образом, задача выбора параметра  $k$  естественно формулируется как задача условной оптимизации: требуется минимизировать  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  при заданном  $\varepsilon$ , ограничивая область допустимых значений  $k$  условием  $\text{ARL}_0(k) \geq \text{ARL}_0^{\text{цел}}$ . Поскольку аналитическое выражение для  $\text{ARL}_0(k)$  и  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  задаётся через интегральную функцию  $G_n(\cdot)$ , решение этой задачи, как правило, выполняется численно по сетке значений  $k$ .

Введённая постановка позволяет интерпретировать оптимизированную карту размахов как частный случай карт Шухарта с переменной шириной контрольной зоны, специально

настроенный под заданную пару показателей: целевую устойчивость к ложным тревогам и минимально возможную задержку обнаружения сдвига дисперсии.

Выбор целевого значения  $ARL_0^{\text{цел}}$  определяется требованиями к частоте ложных тревог и режимом применения карты в конкретном технологическом процессе. В типичных задачах финишной механической обработки, где контрольные подгруппы формируются с высокой частотой, чрезмерно малые значения  $ARL_0$  приводят к значительным затратам на проверку «ложных» сигналов и необоснованные вмешательства в процесс. В то же время слишком большие  $ARL_0$  делают карту малоинформативной и снижают оперативность реагирования на реальные ухудшения стабильности.

Практика использования классических карт Шухарта показывает, что в качестве разумных ориентиров часто выбираются значения  $ARL_0^{\text{цел}}$  порядка 200–400, обеспечивающие приемлемый компромисс между нагрузкой на персонал и вероятностью пропуска существенных нарушений. В рамках настоящей работы  $ARL_0^{\text{цел}}$  задаётся исходя из аналогичных соображений, при этом целесообразно сопоставлять выбранное значение с величиной  $ARL_0$  для классической R-карты с границами  $d_2 \pm 3d_3$ , чтобы сохранять сопоставимый или несколько более высокий уровень устойчивости к ложным тревогам.

Не менее важным элементом постановки задачи является выбор значения или диапазона значений  $\varepsilon$ , относительно которых проводится оптимизация  $ARL_1(k, \varepsilon)$ . Этот выбор должен отражать те изменения дисперсии, которые являются технологически значимыми и экономически чувствительными для рассматриваемого процесса. Малые сдвиги  $\varepsilon \approx 1.1$  отражают начальные стадии ухудшения режима обработки, тогда как более крупные значения  $\varepsilon = 1.5 \div 2.0$  соответствуют явно недопустимому росту вариабельности и, как правило, связаны с резким увеличением доли брака.

В простейшем случае выбирается одно фиксированное значение  $\varepsilon^*$ , соответствующее пороговому уровню ухудшения стабильности, при котором особенно важно минимизировать среднюю длину серии. В более общем подходе можно рассматривать диапазон  $\varepsilon \in [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$  и оптимизировать агрегированный критерий, например максимальное или среднее значение  $ARL_1(k, \varepsilon)$  по этому диапазону. В настоящем подразделе основное внимание уделяется базовому варианту с фиксированным  $\varepsilon$ , что соответствует практической постановке «быстрое обнаружение заданного сдвига при контролируемой частоте ложных тревог».

Сформулируем строгое условие допустимости параметра  $k$  и определение оптимального значения  $k_{\text{opt}}$  в рамках заданной постановки. Пусть  $ARL_0(k)$ — средняя длина серии R-карты при отсутствии сдвига по изменчивости ( $\varepsilon = 1$ ), а  $ARL_1(k, \varepsilon)$ — средняя длина серии при

фиксированном сдвиге  $\varepsilon > 1$ . Целевое значение  $ARL_0^{\text{цел}}$  задаёт нижнюю границу для допустимых значений  $ARL_0(k)$ .

Тогда множество допустимых значений параметра  $k$  задаётся условием

$$\mathcal{K}_{\text{доп}} = \{k > 0 : ARL_0(k) \geq ARL_0^{\text{цел}}\}.$$

Это означает, что все карты, у которых  $ARL_0(k)$  ниже заданного уровня, считаются слишком «чувствительными» к случайным колебаниям управляемого процесса и исключаются из рассмотрения.

Внутри множества  $\mathcal{K}_{\text{доп}}$  выбирается такое значение  $k$ , которое минимизирует среднюю длину серии при заданном сдвиге  $\varepsilon$ . Формально оптимальное значение параметра определяется как

$$k_{\text{опт}}(\varepsilon) = \arg \min_{k \in \mathcal{K}_{\text{доп}}} ARL_1(k, \varepsilon).$$

В случае численной реализации задача решается на дискретной сетке значений  $k$ : для каждого узла  $k_j$  вычисляются  $ARL_0(k_j)$  и  $ARL_1(k_j, \varepsilon)$ ; узлы, для которых  $ARL_0(k_j) < ARL_0^{\text{цел}}$ , отбрасываются, а среди оставшихся выбирается  $k_j$ , обеспечивающий минимальное значение  $ARL_1(k_j, \varepsilon)$ .

Отметим, что при монотонном характере зависимости  $ARL_0(k)$  от  $k$  (возрастание  $ARL_0$  при увеличении ширины контрольной зоны) множество  $\mathcal{K}_{\text{доп}}$  представляет собой луч  $[k_{\text{мин}}, \infty)$ , где  $k_{\text{мин}}$  соответствует точке, в которой  $ARL_0(k_{\text{мин}}) = ARL_0^{\text{цел}}$ . Тогда оптимальное значение, как правило, либо совпадает с  $k_{\text{мин}}$ , либо расположено в его окрестности, поскольку дальнейшее увеличение  $k$  ухудшает чувствительность к сдвигу  $\varepsilon$  без дополнительной выгоды по  $ARL_0$ .

Таким образом, введённое условие допустимости по  $ARL_0(k)$  и определение  $k_{\text{опт}}$  формализуют процедуру перехода от общего семейства карт размахов с параметром  $k$  к единственному оптимизированному варианту, согласованному с требованиями устойчивости к ложным тревогам и целевой чувствительности к увеличению дисперсии процесса.

### 2.3.6. Алгоритм численного поиска оптимального коэффициента $k_{\text{опт}}$

Поскольку аналитическое выражение для функций  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon)$  опирается на интегральное представление функции распределения нормированного размаха  $G_n(z)$ , задача определения  $k_{\text{опт}}$  естественным образом решается численно. В основу алгоритма кладётся дискретизация области возможных значений параметра  $k$  и последовательный расчёт соответствующих величин  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon)$  с последующей фильтрацией по условию допустимости и выбором минимального значения  $ARL_1$ .

Алгоритм ориентирован на фиксированный объём подгруппы  $n$ , заданное целевое значение  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$  и выбранное значение (или несколько значений) относительного сдвига по изменчивости  $\varepsilon > 1$ . На первом шаге задаётся рабочий интервал изменения параметра  $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$  и шаг дискретизации  $\Delta k$ , обеспечивающий требуемую точность подбора. Далее для каждого узла  $k_j$  на этой сетке вычисляется  $\text{ARL}_0(k_j)$  через функцию  $G_n(z)$ . Значения  $k_j$ , для которых условие  $\text{ARL}_0(k_j) \geq \text{ARL}_0^{\text{цел}}$  не выполняется, исключаются из дальнейшего рассмотрения как недопустимые.

На втором шаге для оставшихся значений  $k_j$  вычисляется  $\text{ARL}_1(k_j, \varepsilon)$  при выбранном сдвиге  $\varepsilon$ . После этого среди допустимых  $k_j$  ищется узел, обеспечивающий минимальное значение  $\text{ARL}_1$ ; соответствующее значение параметра  $k_j$  и принимается за  $k_{\text{opt}}$ . В случае необходимости уточнения решения возможен переход к более мелкой сетке в окрестности найденного минимума.

Таким образом, алгоритм численного поиска опирается на явные формулы для вероятностей срабатывания карты через функцию  $G_n(z)$ , обеспечивает явную проверку ограничения по  $\text{ARL}_0$  и позволяет построить оптимизированную R-карту для заданных параметров  $n$ ,  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$  и  $\varepsilon$ .

В управляемом состоянии процесса, когда дисперсия равна исходной ( $\sigma = \sigma_0$ ,  $\varepsilon = 1$ ), нормированный размах имеет распределение с функцией распределения  $G_n(z)$ , определённой интегральным соотношением

$$G_n(z) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(t + z) - \Phi(t)]^{n-1} \varphi(t) dt.$$

Параметризованные через  $k$  контрольные границы для размаха в нормированных единицах принимают вид

$$\text{LCL}(k) = d_2 - kd_3, \quad \text{UCL}(k) = d_2 + kd_3,$$

где  $d_2$  и  $d_3$  зависят только от объёма подгруппы  $n$ . Вероятность сигнала (выхода размаха за контрольные границы) при одном наблюдении подгруппы в управляемом состоянии определяется выражением

$$P_0(k) = 1 - [G_n(\text{UCL}(k)) - G_n(\text{LCL}(k))].$$

Соответственно, средняя длина серии  $\text{ARL}_0(k)$  при отсутствии сдвига равна

$$\text{ARL}_0(k) = \frac{1}{P_0(k)}.$$

Численная реализация расчёта  $\text{ARL}_0(k)$  включает два ключевых шага: во-первых, вычисление значений функции  $G_n(z)$  в точках  $z = \text{LCL}(k)$  и  $z = \text{UCL}(k)$  с использованием

численного интегрирования или табличных данных; во-вторых, подстановку полученных значений в формулу для  $P_0(k)$  и последующий расчёт  $\text{ARL}_0(k)$ .

Так как  $\text{ARL}_0(k)$  является строго возрастающей функцией параметра  $k$ , полученная зависимость может быть использована как для проверки условия допустимости  $\text{ARL}_0(k) \geq \text{ARL}_0^{\text{цел}}$ , так и для предварительного выбора разумного диапазона значений  $k$ , на котором следует проводить дальнейшую оптимизацию по  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ . При наличии сдвига по изменчивости  $\sigma = \varepsilon\sigma_0$ ,  $\varepsilon > 1$ , статистика размаха  $R$  изменяет масштаб, но нормированный размах  $Z = R / (\varepsilon\sigma_0)$  сохраняет распределение с той же функцией  $G_n(z)$ . Это позволяет выразить вероятность сигнала при заданных  $k$  и  $\varepsilon$  через те же значения  $G_n$ , но с переопределёнными аргументами:

$$P_1(k, \varepsilon) = 1 - [G_n(\text{UCL}(k)/\varepsilon) - G_n(\text{LCL}(k)/\varepsilon)].$$

Средняя длина серии  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  при сдвиге  $\varepsilon$  равна

$$\text{ARL}_1(k, \varepsilon) = \frac{1}{P_1(k, \varepsilon)}.$$

Численно эта величина вычисляется по тем же принципам, что и  $\text{ARL}_0(k)$ : для каждого значения  $k$  из заданной сетки сначала определяются  $\text{LCL}(k)$  и  $\text{UCL}(k)$ , затем вычисляются  $G_n(\text{LCL}(k)/\varepsilon)$  и  $G_n(\text{UCL}(k)/\varepsilon)$ , после чего по формулам выше находятся  $P_1(k, \varepsilon)$  и  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$ .

Процедура выбора оптимального коэффициента  $k_{\text{opt}}$  реализуется следующим образом. На первом этапе для всех узлов сетки  $\{k_j\}$  вычисляются  $\text{ARL}_0(k_j)$ ; узлы, не удовлетворяющие условию  $\text{ARL}_0(k_j) \geq \text{ARL}_0^{\text{цел}}$ , исключаются из рассмотрения. На втором этапе для оставшегося множества допустимых значений  $\{k_j\} \subset \mathcal{K}_{\text{доп}}$  вычисляются  $\text{ARL}_1(k_j, \varepsilon)$ , после чего определяется узел

$$k_{\text{opt}} = \arg \min_{k_j \in \mathcal{K}_{\text{доп}}} \text{ARL}_1(k_j, \varepsilon).$$

При необходимости уточнения решения диапазон вокруг найденного значения  $k_{\text{opt}}$  может быть дополнительно дискретизирован более мелким шагом по  $k$ , что позволяет повысить точность оценки минимального значения  $\text{ARL}_1$ .

Таким образом, численный расчёт  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  на основе функции  $G_n(z)$  и последующий выбор  $k_{\text{opt}}$  завершают процедуру оптимизации R-карты, обеспечивая согласованное выполнение ограничения по  $\text{ARL}_0$  и минимизацию средней длины серии при заданном сдвиге по изменчивости процесса.

На заключительном этапе численного анализа для выбранного объёма подгруппы  $n = 9$  была построена инженерная таблица, связывающая целевые значения  $\text{ARL}_0$ , оптимальные значения параметра  $k_{\text{opt}}$  и соответствующие им средние длины серии  $\text{ARL}_1(\varepsilon)$  при различных сдвигах по изменчивости  $\varepsilon$ . В основу её построения положена мастер-таблица  $\text{ARL}_0(k)$ ,

$ARL_1(k, \varepsilon)$ , полученная по результатам моделирования работы R-карты на плотной сетке значений  $k$  и  $\varepsilon$ . Для каждого значения  $k$  в этой мастер-таблице вычислялась средняя длина серии в управляемом состоянии  $ARL_0(k)$  и при ряде относительных сдвигов дисперсии  $\varepsilon \in \{1,20; 1,30; \dots; 2,00\}$ .

Исходя из заданного набора целевых значений  $ARL_0^{\text{цел}}$  (в рассматриваемом примере  $ARL_0^{\text{цел}} = 100, 200, \dots, 1000$ ) для каждого уровня  $ARL_0^{\text{цел}}$  выбиралось минимальное значение параметра  $k$ , удовлетворяющее условию допустимости  $ARL_0(k) \geq ARL_0^{\text{цел}}$ . Полученный таким образом параметр обозначался как  $k_{\text{опт}}(ARL_0^{\text{цел}})$  и использовался для задания контрольных границ R-карты

$$LCL = d_2 - k_{\text{опт}} d_3, UCL = d_2 + k_{\text{опт}} d_3,$$

обеспечивающих требуемую устойчивость к ложным срабатываниям в состоянии статистического контроля. Для каждого такого оптимизированного дизайна карты затем по мастер-таблице считывались значения  $ARL_1(k_{\text{опт}}, \varepsilon)$  для набора сдвигов  $\varepsilon$ , что позволяло сформировать компактную сводную таблицу  $ARL_1$  при оптимальных  $k_{\text{опт}}$ .

Таблица 3 – Значения  $ARL_1$  при оптимальных  $k_{\text{опт}}$  для различных значений  $ARL_0^{\text{цел}}$  и  $\varepsilon$

$ARL_0^{\text{цел}}$	$k_{\text{опт}}$	$\varepsilon$								
		1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
100	2.63	14.91	8.05	5.05	3.53	2.69	2.17	1.84	1.62	1.4
200	2.94	23.12	11.48	6.76	4.50	3.28	2.56	2.11	1.82	1.6
300	3.12	30.18	14.28	8.09	5.22	3.71	2.84	2.30	1.95	1.7
400	3.25	36.80	16.84	9.26	5.84	4.08	3.07	2.46	2.06	1.7
500	3.34	42.36	18.90	10.20	6.32	4.36	3.25	2.58	2.14	1.8
600	3.42	48.05	21.02	11.12	6.80	4.63	3.42	2.69	2.22	1.9
700	3.49	53.54	23.08	12.02	7.26	4.89	3.58	2.80	2.29	1.9
800	3.54	57.98	24.72	12.70	7.60	5.09	3.70	2.88	2.35	2.0
900	3.6	64.03	26.79	13.59	8.05	5.34	3.85	2.97	2.42	2.0
1000	3.64	68.54	28.33	14.23	8.36	5.50	3.96	3.04	2.47	2.0

Структурно итоговая таблица содержит в первом столбце целевые значения  $ARL_0^{\text{цел}}$ , во втором – соответствующие им оптимальные значения коэффициента  $k_{\text{опт}}$ . В последующих столбцах приведены значения  $ARL_1$  для тех же настроек R-карты при различных относительных сдвигах дисперсии  $\varepsilon$ , например  $\varepsilon = 1,20; 1,30; 1,40; 1,50; 1,60; 1,70; 1,80; 1,90; 2,00$ . В столбцах содержатся значения  $ARL_1$  для значения  $\varepsilon$  из совокупности  $1,20; 1,30; 1,40; 1,50; 1,60; 1,70; 1,80; 1,90; 2,00$ . Каждая строка таблицы, таким образом, содержит значения R-карты при фиксированном  $ARL_0^{\text{цел}}$  и  $k_{\text{опт}}$  и даёт оценку средней длины серии  $ARL_1(\varepsilon)$  для набора технологически значимых сдвигов по изменчивости.

Характерной особенностью полученных результатов является то, что оптимальное значение параметра  $k_{\text{opt}}$  зависит только от выбранного целевого уровня  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$  и не зависит от конкретного значения  $\varepsilon$  внутри рассматриваемого диапазона. Это согласуется с тем, что  $\text{ARL}_0(k)$  и  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  являются монотонно возрастающими функциями по  $k$ : увеличение ширины контрольной зоны приводит одновременно к росту средней длины серии в управляемом состоянии и к ухудшению чувствительности карты к любому фиксированному сдвигу  $\varepsilon > 1$ . В результате среди всех R-карт, удовлетворяющих ограничению  $\text{ARL}_0(k) \geq \text{ARL}_0^{\text{цел}}$ , минимум  $\text{ARL}_1(k, \varepsilon)$  достигается на границе множества допустимых значений  $k$ , то есть при минимальном  $k$ , обеспечивающем заданный уровень устойчивости.

Практическое использование таблицы иллюстрируется на примере. Пусть для конкретной операции шлифования требуется настроить R-карту так, чтобы средняя длина серии в управляемом состоянии составляла порядка  $\text{ARL}_0^{\text{цел}} = 400$ . В строке таблицы, соответствующей этому значению, указано оптимальное значение  $k_{\text{opt}} \approx 3,25$ . Это означает, что границы контролируемой карты размахов при  $n = 9$  следует задать как  $LCL = d_2 - 3,25d_3$ ,  $UCL = d_2 + 3,25d_3$ , что даёт  $\text{ARL}_0 \approx 400$  подгрупп до ложного сигнала. В той же строке можно непосредственно оценить чувствительность карты к различным уровням увеличения дисперсии: при умеренном сдвиге  $\varepsilon = 1,5$  средняя длина серии составляет порядка  $\text{ARL}_1 \approx 5,8$ , при более крупном сдвиге  $\varepsilon = 2,0$  – около  $\text{ARL}_1 \approx 1,8$ , тогда как для слабого сдвига  $\varepsilon = 1,2$  ожидаемая длина серии достигает  $\text{ARL}_1 \approx 37$  подгрупп.

Тем самым табличные значения  $\text{ARL}_1$  для оптимальных  $k_{\text{opt}}$  служат удобным инструментом для инженерного выбора параметров R-карты: по заданному целевому уровню  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$  таблица сразу задаёт оптимальную ширину контрольной зоны, а по значениям  $\text{ARL}_1(\varepsilon)$  для различных  $\varepsilon$  можно заранее оценить ожидаемую скорость обнаружения изменений в изменчивости процесса и сопоставить её с требованиями к оперативности контроля и допустимым рискам пропуска сдвигов.

### 2.3.7. Сравнение оптимизированной R-карты с классической R-картой

Схема оптимизации R-карты по критерию минимизации средней длины серии при заданном уровне  $\text{ARL}_0^{\text{цел}}$  приводит к семейству карт, отличающихся от классической R-карты Шухарта с границами  $d_2 \pm 3d_3$ . С одной стороны, классическая карта задаёт ширину контрольной зоны через фиксированный коэффициент «3» и потому не позволяет гибко управлять компромиссом между частотой ложных тревог и скоростью обнаружения сдвига дисперсии. С другой стороны, оптимизированная карта использует параметр  $k$  как переменную настройки, выбирая его минимально возможным при условии  $\text{ARL}_0(k) \geq \text{ARL}_0^{\text{цел}}$ , что гарантирует

заданную устойчивость к ложным срабатываниям и одновременно наилучшую из возможных чувствительность к выбранным сдвигам  $\varepsilon$ .

Сравнение классической и оптимизированной R-карты целесообразно проводить в двух аспектах. Во-первых, при одинаковом целевом уровне  $ARL_0$  анализируется изменение ширины контрольной зоны, то есть соотношение между границами  $LCL$  и  $UCL$  в классической и оптимизированной настройках. Во-вторых, оценивается выигрыш по средней длине серии  $ARL_1(\varepsilon)$  при обнаружении сдвигов дисперсии в технологически значимом диапазоне  $\varepsilon > 1$ . В обоих случаях используются численные результаты, представленные в мастер-таблице  $ARL_0(k), ARL_1(k, \varepsilon)$  и в сводной таблице оптимальных настроек  $k_{opt}(ARL_0^{цел})$  с соответствующими значениями  $ARL_1(\varepsilon)$ .

В классической схеме R-карты границы контрольной зоны фиксируются по формуле

$$LCL_{cl} = d_2 - 3d_3, UCL_{cl} = d_2 + 3d_3,$$

то есть параметр ширины зоны жёстко закреплён как  $k_{cl} = 3$ , независимо от объёма подгруппы, требований к частоте ложных тревог и характеристик конкретного процесса. Фактическое значение  $ARL_0$  при таких границах оказывается функцией только объёма подгруппы  $n$ , вообще говоря, не совпадает ни с широко используемым ориентиром  $ARL_0 \approx 370$ , ни с теми целевыми значениями  $ARL_0^{цел}$ , которые инженер может задать исходя из производственных требований.

В оптимизированном подходе, напротив, исходной точкой служит именно целевое значение  $ARL_0^{цел}$ . По мастер-таблице  $ARL_0(k)$  для заданного объёма подгруппы выбирается минимальное значение параметра  $k$ , при котором выполняется ограничение  $ARL_0(k) \geq ARL_0^{цел}$ . Это значение обозначается как  $k_{opt}(ARL_0^{цел})$  и используется для задания границ

$$LCL_{opt} = d_2 - k_{opt}d_3, UCL_{opt} = d_2 + k_{opt}d_3.$$

При таком выборе границ R-карта строго удовлетворяет требуемому уровню устойчивости к ложным тревогам, а ширина контрольной зоны оказывается минимально возможной среди всех карт, обеспечивающих тот же уровень  $ARL_0$ .

Сравнение значений  $k_{opt}$ , полученных из численного анализа, с классическим значением  $k_{cl} = 3$  показывает, что для большинства практически интересных уровней  $ARL_0^{цел}$  оптимизированная карта выступает более «плотной» по границам. Например, при  $ARL_0^{цел} = 400$  оптимальный параметр ширины зоны для  $n = 9$  составляет  $k_{opt} \approx 3,25$ , что даёт строго контролируемый уровень ложных тревог, тогда как классический выбор  $k_{cl} = 3$  приводил бы к существенно меньшему  $ARL_0$  и, следовательно, к более частым сигналам без учёта оптимизации по  $ARL_1$ . В тех случаях, когда целевое  $ARL_0^{цел}$  близко к фактическому  $ARL_0$  классической карты, значения  $k_{opt}$  оказываются близки к 3, однако за счёт привязки к конкретному  $ARL_0^{цел}$

оптимизированная карта обеспечивает более точное выдерживание заданной частоты ложных тревог.

Таким образом, при одинаковом уровне  $ARL_0$  оптимизированная R-карта либо совпадает с классической по ширине зоны (если классические границы случайно обеспечивают требуемый  $ARL_0^{\text{цел}}$ ), либо имеет минимально возможную ширину, совместимую с заданной устойчивостью. В последнем случае классическая настройка « $3\sigma$ » либо даёт более частые ложные тревоги (при меньшем фактическом  $ARL_0$ ), либо, при искусственном расширении зоны для достижения большего  $ARL_0$ , оказывается избыточно широкой по сравнению с оптимальной.

Главный эффект перехода от классической R-карты к оптимизированной проявляется в характеристиках обнаружения сдвига дисперсии, то есть в поведении  $ARL_1(\varepsilon)$  при  $\varepsilon > 1$ . Для каждого выбранного уровня  $ARL_0^{\text{цел}}$  таблица оптимальных настроек  $k_{\text{opt}}(ARL_0^{\text{цел}})$  даёт значения  $ARL_1$  при различных относительных сдвигах  $\varepsilon$ . Сопоставление этих значений с характеристиками классической R-карты показывает, что оптимизированные настройки обеспечивают систематическое уменьшение средней длины серии для умеренных и крупных сдвигов дисперсии при сохранении того же уровня устойчивости к ложным тревогам.

Наибольший выигрыш находится в диапазоне умеренных сдвигов  $\varepsilon \approx 1,3 \div 1,6$ , которые соответствуют начальным стадиям ухудшения стабильности процесса. В этом диапазоне оптимизированная R-карта за счёт минимизации  $k$  при фиксированном  $ARL_0^{\text{цел}}$  даёт заметно меньшие значения  $ARL_1(\varepsilon)$ , то есть сокращает среднее число подгрупп до сигнала. Для крупных сдвигов  $\varepsilon \geq 1,8$  обе версии карты быстро «насыщаются» и дают очень малые значения  $ARL_1$ , близкие к единице; здесь выигрыш по  $ARL_1$  относительно классической настройки становится менее существенным, но сохраняется с точки зрения гарантированной минимальности задержки обнаружения при заданном  $ARL_0^{\text{цел}}$ .

Практическая интерпретация полученных результатов может быть показана на примере. Пусть для операции с высокими требованиями к стабильности задано  $ARL_0^{\text{цел}} = 400$ . При оптимизированной настройке  $k_{\text{opt}} \approx 3,25$  средняя длина серии при сдвиге  $\varepsilon = 1,5$  составляет порядка пяти–шести подгрупп, тогда как классическая карта, настроенная на сопоставимый уровень устойчивости, демонстрирует более длинные серии до сигнала. Для малых сдвигов  $\varepsilon \approx 1,2$  оптимизированная карта также имеет меньшие  $ARL_1$ , что повышает вероятность раннего обнаружения постепенного роста вариабельности. При этом уровень ложных срабатываний при отсутствии сдвига остаётся строго контролируемым за счёт привязки к  $ARL_0^{\text{цел}}$ .

В совокупности рассмотренные результаты показывают, что оптимизация параметра  $k$  по критерию минимизации  $ARL_1(k, \varepsilon)$  при заданном  $ARL_0^{\text{цел}}$  позволяет получать R-карты, которые при том же уровне устойчивости к ложным тревогам обеспечивают более быструю реакцию на

изменения дисперсии процесса, особенно в области умеренных сдвигов. Это делает предложенный подход к проектированию R-карты более предпочтительным по сравнению с классической «трёхсигмовой» настройкой в задачах контроля высокоточных операций механической обработки.

Разработка оптимизированной R-карты для контроля изменчивости естественным образом дополняет ранее рассмотренную оптимизированную карту среднего  $\bar{X}$ . В практике статистического управления качеством наибольший эффект достигается не использованием отдельных карт в изоляции, а их согласованным комбинированным применением для одновременного мониторинга уровня и дисперсии процесса. В этом случае  $\bar{X}$ -карта играет роль инструмента слежения за смещением среднего значения относительно целевого уровня, тогда как R-карта (или S-карта при большом объёме подгруппы) отвечает за раннее обнаружение роста разброса наблюдений.

Построение обеих карт на основе единого подхода к оптимизации по критериям  $ARL_0$  и  $ARL_1$  обеспечивает их согласованность по частоте ложных тревог и скорости реагирования на технологически значимые сдвиги. Для каждой карты задаётся целевой уровень  $ARL_0^{\text{цел}}$ , соответствующий допустимой нагрузке на персонал и системе корректирующих действий, и выбираются оптимальные параметры (ширина контрольной зоны, коэффициенты преобразования), минимизирующие среднюю длину серии при заданных сдвигах по уровню и изменчивости. В результате комбинированный контроль реализуется через пару взаимодополняющих сигналов: отклонение по уровню фиксируется преимущественно  $\bar{X}$ -картой, а ухудшение стабильности – картой размахов (или картой стандартного отклонения).

Для целей практического внедрения принципиально важно, что оба типа карт могут настраиваться с использованием заранее подготовленных мастер-таблиц, содержащих значения  $ARL_0$  и  $ARL_1$  для различных параметров настройки. Это позволяет инженеру проводить подбор дизайна без обращения к специальному программному обеспечению, базируясь на одинаковой методологической основе для контроля уровня и изменчивости.

В точных операциях механической обработки, прежде всего в финишном шлифовании высоконагруженных деталей, требования к стабильности и воспроизводимости геометрических параметров особенно жёсткие. Нарушения как по уровню, так и по изменчивости проявляются в виде выхода размеров за поля допуска, ухудшения формы и шероховатости поверхности, роста доли скрытого брака. В таких условиях совместное применение оптимизированных X- и R-карт (или S-карт) позволяет согласованно контролировать ключевые аспекты поведения процесса.

Для шлифовальных операций характерны сравнительно малые объёмы подгрупп, периодическая переналадка, значительная роль медленно меняющихся внешних факторов (температурный режим, состояние инструмента, загрязнение СОЖ). При этом статистика

размахов для малых побладает достаточно высокой чувствительностью к локальным всплескам изменчивости, связанным, например, с ускоренным износом круга или нарушением режимов подачи, тогда как  $\bar{X}$ -карта надёжнее фиксирует стойкие смещения среднего размера в результате систематической переналадки или дрейфа базирования.

Оптимизация параметров обеих карт по единому целевому  $ARL_0^{\text{цел}}$  обеспечивает сопоставимую частоту сигналов в управляемом состоянии, что важно для интерпретации комбинированных событий: одновременный сигнал по  $\bar{X}$ - и R-карте имеет иной приоритет, чем одиночный сигнал только по одной из них. При этом настройки карт могут быть увязаны с производственным тактом: средняя длина серии переводится в ожидаемое число деталей до сигнала, что позволяет соотнести реакцию системы СПК с текущей серийностью и допусками на брак.

Особое значение в точных операциях имеет возможность целенаправленного выбора сдвигов  $\delta$  и  $\varepsilon$ , относительно которых оптимизируются  $ARL_1$ . В шлифовании это могут быть, например, сдвиг среднего на величину порядка 0,5–1,0 стандартного отклонения и рост дисперсии на 30–50 % по сравнению с номинальным уровнем. В этом случае оптимизированные X- и R-карты обеспечивают гарантированно малую задержку обнаружения именно тех изменений, которые критичны с точки зрения выхода за поле допуска при сохранении разумной устойчивости к случайнм колебаниям процесса.

Внедрение комбинированного контроля на основе оптимизированных X- и R-карт в промышленную практику целесообразно осуществлять поэтапно, с учётом текущего уровня зрелости системы управления качеством и наличия инфраструктуры сбора данных. На первом этапе рекомендуется выполнить пилотное проектирование карт для ограниченного числа критических характеристик, используя разработанные мастер-таблицы  $ARL_0(k)$ ,  $ARL_1(k, \varepsilon)$  и табличные значения оптимальных параметров  $k_{\text{opt}}$ . На этом этапе подбираются целевые  $ARL_0^{\text{цел}}$  и технологически значимые сдвиги, проводится оценка ожидаемой динамики сигналов в терминах числа деталей или партий до обнаружения отклонений.

На втором этапе осуществляется интеграция карт в действующие регламенты контроля: формализуются правила реагирования на одиночные и комбинированные сигналы X- и R-карт, задаются интервалы анализа и критерии «успокоения» процесса после корректирующих действий. Важно, чтобы оптимизация карт была не абстрактной, а связанной с конкретными показателями результативности – снижением доли брака, сокращением объёма переналадок, улучшением показателей воспроизводимости и способности процесса.

Таким образом, разработан и исследован подход к построению контрольной карты размахов для слежения за изменчивостью процесса с минимальной средней длиной серии при

заданном уровне устойчивости к ложным тревогам. На основе нормальной модели процесса и распределения размаха выборки получено представление о функции распределения нормированного размаха и её использовании для вычисления вероятностей выхода статистики за контрольные границы. Параметризация границ R-карты через математическое ожидание и дисперсию размаха с введением регулируемого параметра  $k$  позволила перейти от классической «трёхсигмовой» схемы к семейству карт с переменной шириной контрольной зоны.

Сформулирована оптимизационная постановка задачи проектирования R-карты, в которой параметр  $k$  выбирается из условия минимизации  $ARL_1(k, \varepsilon)$  при заданном технологически значимом сдвиге дисперсии и ограничении  $ARL_0(k) \geq ARL_0^{\text{цел}}$ . Численный алгоритм поиска оптимального коэффициента реализован на основе предварительного расчёта  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon)$  по плотной сетке значений  $k$  и  $\varepsilon$  с использованием моделирования размахов при стандартной нормали. На этой базе построены мастер-таблицы  $ARL_0(k)$ ,  $ARL_1(k, \varepsilon)$  и сводные таблицы оптимальных параметров  $k_{\text{опт}}(ARL_0^{\text{цел}})$  с соответствующими значениями  $ARL_1(\varepsilon)$ , пригодные для прямого использования инженером без повторных вычислений.

Проведено сравнение оптимизированной R-карты с классической картой Шухарта. Показано, что при одинаковом уровне  $ARL_0$  оптимизированная карта обеспечивает минимально возможную ширину контрольной зоны, совместимую с заданной устойчивостью, и систематически меньшие значения  $ARL_1(\varepsilon)$  в области умеренных и крупных сдвигов дисперсии. Это обеспечивает выигрыш по скорости обнаружения роста вариабельности без увеличения частоты ложных сигналов в управляемом состоянии.

Обсуждено комбинированное применение оптимизированных X- и R-карт (S-карт) в задачах точной механической обработки и даны рекомендации по их внедрению в промышленную практику. Показано, что использование единой методологической базы для проектирования карт уровня и изменчивости, основанной на критериях  $ARL_0$  и  $ARL_1$ , позволяет реализовать согласованный и экономически обоснованный контроль критических характеристик процесса. Разработанные модели, алгоритмы и табличные материалы формируют законченный инструментальный набор для проектирования и применения R-карт с минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге дисперсии в реальных производственных условиях.

## **2.4 Построение контрольной карты средних на основе винзорированного среднего**

### **2.4.1. Постановка задачи и основные определения**

Рассмотрим выборку объёма  $n$ , упорядоченную по возрастанию:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

Процедура винзоризации заключается в том, что фиксированное число крайних наблюдений заменяется ближайшими «внутренними» порядковыми статистиками, то есть экстремальные значения не отбрасываются полностью, а «подтягиваются» к центру распределения [56, 99, 109, 135]. Пусть из каждой стороны заменяется по  $h$  наблюдений, где  $h$  – целое число,  $0 \leq h < n/2$ . Введём долю отсечения

$$\gamma = \frac{h}{n}.$$

Винзорированная выборка  $W_1, \dots, W_n$  определяется покомпонентно по правилу

$$W_i = \begin{cases} X_{(h+1)}, & i \leq h, \\ X_{(i)}, & h + 1 \leq i \leq n - h, \\ X_{(n-h)}, & i \geq n - h + 1. \end{cases}$$

Таким образом, все наблюдения ниже  $X_{(h+1)}$  заменяются на  $X_{(h+1)}$ , а все наблюдения выше  $X_{(n-h)}$  заменяются на  $X_{(n-h)}$ . Внутренняя часть выборки  $\{X_{(h+1)}, \dots, X_{(n-h)}\}$  остаётся неизменной. Такая трансформация существенно ограничивает влияние крайних значений на итоговую сводную статистику, при этом объём выборки формально сохраняется равным  $n$ .

Винзорированное среднее определяется как обычное среднее винзорированных значений:

$$\bar{W}_{h,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i.$$

Далее, опуская индекс  $h$ , для краткости, будем обозначать эту статистику через  $\bar{W}$  и использовать её в качестве центральной статистики при построении контрольной карты.

Предположим, что контролируемая характеристика качества при нахождении процесса под статистическим контролем имеет нормальное распределение

$$X \sim N(\mu_0, \sigma^2),$$

где  $\mu_0$  – номинальный уровень процесса,  $\sigma^2$  – дисперсия при исправном процессе. В этом случае винзорированное среднее обладает рядом полезных свойств.

Во-первых, при симметричном распределении и симметричной винзоризации (одинаковое число отсечённых наблюдений слева и справа) математическое ожидание винзорированного среднего совпадает с исходным средним:

$$\mathbb{E}[\bar{W}] = \mu_0.$$

Это означает, что в условиях нормальности винзорированное среднее не вносит систематического смещения в оценку уровня процесса и может напрямую использоваться в качестве центральной статистики карты без перекалибровки по центру.

Во-вторых, дисперсия винзорированного среднего при нормальном распределении выражается через параметры  $\sigma$ ,  $n$  и долю отсечения  $\gamma = h/n$ . Обозначим через  $\Phi(\cdot)$  функцию распределения стандартного нормального закона, через  $\varphi(\cdot)$  – его плотность, а через

$$z_\gamma = \Phi^{-1}(1 - \gamma)$$

– квантиль уровня  $1 - \gamma$ . Тогда дисперсия винзорированного среднего имеет вид

$$\text{Var}(\bar{W}) = \frac{\sigma^2}{n} (1 - 2\gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma) + 2\gamma^2 z_\gamma^2).$$

При отсутствии винзоризации ( $\gamma = 0$ , то есть  $h = 0$ ) формула вырождается в классическое выражение  $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$  для обычного выборочного среднего, что обеспечивает корректный переход к стандартной  $\bar{X}$ -карте. При  $\gamma > 0$  множитель в квадратных скобках отражает уменьшение эффективной дисперсии за счёт подавления влияния крайних значений.

В-третьих, винзорированное среднее обладает повышенной устойчивостью к выбросам по сравнению с обычным средним. Влияние единичных экстремальных наблюдений на  $\bar{W}$  ограничено «потолком» на уровне  $X_{(h+1)}$  и  $X_{(n-h)}$ , что приводит к снижению разброса оценок уровня процесса в присутствии загрязнений распределения. При этом за счёт того, что сохраняется весь объём выборки  $n$ , чувствительность к небольшим систематическим сдвигам уровня остаётся достаточно высокой, особенно при умеренных значениях  $\gamma$ .

Таким образом, в условиях нормальности винзорированное среднее сохраняет несмещённость и управляемую дисперсию, а в условиях «грязной нормали» демонстрирует более благоприятный компромисс между устойчивостью и чувствительностью по сравнению с обычным выборочным средним.

Для построения контрольной карты на основе винзорированного среднего необходимо задать масштабный параметр  $\sigma_W$ , характеризующий разброс статистики  $\bar{W}$  при исправном процессе. Используя полученное выше выражение для дисперсии, введём обозначение

$$\sigma_W = \sqrt{\text{Var}(\bar{W})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - 2\gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma) + 2\gamma^2 z_\gamma^2}.$$

При  $\gamma = 0$  имеем  $\sigma_W = \sigma/\sqrt{n}$ , и карта на основе  $\bar{W}$  полностью совпадает с классической  $\bar{X}$ -картой. При  $\gamma > 0$  множитель в корне корректирует эффективный стандарт ошибки среднего с учётом винзоризации.

Контрольные границы карты винзорированного среднего задаются в виде

$$\text{LCL} = \mu_0 - k\sigma_W, \text{UCL} = \mu_0 + k\sigma_W,$$

где  $k > 0$  – параметр ширины контрольных границ, определяющий частоту ложных тревог и среднюю длину серии при отсутствии сдвига процесса.

Таким образом, переход от классической  $\bar{X}$ -карты к винзоризованной карте состоит в замене стандартной ошибки  $\sigma/\sqrt{n}$  на  $\sigma_W$ , вычисляемую с учётом параметра винзоризации  $\gamma$ , при сохранении привычной структуры контрольных границ  $\mu_0 \pm k$ . Это позволяет использовать те же правила интерпретации и те же целевые значения  $ARL_0$ , варьируя лишь выбор параметров  $\gamma$ .

и  $k$  для достижения требуемого компромисса между устойчивостью к выбросам и скоростью обнаружения сдвигов уровня процесса.

#### 2.4.2. Вероятностный анализ выхода за контрольные границы

Рассматривается классическая модель сдвига уровня процесса в единицах исходного сигма-отклонения. Пусть в состоянии статистического контроля контролируемая величина распределена нормально

$$X \sim N(\mu_0, \sigma^2),$$

где  $\mu_0$  – номинальный уровень процесса,  $\sigma$  – стандартное отклонение при исправном процессе.

Сдвиг уровня процесса задаётся в относительной форме через безразмерный параметр  $\delta$ , измеряемый в единицах  $\sigma$ :

$$\mu = \mu_0 + \delta \cdot \sigma.$$

При  $\delta = 0$  процесс находится под контролем; значения  $\delta > 0$  соответствуют смещению уровня вверх,  $\delta < 0$  – смещению вниз. В дальнейшем интерес представляют модули  $|\delta|$ , так как карта симметрична относительно номинального уровня.

Винзорированное среднее  $\bar{W}$  при заданных параметрах винзоризации  $pi \gamma = h/n$  имеет дисперсию

$$\text{Var}(\bar{W}) = \frac{\sigma^2}{n} (1 - 2\gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma) + 2\gamma^2 z_\gamma^2),$$

где  $z_\gamma = \Phi^{-1}(1 - \gamma)$ ,  $\Phi(\cdot)$  и  $\varphi(\cdot)$  – функция распределения и плотность стандартного нормального закона.

Введём эффективное стандартное отклонение винзорированного среднего

$$\sigma_w = \sqrt{\text{Var}(\bar{W})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - 2\gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma) + 2\gamma^2 z_\gamma^2}.$$

Тогда сдвиг уровня в единицах стандартного отклонения статистики  $\bar{W}$  можно выразить через безразмерный параметр

$$\delta' = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_w} = \frac{\delta \cdot \sigma}{\sigma_w} = \delta \sqrt{\frac{n}{1 - 2\gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma) + 2\gamma^2 z_\gamma^2}}.$$

Именно величина  $\delta'$  определяет сдвиг среднего винзорированного значения в пространстве стандартной нормальной шкалы и, следовательно, напрямую влияет на вероятность выхода за контрольные границы и на среднюю длину серии.

Рассмотрим последовательность независимых подгрупп объёма  $n$ , для каждой из которых вычисляется винзорированное среднее  $\bar{W}$ . При нахождении процесса под контролем ( $\delta = 0$ ) справедливо

$$\mathbb{E}[\bar{W}] = \mu_0, \text{Var}(\bar{W}) = \sigma_W^2,$$

и, в силу нормальности исходных данных и линейности операции усреднения, статистика  $\bar{W}$  имеет нормальное распределение

$$\bar{W} \sim N(\mu_0, \sigma_W^2).$$

После сдвига уровня процесса на  $\delta\sigma$  распределение винзорированного среднего сохраняет нормальный вид, но с изменённым математическим ожиданием:

$$\bar{W} \sim N(\mu_0 + \delta\sigma, \sigma_W^2).$$

Для удобства анализа введём стандартизованную статистику

$$Z = \frac{\bar{W} - \mu_0}{\sigma_W}.$$

Тогда при исправном процессе ( $\delta = 0$ )

$$Z \sim N(0,1),$$

а после сдвига уровня на  $\delta\sigma$

$$Z \sim N(\delta', 1),$$

где  $\delta'$  – приведённый сдвиг, определённый в предыдущем пункте.

Контрольные границы винзоризованной карты задаются классическим образом:

$$\text{LCL} = \mu_0 - k\sigma_W, \text{UCL} = \mu_0 + k\sigma_W,$$

что в терминах стандартизованной статистики эквивалентно правилу сигнала

$$\text{сигнал} \Leftrightarrow Z < -k \text{ или } Z > k.$$

Пусть  $\Phi(\cdot)$  – функция распределения стандартного нормального закона. Тогда при заданных параметрах  $k$  и  $\delta'$  вероятность выхода за границы для одной подгруппы равна

$$P_{\text{out}}(k, \delta) = \mathbb{P}(|Z| > k) = \mathbb{P}(Z > k) + \mathbb{P}(Z < -k) = [1 - \Phi(k - \delta')] + \Phi(-k - \delta').$$

Эквивалентно это можно записать в виде

$$P_{\text{out}}(k, \delta) = 1 - [\Phi(k - \delta') - \Phi(-k - \delta')].$$

При  $\delta = 0$  имеем  $\delta' = 0$  и, соответственно,

$$P_{\text{out}}(k, 0) = 2[1 - \Phi(k)],$$

что совпадает с классическим выражением для частоты сигналов двусторонней  $\bar{X}$ -карты с параметром  $k$ . При  $\delta \neq 0$  параметр  $\delta'$  сдвигает распределение  $Z$ , увеличивая вероятность выхода за границы и тем самым снижая ожидаемую длину серии до сигнала.

Для однократной независимой проверки каждой подгруппы по правилу «выход за границы  $\pm k\sigma_W$ » события сигналов в последовательных подгруппах образуют бернуlliевскую

схему с вероятностью успеха  $P_{\text{out}}(k, \delta)$ . Число подгрупп до первого сигнала имеет геометрическое распределение, а его математическое ожидание определяет среднюю длину серии:

$$\text{ARL}(k, \delta) = \frac{1}{P_{\text{out}}(k, \delta)}.$$

При отсутствии сдвига ( $\delta = 0$ )

$$\text{ARL}_0(k) = \text{ARL}(k, 0) = \frac{1}{P_{\text{out}}(k, 0)} = \frac{1}{2[1 - \Phi(k)]},$$

что определяется только параметром  $k$  и не зависит от винзоризации, поскольку в нормальном случае  $\bar{W}$  и  $\bar{X}$  имеют одинаковое распределение в стандартизованной форме. Таким образом, выбор  $k$  по целевому значению  $\text{ARL}_0^{\text{target}}$  (например, 370 или 500) обеспечивает заданную частоту ложных тревог.

После сдвига уровня процесса на  $\delta\sigma$  средняя длина серии становится функцией как  $k$ , так и параметров винзоризации через  $\delta'$ :

$$\text{ARL}(k, \delta) = \frac{1}{P_{\text{out}}(k, \delta)} = \frac{1}{1 - [\Phi(k - \delta') - \Phi(-k - \delta')]}$$

Здесь  $\delta'$  зависит от  $\delta$ , числа наблюдений в подгруппе  $n$  и доли отсечения  $\gamma$ :

$$\delta' = \delta \sqrt{\frac{n}{1 - 2\gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma) + 2\gamma^2 z_\gamma^2}}.$$

Таким образом, винзоризация влияет на форму функции  $\text{ARL}(k, \delta)$  по двум каналам. С одной стороны, при  $\delta = 0$  сохраняется заданный уровень  $\text{ARL}_0$  за счёт соответствующего выбора  $k$ , обеспечивающего нужную вероятность ложного сигнала. С другой стороны, при  $\delta \neq 0$  изменяется приведённый сдвиг  $\delta'$ , что может либо ускорять, либо замедлять обнаружение смещения уровня по сравнению с классической  $\bar{X}$ -картой.

В последующих подразделах на основе этой зависимости  $\text{ARL}(k, \delta)$  формулируется оптимизационная задача по выбору параметра  $k_{\text{opt}}$ , минимизирующего задержку обнаружения заданного критического сдвига  $\delta$  при фиксированном целевом уровне ложных тревог  $\text{ARL}_0^{\text{target}}$ , а также проводится количественная оценка выигрыша от использования винзорированного среднего в условиях «грязной нормали».

#### 2.4.3. Оптимизационная постановка и определение оптимального параметра $k$

В данном подразделе формализуется задача выбора параметра ширины контрольных границ  $k$  для карты на основе винзорированного среднего. Целью является обеспечение наилучшей чувствительности к заданному технологом критическому сдвигу  $\delta$  при сохранении

целевого уровня ложных тревог  $ARL_0^{\text{target}}$ . На уровне математической модели это приводит к условной оптимизационной задаче: минимизировать  $ARL(k, \delta)$  по  $k > 0$  при ограничении  $ARL(k, 0) = ARL_0^{\text{target}}$ .

Основной показатель эффективности контрольной карты в задачах обнаружения смещения уровня процесса – средняя длина серии  $ARL(k, \delta)$ , то есть математическое ожидание числа подгрупп до момента первого сигнала при заданных параметрах карты и сдвиге уровня  $\delta$ . Чем меньше  $ARL(k, \delta)$ , тем быстрее карта реагирует на изменение процесса.

В рассматриваемой постановке технолог задаёт критический (наиболее важный с точки зрения экономических потерь) сдвиг  $\delta > 0$ . Именно для этого значения  $\delta$  требуется минимизировать ожидаемое время до обнаружения. Таким образом, критерий оптимальности выбирается в виде

$$k_{\text{opt}} = \arg \min_{k>0} ARL(k, \delta),$$

где  $ARL(k, \delta) = 1/P_{\text{out}}(k, \delta)$ , а  $P_{\text{out}}(k, \delta)$  – вероятность выхода статистики  $\bar{W}$  за границы  $\mu_0 \pm k\sigma_W$  при наличии сдвига  $\delta$ .

Выбор критерия  $\min ARL(k, \delta)$  для фиксированного  $\delta$  соответствует настройке карты «под целевой сдвиг»: карта настраивается так, чтобы максимально быстро обнаруживать именно те отклонения, которые определены как критические для данного процесса (например, приводящие к недопустимому снижению индексов  $C_p$ ,  $C_{pk}$  или росту доли брака).

Одновременно с повышением чувствительности к сдвигам необходимо сохранить приемлемую частоту ложных срабатываний при исправном процессе. В классической теории контрольных карт это достигается заданием номинального значения  $ARL_0$  средней длины серии при отсутствии сдвига ( $\delta = 0$ ):

$$ARL_0(k) = ARL(k, 0) = \frac{1}{P_{\text{out}}(k, 0)}.$$

На практике  $ARL_0^{\text{target}}$  выбирают из диапазона 200–1000 в зависимости от частоты контроля и допустимой нагрузки на операторов. В данной работе в качестве типичного применяется значение  $ARL_0^{\text{target}} = 370$  или  $\approx 500$ , что соответствует редким ложным тревогам, сопоставимым с классической  $\bar{X}$ -картой с границами  $\pm 3\sigma$ .

Таким образом, оптимизация проводится при ограничении

$$ARL(k, 0) = ARL_0^{\text{target}}.$$

С учётом того, что при  $\delta = 0$  стандартизованная статистика  $Z$  имеет распределение  $N(0,1)$ , получаем

$$P_{\text{out}}(k, 0) = 2[1 - \Phi(k)], ARL_0(k) = \frac{1}{2[1 - \Phi(k)]},$$

и условие  $\text{ARL}_0(k) = \text{ARL}_0^{\text{target}}$  однозначно определяет допустимую область значений  $k$ , обеспечивающих требуемый уровень ложных тревог.

С точки зрения оптимизационной постановки это ограничение играет роль «ресурсного» или «регламентного» условия: повышение чувствительности за счёт чрезмерного сужения границ не допускается, если это приводит к чрезмерному росту частоты ложных тревог.

Аналитическое решение условной задачи

$$\min_{k>0} \text{ARL}(k, \delta) \text{ при } \text{ARL}(k, 0) = \text{ARL}_0^{\text{target}}$$

в общем случае затруднительно из-за нелинейного вида функции  $\text{ARL}(k, \delta)$ . Поэтому используется численный алгоритм поиска  $k_{\text{opt}}$ , основанный на переборе по сетке значений  $k$  и вычислении соответствующих значений  $\text{ARL}(k, 0)$  и  $\text{ARL}(k, \delta)$ .

Алгоритм включает следующие шаги.

Во-первых, выполняется инициализация параметров: выбираются объём подгруппы  $n$ , число отсечённых наблюдений  $h$  (или доля отсечения  $\gamma = h/n$ ), критический сдвиг  $\delta$  и целевое значение  $\text{ARL}_0^{\text{target}}$ . По заданным  $n$  и  $h$  вычисляются вспомогательные величины  $\gamma$ ,  $z_\gamma$ ,  $\sigma_W$ , а также функция  $\text{ARL}(k, \delta)$  в виде

$$\text{ARL}(k, \delta) = \frac{1}{1 - [\Phi(k - \delta') - \Phi(-k - \delta')]},$$

где  $\delta'$  определяется параметрами винзоризации.

Во-вторых, задаётся конечная сетка значений параметра  $k$  в некотором диапазоне, например

$$k \in [k_{\min}, k_{\max}] = [1; 5]$$

с шагом  $\Delta k$  (практически удобно использовать  $\Delta k = 0,01$  или  $0,005$ ). Для каждого значения  $k$  на сетке вычисляется  $\text{ARL}(k, 0)$ . На этом этапе осуществляется отбор значений  $k$ , удовлетворяющих условию

$$\text{ARL}(k, 0) \geq \text{ARL}_0^{\text{target}},$$

либо, при необходимости более точной настройки,  $|\text{ARL}(k, 0) - \text{ARL}_0^{\text{target}}| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$  для заданной допустимой погрешности  $\varepsilon_{\text{tol}}$ .

В-третьих, для отобранных значений  $k$ , обеспечивающих необходимый уровень  $\text{ARL}_0$ , вычисляются значения  $\text{ARL}(k, \delta)$ . Тогда оптимальный параметр определяется как

$$k_{\text{opt}} = \arg \min_{k \in \mathcal{K}_{\text{feasible}}} \text{ARL}(k, \delta),$$

где  $\mathcal{K}_{\text{feasible}}$  – множество значений  $k$ , удовлетворяющих ограничению по  $\text{ARL}_0$ .

На практике алгоритм реализуется в виде программной процедуры в среде MATLAB, которая на вход принимает параметры  $n$ ,  $h$ ,  $\delta$ ,  $ARL_0^{\text{target}}$ , диапазон и шаг по  $k$ , а на выходе возвращает найденное значение  $k_{\text{opt}}$  и соответствующие значения  $ARL_0$  и  $ARL(k_{\text{opt}}, \delta)$ .

Полученный параметр  $k_{\text{opt}}$  далее используется при построении контрольных границ

$$LCL = \mu_0 - k_{\text{opt}}\sigma_W, UCL = \mu_0 + k_{\text{opt}}\sigma_W,$$

обеспечивая, с одной стороны, требуемый уровень ложных тревог  $ARL_0^{\text{target}}$ , а с другой – минимально возможную задержку при обнаружении критического сдвига  $\delta$  для заданной конфигурации винзоризации.

#### 2.4.4. Оценка выигрыша винзоризованной карты при «грязной нормали»

Для моделирования реальных производственных данных, содержащих редкие, но существенные выбросы, используется модель загрязнённого нормального распределения (так называемая «грязная нормаль»). Предполагается, что основная масса наблюдений подчиняется нормальному закону с параметрами исправного процесса, а малая доля данных представляет собой аномальные значения, лежащие на значительном расстоянии от центра.

В общем виде такая модель может быть описана смесью распределений

$$X \sim (1 - \varepsilon) N(\mu, \sigma^2) + \varepsilon F_{\text{out}},$$

где  $\varepsilon \ll 1$  – доля выбросов, а  $F_{\text{out}}$  – распределение выбросов, сконцентрированных в области «дальних хвостов» (например, на уровне  $\mu \pm \tau\sigma$  при  $\tau \gg 1$ ). В проведённом численном эксперименте использовались параметры, характерные для операций прецизионного шлифования: объём подгруппы  $n = 20$ , доля винзоризации  $\alpha_w = 0,20$ , доля выбросов порядка  $\varepsilon = 0,10$ , амплитуда выбросов  $\tau = 6,0$ .

Такая конфигурация соответствует ситуации, когда около 10 % наблюдений представляют собой одиночные промахи измерения или эпизодические нарушения режима, приводящие к значениям порядка шести сигм от центра, в то время как оставшиеся 90 % данных описывают «обычный» процесс, потенциально испытывающий систематический сдвиг уровня  $\delta$ . На этой модели сопоставляются две схемы контроля: классическая  $\bar{X}$ -карта и карта на основе винзоризованного среднего с параметрами винзоризации, фиксированными по заранее заданному  $\alpha_w$ .

Корректное сравнение эффективности двух карт возможно только при одинаковом режиме ложных тревог. Поэтому и классическая  $\bar{X}$ -карта, и карта на основе винзоризованного среднего настраиваются на одинаковое значение средней длины серии при отсутствии сдвига процесса  $ARL_0 \approx 520$ .

Для классической  $\bar{X}$ -карты контрольные границы задаются в виде

$$\text{LCL}_X = \mu_0 - k_X \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{UCL}_X = \mu_0 + k_X \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где параметр  $k_X$  подбирается так, чтобы средняя длина серии при нормальном процессе удовлетворяла условию

$$\text{ARL}_0(k_X) \approx 520.$$

Для карты на основе винзоризованного среднего  $\bar{W}$  границы имеют вид

$$\text{LCL}_W = \mu_0 - k_W \sigma_W, \text{UCL}_W = \mu_0 + k_W \sigma_W,$$

где  $\sigma_W$  – стандартное отклонение винзоризованного среднего, определяемое по формуле

$$\sigma_W = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - 2\gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma) + 2\gamma^2 z_\gamma^2}, \gamma = \frac{h}{n}.$$

Параметр  $k_W$  подбирается численно так, чтобы при нормальном (незагрязнённом) процессе выполнялось

$$\text{ARL}_0(k_W) \approx 520.$$

Таким образом, обе схемы имеют сопоставимый уровень ложных тревог при «чистой» нормали, а различия в поведении на «грязных» данных обусловлены только различиями в устойчивости к выбросам и чувствительности к сдвигу. В проведённом эксперименте получены значения  $\text{ARL}_0 \approx 520,8$  для классической карты и  $\text{ARL}_0 \approx 520,0$  для винзоризованной, что подтверждает сопоставимость настроек по  $\text{ARL}_0$ .

Для количественного сравнения скорости обнаружения сдвига уровня процесса вводится показатель относительного выигрыша винзоризованной карты по средней длине серии:

$$\text{gain}(\delta) = \frac{\text{ARL}_{\text{mean}}(\delta) - \text{ARL}_{\text{winsor}}(\delta)}{\text{ARL}_{\text{mean}}(\delta)} \cdot 100\%,$$

где  $\text{ARL}_{\text{mean}}(\delta)$  – средняя длина серии классической  $\bar{X}$ -карты при сдвиге  $\delta$ , а  $\text{ARL}_{\text{winsor}}(\delta)$  – соответствующее значение для карты на основе винзоризованного среднего.

Положительное значение  $\text{gain}(\delta)$  означает, что винзоризованная карта срабатывает быстрее: при данном сдвиге  $\delta$  ожидаемое число подгрупп до сигнала меньше, чем у классической карты. Например,  $\text{gain}(\delta) = 40\%$  означает, что средняя длина серии винзоризованной карты на 40 % меньше, чем у  $\bar{X}$ -карты, то есть сигнал возникает существенно раньше.

При  $\delta = 0$  показатель  $\text{gain}(0)$  близок к нулю, поскольку обе карты настроены на одинаковый  $\text{ARL}_0$  и в условиях нормального процесса ведут себя практически одинаково. Существенные различия проявляются именно в зоне  $\delta > 0$  на фоне загрязнённого распределения, где влияние выбросов на классическую карту существенно, а на винзоризованную – подавлено.

Результаты моделирования вычислены в виде зависимости  $\text{gain}(\delta)$  от величины сдвига уровня  $\delta$  и представлены на соответствующей диаграмме для параметров  $n = 20$ ,  $\text{ARL}_0 \approx 500$ ,  $\alpha_w = 0,20$ ,  $\varepsilon = 0,10$ ,  $\tau = 6,0$ .

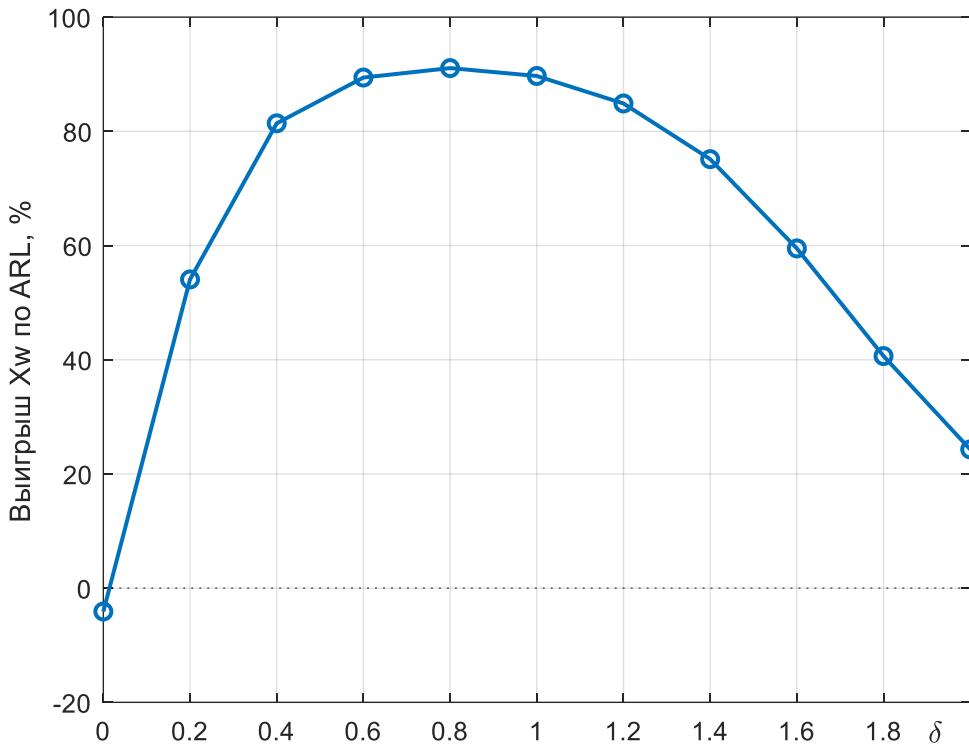


Рисунок 2 – Выигрыш карты винзоризованного среднего против  $\bar{X}$ -карты Шухарты на «грязных» данных:  $n=20$ ,  $ARL_0=500$ ,  $\alpha=0.20$ ,  $\varepsilon=0.10$ ,  $\tau=6.0$

При отсутствии сдвига ( $\delta = 0$ ) обе схемы дают практически совпадающие значения  $ARL_0$ : около 520,8 для классической  $\bar{X}$ -карты и 520 для винзоризованной, относительный выигрыш составляет порядка 0,15 %. Это подтверждает, что применение винзоризации не приводит к заметному «штрафу» по частоте ложных тревог при нормальном процессе.

В области малых сдвигов (порядка  $\delta = 0,2\sigma$ ) преимущество винзоризованной схемы уже становится заметным: средняя длина серии сокращается примерно на 7 % за счёт подавления влияния редких, но крупных выбросов, которые в классической  $\bar{X}$ -карте «размывают» сигнал.

В области умеренных сдвигов ( $\delta \approx 0,4\sigma$ ) эффект усиливается. Для иллюстрации можно привести характерный пример: при  $\delta = 0,4\sigma$   $ARL_{mean}(\delta)$  составляет порядка 161 выборки, тогда как  $ARL_{winsor}(\delta)$  – около 94, что соответствует выигрышу выше 40 %.

Наиболее существенный эффект наблюдается в технологически критическом диапазоне  $\delta = 0,6\text{--}1,0\sigma$ . При  $\delta = 0,6\sigma$  средняя длина серии классической карты составляет около 70,5 выборок, тогда как винзоризованная карта даёт примерно 21,3 выборки, то есть выигрыш порядка 70 %. При  $\delta = 0,8\sigma$   $ARL_{mean}(\delta) \approx 31,4$ ,  $ARL_{winsor}(\delta) \approx 6,0$ , что соответствует выигрышу около 81 %. При  $\delta = 1,0\sigma$  средняя длина серии классической карты около 15, а винзоризованной – порядка 2,46, относительный выигрыш превышает 83 %. Таким образом, именно в зоне умеренных сдвигов винзоризованная карта обнаруживает отклонение в 4–6 раз быстрее.

При дальнейшем увеличении сдвига ( $\delta \geq 1,2\sigma$ ) абсолютные значения ARL для обеих схем быстро стремятся к единице: при столь крупных сдвигах любая разумно настроенная карта даёт сигнал почти сразу. В этих условиях относительный выигрыш естественным образом уменьшается: для  $\delta = 1,6\sigma$  он составляет порядка 58–60 %, для  $\delta = 1,8\sigma$  – около 40 %, а при  $\delta = 2,0\sigma$  – порядка 24 %. Это отражает общую закономерность: резерв для улучшения показателя ARL велик в зоне малых и средних сдвигов и ограничен при очень больших смещениях, когда сигнал практически мгновенный в любом случае.

Полученные результаты непосредственно соответствуют типичной картине для прецизионного шлифования дорожек качения и других высокоточных поверхностей. В таких процессах основной массив данных описывает стабильный режим обработки, тогда как редкие выбросы обусловлены эпизодическими нарушениями подачи, локальными дефектами абразива, единичными промахами измерений или кратковременными нарушениями работы системы охлаждения.

Классическая  $\bar{X}$ -карта в условиях «грязной нормали» чувствительна к этим выбросам: они расширяют эмпирическое распределение выборочных средних, приводят к завышению оценок разброса и, как следствие, к увеличению  $ARL_1$  при малых и средних сдвигах уровня. В результате статистический сигнал запаздывает по отношению к реальному ухудшению процесса, часть брака остаётся невыявленной, а индексы  $C_p$  и  $C_{pk}$  занижают потенциальные возможности процесса.

Винзоризованная карта за счёт подавления крайних наблюдений сохраняет форму распределения центральной части данных и, следовательно, высокую чувствительность к систематическому смещению уровня на фоне редких выбросов. Показанный в моделировании эффект – сокращение  $ARL_1$  в 4–6 раз в зоне технологически значимых сдвигов – означает, что время между реальным ухудшением процесса и его статистическим обнаружением сокращается в несколько раз без увеличения частоты ложных тревог.

Для практики прецизионного шлифования это означает более раннее выявление дрейфа режима, снижение доли скрытого брака и переработки, рост индексов  $C_p$  и  $C_{pk}$  за счёт уменьшения как систематического смещения, так и внутрипартийной вариабельности. С учётом того, что переход от классической  $\bar{X}$ -карты к винзоризованной карте требует лишь изменения статистики среднего и множителя  $k$ , без радикальной перестройки регламента и правил интерпретации, полученный выигрыш может быть реализован в условиях серийного производства с минимальными организационными затратами.

#### 2.4.5. Таблицы оптимальных настроек и пример применения метода

Для практического применения карты средних на основе винзоризованного среднего удобно иметь заранее рассчитанные таблицы оптимальных настроек параметра  $k$  и соответствующих значений средней длины серии  $ARL(\delta)$  для типичных комбинаций объёма подгруппы  $n$ , уровня винзоризации и целевого значения  $ARL_0$ . Ниже рассматривается пример такой «паспортной» таблицы для подгрупп объёма  $n = 10$  и уровня винзоризации  $\gamma = 0,20$  (отсечение 20 % наблюдений суммарно по двум хвостам), а также показывается порядок её использования.

Таблица 4 – Оптимальные значения настроек карты винзоризованного среднего

$ARL_0$	$k_{opt}$	$\delta$									
		0,2	0,4	0,6	0,8	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
100	2,58	86,11	61,28	40,36	26,19	17,22	11,84	8,36	6,09	4,58	3,56
250	2,88	206,53	139,63	86,56	52,83	32,86	21,42	14,42	9,98	7,14	5,29
500	3,09	393,86	259,50	153,42	90,14	53,99	34,07	22,13	14,76	10,19	7,29
750	3,21	584,11	373,00	215,56	124,84	72,95	44,90	28,57	18,67	12,63	8,86
1000	3,29	761,90	485,44	274,31	156,62	89,92	54,73	34,37	22,13	14,76	10,21

Таблица имеет следующую структуру. В первом столбце приведены целевые значения  $ARL_0$  при нормальном процессе ( $\delta = 0$ ), во втором – соответствующие оптимальные значения множителя  $k$ . В последующих столбцах приведены значения  $ARL(k_{opt}, \delta)$  средняя длина серии для карты на основе винзоризованного среднего при заданном оптимальном  $k_{opt}$  и относительном сдвиге уровня процесса  $\delta$  (в единицах  $\sigma$ ).

Интерпретация столбцов.  $ARL_0$  – целевая средняя длина серии при отсутствии сдвига ( $\delta = 0$ ), задающая частоту ложных тревог.  $k$  – оптимальный множитель для контрольных границ карты винзоризованного среднего, обеспечивающий заданное значение  $ARL_0$  и минимизирующий  $ARL(\delta)$  в заданном диапазоне сдвигов. Значения средней длины серии  $ARL(\delta)$  для сдвигов  $\delta = 0,2; 0,4; \dots; 2,0$  при выбранном  $k_{opt}$ .

Таким образом, каждая строка таблицы задаёт полный «паспорт» настройки карты для конкретного целевого  $ARL_0$ : как параметр  $k_{opt}$ , так и ожидаемую скорость обнаружения сдвигов различной величины.

Порядок использования таблицы для настройки карты средних на основе винзоризованного среднего можно описать следующим образом. Выбор объёма подгруппы  $n$  и уровня винзоризации. На данном этапе рассматривается таблица для  $n = 10$  и  $\gamma = 0,20$ . Выбор этих значений обусловлен технологическими ограничениями (размер партии, частота измерений) и желаемой степенью робастности. Определение целевого уровня  $ARL_0$ . Исходя из допустимой частоты ложных сигналов (например, в расчёте на смену или неделю) выбирается требуемое

значение  $ARL_0$  – чем больше  $ARL_0$ , тем реже ложные тревоги. Считывание оптимального  $k_{\text{opt}}$ . В строке, соответствующей выбранному  $ARL_0$ , считывается значение  $k$ . Именно его следует использовать при построении контрольных границ карты винзоризованного среднего:

$$LCL = \mu_0 - k_{\text{opt}}\sigma_W, UCL = \mu_0 + k_{\text{opt}}\sigma_W,$$

где  $\sigma_W$  – стандартное отклонение винзоризованного среднего. Оценка оперативности карты по  $ARL(k_{\text{opt}}, \delta)$ . По значениям  $ARL(k_{\text{opt}}, \delta)$  в строке можно оценить ожидаемую скорость обнаружения сдвигов разной величины  $\delta$ . Например, если технологически критическим считается сдвиг  $\delta = 0,8\sigma$ , достаточно посмотреть значение в соответствующей строке.

Если при выбранном  $ARL_0$  карта оказывается слишком медленной для важного сдвига  $\delta^*$ (значение  $d_{\delta^*}$  слишком велико), инженер может вернуться на шаг 2 и выбрать более «строгий» уровень контроля (меньший  $ARL_0$ ), либо скорректировать другие параметры схемы.

Табличная форма представления результатов оптимизации параметра  $k$  для карты винзоризованного среднего обладает рядом практических преимуществ.

Во-первых, она позволяет отделить сложную часть задачи (анализика и моделирование  $ARL(k, \delta)$ , выбор  $k_{opt}$ ) от повседневной эксплуатации. Инженер-практик получает готовый инструмент: достаточно выбрать строку по  $ARL_0$  и считать оптимальный  $k$  и ожидаемые значения  $ARL(\delta)$ .

Во-вторых, использование одной и той же таблицы для разных процессов с одинаковыми параметрами обеспечивает унификацию настроек контрольных карт по цехам и участкам, снижает риск субъективных решений и упрощает обучение персонала.

В-третьих, сочетание робастной статистики (винзоризованного среднего) с оптимизированным параметром  $k$  даёт возможность одновременно сохранить привычный уровень ложных тревог ( $ARL_0$ ); ускорить обнаружение существенных сдвигов уровня на фоне выбросов; уменьшить долю скрытого брака, обусловленного запаздыванием сигнала классической  $\bar{X}$ -карты в условиях «грязной нормали».

Наконец, сама структура таблицы подчёркивает роль  $\delta$  как «дизайн-параметра» карты: по столбцам  $d_\delta$  легко видеть, для каких диапазонов сдвига винзоризованная карта обеспечивает наибольший выигрыш по  $ARL$ , и соотнести это с типичными сценариями дрейфа уровня в конкретных шлифовальных и других высокоточных операциях.

Рассмотрим конкретный пример настройки карты. Пусть объём подгруппы:  $n = 10$ ; уровень винзоризации:  $\gamma = 0,20$ ; целевой уровень ложных тревог:  $ARL_0 = 500$ ; наибольший интерес представляют сдвиги уровня  $\delta \approx 0,8\text{--}1,2\sigma$ . Из таблицы выбираем строку

500	3,09	393,86	259,50	153,42	90,14	53,99	34,07	22,13	14,76	10,19	7,29
-----	------	--------	--------	--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------

Интерпретация при  $\delta = 0,8\sigma$  средняя длина серии составляет примерно  $ARL(0,8) \approx 90$  подгрупп; при  $\delta = 1,0\sigma$  – около 54 подгрупп; при  $\delta = 1,2\sigma$  – около 34 подгрупп. При этом при отсутствии сдвига ( $\delta = 0$ ) карта даёт ложный сигнал в среднем раз в 500 подгрупп. Таким образом, при достаточно крупном сдвиге уровня ( $\delta \geq 1,0\sigma$ ) карта на основе винзоризованного среднего обеспечивает вполне оперативное обнаружение (десятки подгрупп вместо сотен), не увеличивая частоту ложных тревог по сравнению с классической схемой.

Число  $k = 3,09$  задаёт ширину контрольных границ; далее для практической реализации достаточно подставить его в формулы для  $LCL$  и  $UCL$  и использовать полученные границы в стандартной карте  $\bar{X}$ , но с заменой выборочного среднего на винзоризованное.

Проведённый пример демонстрирует ряд существенных преимуществ контрольной карты средних на основе винзоризованного среднего по сравнению с классической  $\bar{X}$ -картой.

Во-первых, обеспечивается ускоренное обнаружение именно тех смещений уровня, которые с технологической точки зрения являются наиболее критичными. В примере это сдвиг  $\delta = 1,5\sigma$ , для которого за счёт оптимизации параметра  $k$  достигается значимое снижение ARL при сохранении заданного  $ARL_0$ .

Во-вторых, применение винзоризации существенно снижает влияние единичных аномальных наблюдений. Винзорированное среднее  $\bar{W}$  ограничивает вклад крайних значений через замену их на ближайшие «внутренние» порядковые статистики, что уменьшает разброс оценок уровня процесса в условиях «грязной нормали». Это ведёт к более стабильному поведению карты и снижает риск запаздывания сигнала из-за размывания статистики выбросами.

В-третьих, сохранение целевого уровня  $ARL_0$  гарантирует, что частота ложных тревог остаётся на привычном для персонала уровне. Это особенно важно при внедрении новых методов в действующие системы статистического управления процессами: операторы не испытывают роста «лишних» сигналов, а все улучшения носят характер именно повышения чувствительности к реальным отклонениям.

Наконец, конструктивно модификация затрагивает только используемую статистику среднего и численное значение множителя  $k$ . Общий формат карты, интерпретация точек, правила реагирования на сигналы и логика регламентов остаются теми же, что и для классической  $\bar{X}$ -карты. Это существенно упрощает практическое внедрение: достаточно заменить алгоритм расчёта среднего на винзоризованный и использовать оптимизированный множитель  $k_{opt}$  вместо стандартных «трёх сигм».

В совокупности эти свойства позволяют рекомендовать контрольную карту средних на основе винзоризованного среднего к применению в условиях серийного и крупносерийного производства, где данные подвержены влиянию редких, но крупных выбросов; критически

важны одновременное соблюдение требований к  $ARL_0$  и оперативность реагирования на отклонения; существует необходимость повышения индексов  $C_p$  и  $C_{pk}$  за счёт сокращения времени пребывания процесса в ухудшенном состоянии.

Таким образом, рассмотренный пример практической реализации подтверждает, что однопараметрическая оптимизационная настройка винзоризованной карты обеспечивает более выгодный баланс между устойчивостью к выбросам и скоростью обнаружения сдвигов уровня процесса по сравнению с классической схемой « $3\sigma$ ».

## **2.5 Построение контрольной карты изменчивости на основе винзоризованной дисперсии**

### **2.5.1. Математическая модель процесса и основные обозначения**

Предполагается, что при нормальном функционировании процесса контролируемая характеристика качества  $X$  имеет нормальное распределение

$$X \sim N(\mu, \sigma_0^2),$$

где  $\mu$  – математическое ожидание,  $\sigma_0$  – стандартное отклонение при исправном процессе. Для упрощения дальнейших выкладок без ограничения общности полагается  $\mu = 0$ ,  $\sigma_0 = 1$ . Такое нормирование позволяет интерпретировать все изменения вариабельности в безразмерной форме и затем, при необходимости, перенести результаты на любой реальный масштаб измерения.

Изменение изменчивости процесса моделируется в виде мультипликативного сдвига стандартного отклонения. При расстройстве процесса величина  $X$  имеет распределение

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma = \varepsilon\sigma_0,$$

где  $\varepsilon > 0$  – безразмерный множитель, характеризующий относительное изменение стандартного отклонения по сравнению с номинальным уровнем. Значения  $\varepsilon > 1$  соответствуют увеличению вариабельности (расширению разброса),  $\varepsilon < 1$  – её уменьшению. В задачах контроля ухудшения процесса основной интерес представляют случаи  $\varepsilon > 1$ , когда рост дисперсии приводит к повышению доли выхода параметров за допуски и снижению способности процесса.

Статистический контроль изменчивости осуществляется на основе подгрупп постоянного объёма  $n$ . Для каждой подгруппы строится робастная оценка разброса на основе винзоризованной выборки, которая далее используется как статистика контрольной карты.

Пусть для текущей подгруппы получена выборка объёма  $n$ , которая после упорядочения по возрастанию имеет вид

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

Процедура винзоризации заключается в замене части крайних наблюдений их «внутренними» соседями. Пусть из каждого хвоста заменяется по  $h$  наблюдений, где  $h$  – целое число, удовлетворяющее неравенству  $0 \leq h \leq n/2$ . Тогда формируется винзоризованная выборка  $W_1, \dots, W_n$ , задаваемая покомпонентно правилом

$$W_i = \begin{cases} X_{(h+1)}, & i \leq h, \\ X_{(i)}, & h + 1 \leq i \leq n - h, \\ X_{(n-h)}, & i \geq n - h + 1. \end{cases}$$

Таким образом, все значения ниже  $X_{(h+1)}$  «подтягиваются» к  $X_{(h+1)}$ , а все значения выше  $X_{(n-h)}$  заменяются на  $X_{(n-h)}$ ; центральная часть выборки остаётся без изменений. Такая трансформация ограничивает влияние единичных экстремальных наблюдений, сохраняя при этом полный объём информации, связанной с основной массой данных.

На основе винзоризованной выборки определяется винзоризованная оценка дисперсии. Сначала вычисляется винзоризованное среднее

$$\bar{Y}_W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i,$$

после чего винзоризованная дисперсия задаётся классической формулой исправленной выборочной дисперсии:

$$S_{(W,h)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{Y}_W)^2.$$

Здесь индекс  $(W, h)$  подчёркивает, что дисперсия вычислена по винзоризованным данным при заданном числе отсечённых наблюдений  $h$ . В дальнейшем статистика  $S_{(W,h)}$  используется как основа для построения контрольной карты изменчивости. В нормальном случае ( $X \sim N(0,1)$ ) её математическое ожидание и дисперсия могут быть выражены через специальные коэффициенты  $c_{4,h,n}$  и  $c_{5,h,n}$ , что будет подробно рассмотрено в следующем подразделе.

Удобно характеризовать интенсивность винзоризации не абсолютным числом отсечённых наблюдений  $h$ , а относительной долей  $\gamma$ , приходящейся на один хвост распределения:

$$\gamma = \frac{h}{n}, \quad 0 \leq \gamma \leq 0,5.$$

При  $\gamma = 0$  (то есть  $h = 0$ ) процедура винзоризации отсутствует,  $W_i = X_{(i)}$ , и статистика  $S_{(W,h)}$  сводится к обычной выборочной оценке стандартного отклонения  $S$ ; соответствующая контрольная карта совпадает с классической S-картой. При  $\gamma > 0$  крайние наблюдения частично «усекаются», и оценка становится робастной по отношению к единичным выбросам.

Практический выбор  $\gamma$  представляет собой компромисс между устойчивостью и чувствительностью. При слишком малых значениях  $\gamma$  влияние выбросов остаётся значимым, и

выигрыш в устойчивости невелик. При слишком больших значениях  $\gamma$  в винзоризацию попадает чрезмерно широкая часть выборки, что приводит к потере чувствительности к умеренному росту дисперсии и увеличивает риск пропуска небольших, но важных для технологии сдвигов  $\varepsilon$ .

В диссертации основное внимание уделяется небольшим значениям  $\gamma$ , соответствующим отсечению одного–двух наблюдений в подгруппах типичных объёмов ( $n = 6 \dots 12$ ). Такой режим обеспечивает заметное ослабление влияния редких экстремальных наблюдений (характерных, например, для операций шлифования с эпизодическими дефектами поверхности или промахами измерений) при сохранении приемлемой чувствительности к относительному росту стандартного отклонения в диапазоне  $\varepsilon \gtrsim 1,1$ . В дальнейших разделах для заданных  $\pi$  будут получены аналитические выражения для моментов  $S_{(W,h)}$ , предложена аппроксимация её распределения и разработана оптимизационная процедура выбора параметра  $k$ , обеспечивающего требуемые значения  $ARL_0$  и  $ARL_1$ .

### 2.5.2. Статистические характеристики $S_{(W,h)}$ при нормальном процессе

Пусть случайная величина  $X$  при нахождении процесса под статистическим контролем имеет стандартное нормальное распределение

$$X \sim N(0,1).$$

Из каждой подгруппы объёма  $n$  после винзоризации с параметром  $h$  строится винзоризованная выборка  $W_1, \dots, W_n$ , винзоризованное среднее  $\bar{Y}_W$  и винзоризованная дисперсия

$$S_{(W,h)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{Y}_W)^2.$$

В отличие от классической выборочной оценки стандартного отклонения, распределение  $S_{(W,h)}$  уже не является точным масштабированным хи-квадрат, однако для неё могут быть получены простые выражения для первых двух моментов. В частности, для нормального распределения  $X \sim N(0,1)$  справедливы соотношения [112]:

$$\mathbb{E}[S_{(W,h)}] = c_{4,h,n}, \text{Var}(S_{(W,h)}) = c_{5,h,n}^2 = 1 - c_{4,h,n}^2,$$

где коэффициент  $c_{4,h,n}$  зависит от объёма подгруппы  $\pi$  и параметра винзоризации  $h$  и определяется специальной функцией, а  $c_{5,h,n}$  выступает в роли «коэффициента вариации» винзоризованной оценки в нормированном масштабе.

Таким образом, в нормированном случае ( $\sigma_0 = 1$ ) математическое ожидание  $S_{(W,h)}$  меньше единицы, а дисперсия выражается через  $c_{4,h,n}$ . При переходе к общему масштабу  $\sigma_0$  моменты масштабируются линейно:

$$\mathbb{E}[S_{(W,h)}] = c_{4,h,n} \sigma_0, \text{Var}(S_{(W,h)}) = c_{5,h,n}^2 \sigma_0^2.$$

Эти величины используются далее при построении контрольных границ и при аппроксимации распределения статистики  $S_{(W,h)}$  хи-квадрат-распределением с эффективным числом степеней свободы.

Коэффициент  $c_{4,h,n}$  является обобщением классического поправочного множителя  $c_4(n)$  для стандартной оценки  $\hat{\sigma}$  при отсутствии винзоризации. Для нормального распределения и винзоризации с параметром  $h$  он имеет вид [112]:

$$c_{4,h,n} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} [1 - \gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma)],$$

где

$$\gamma = \frac{h}{n}, z_\gamma = \Phi^{-1}(1 - \gamma),$$

$\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция,  $\Phi(\cdot)$  и  $\varphi(\cdot)$  – функция распределения и плотность стандартного нормального закона соответственно.

Фактор перед квадратной скобкой совпадает с классическим  $c_4(n)$  при отсутствии винзоризации ( $h = 0, \gamma = 0, 1 - \gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma) = 1$ ). Множитель  $[1 - \gamma z_\gamma \varphi(z_\gamma)]$  описывает влияние винзоризации на ожидаемое значение оценки разброса: чем больше доля отсечения  $\gamma$  и «глубже» усечение (через  $z_\gamma$ ), тем сильнее снижается ожидаемое значение  $S_{(W,h)}$  по сравнению с классической оценкой.

Дисперсия винзоризованной оценки стандартного отклонения определяется через  $c_{4,h,n}$  по простой формуле:

$$c_{5,h,n}^2 = 1 - c_{4,h,n}^2,$$

то есть

$$\text{Var}(S_{(W,h)}) = 1 - c_{4,h,n}^2 (\text{для } \sigma_0 = 1).$$

При этом, как и в случае классического  $c_4$ , выполняется  $0 < c_{4,h,n} < 1$ , а потому  $0 < c_{5,h,n}^2 < 1$ .

На практике вычисление коэффициентов  $c_{4,h,n}$  и  $c_{5,h,n}$  выполняется численно с использованием стандартных библиотек специальных функций (гамма-функция, нормальное распределение). Поскольку дискретный набор значений  $h$  в задачах контроля ограничен (обычно  $5 \leq n \leq 25$ ,  $h = 0,1,2,3$ ), целесообразно предварительно табулировать  $c_{4,h,n}$  и  $c_{5,h,n}$  и далее использовать готовые таблицы при настройке контрольных карт.

Параметры подгруппы  $h$  винзоризации определяют ключевые свойства винзоризованной оценки дисперсии  $S_{(W,h)}$  – её смещение, разброс и робастность к выбросам.

Увеличение объёма подгруппы при фиксированном  $h$  ведёт к уменьшению доли отсечения  $\gamma = h/n$ . В пределе при постоянном  $h$  и  $n \rightarrow \infty$  винзоризация становится всё более «мягкой», а влияние крайних наблюдений на оценку уменьшается относительно эффекта усреднения по большому  $n$ . Соответственно, коэффициент  $c_{4,h,n}$  возрастает и стремится к 1, а дисперсия оценки уменьшается. Это согласуется с общей идеей: при большом числе наблюдений устойчивость обеспечивается самой процедурой усреднения.

С другой стороны, при фиксированном  $h$  (то есть рост  $\gamma$ ) приводит к более агрессивному отсечению хвостов. В данном случае наблюдается два эффекта. Математическое ожидание  $S_{(W,h)}$  уменьшается (коэффициент  $c_{4,h,n}$  снижается), поскольку вклад крайних значений, существенно увеличивающих разброс, подавляется; разброс оценки (через  $c_{5,h,n}$ ) изменяется менее однозначно: с одной стороны, устранение экстремальных наблюдений стабилизирует оценку, с другой – уменьшение эффективной выборочной вариативности может снижать чувствительность к небольшим ростам дисперсии.

С точки зрения построения контрольной карты изменчивости это приводит к следующему компромиссу. При малых  $h$  (например,  $h = 1$  при  $n = 6 \dots 12$ ) винзоризованная дисперсия остаётся достаточно близкой по своим моментам к классической  $S$ , но уже демонстрирует улучшенную устойчивость к единичным выбросам, характерным для «грязной нормали». При больших  $h$  относительное смещение  $\mathbb{E}[S_{(W,h)}]$  по отношению к  $\sigma_0$  возрастает, и требуется более серьёзная перекалибровка контрольных границ; кроме того, чувствительность к небольшим изменениям  $\varepsilon$  снижается.

Именно поэтому в дальнейших разделах основное внимание уделяется умеренным значениям  $h$  (обычно  $h = 1$ ), при которых достигается разумный баланс между рабочностью и чувствительностью. Коэффициенты  $c_{4,h,n}$  и  $c_{5,h,n}$ , зависящие от  $n$  и  $h$ , становятся базой для вычисления эффективного числа степеней свободы, аппроксимации распределения  $S_{(W,h)}$  хи-квадрат-распределением и последующей оптимизации параметра  $k$  по критерию минимизации средней длины серии при заданном сдвиге изменчивости.

### 2.5.3. Аппроксимация распределения статистического критерия

Пусть при нормальном процессе  $X \sim N(0,1)$  винзоризованная оценка стандартного отклонения  $S_{(W,h)}$  имеет моменты

$$\mathbb{E}[S_{(W,h)}] = c_{4,h,n}, \text{Var}(S_{(W,h)}) = c_{5,h,n}^2 = 1 - c_{4,h,n}^2.$$

Если бы статистика  $S_{(W,h)}$  имела точное «классическое» происхождение от хи-квадрат-распределения, то величина

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

имела бы распределение  $\chi_{\nu}^2$  с некоторым числом степеней свободы  $\nu$ . В этом случае можно записать:

$$\mathbb{E}[S] = \sigma \sqrt{\frac{2}{\nu}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}, \text{Var}(S) = \sigma^2 - \mathbb{E}^2[S].$$

Для винзоризованной оценки точная форма распределения неизвестна, однако можно подобрать такое «эффективное» число степеней свободы  $\nu_h$ , при котором первые два момента аппроксимирующего распределения совпадут с реальными моментами  $S_{(W,h)}$ . В [100] предложен более простой и удобный для практики моментный критерий:

$$\nu_h = \frac{2\mathbb{E}^2[S_{(W,h)}]}{\text{Var}(S_{(W,h)})} = \frac{2c_{4,h,n}^2}{1 - c_{4,h,n}^2}.$$

Такое определение  $\nu_h$  обеспечивает согласование двух первых моментов статистики  $S_{(W,h)}$  с соответствующими моментами некоторого хи-квадрат-распределения и служит основой для последующей аппроксимации. Важно, что  $\nu_h$  зависит от параметров подгруппы *pi* винзоризации  $h$ ; при  $h = 0 (\gamma = 0)$   $\nu_h$  стремится к классическому значению  $n - 1$ .

Имея  $\nu_h$ , вводится вспомогательная статистика

$$Y = \frac{(n-1)S_{(W,h)}^2}{c_{h,n}\sigma^2},$$

для которой предполагается хи-квадрат-аппроксимация

$$Y \sim \chi_{\nu_h}^2.$$

Здесь нормирующий множитель  $c_{h,n}$  выбирается так, чтобы первая и вторая моменты  $Y$  совпадали с соответствующими моментами  $\chi_{\nu_h}^2$ . В используемой в диссертации форме он записывается как

$$c_{h,n} = c_{4,h,n}^2 + \text{Var}(S_{(W,h)}),$$

то есть учитывает вклад как ожидаемого квадрата оценки, так и её дисперсии. В нормированном случае  $\sigma_0 = 1$  это приводит к простой связи между распределением  $S_{(W,h)}$  и хи-квадрат-распределением с  $\nu_h$  степенями свободы.

Практически это означает, что при  $\varepsilon = 1$  статистика  $Y$  аппроксимируется  $\chi_{\nu_h}^2$ ; при  $\varepsilon \neq 1$  (изменение дисперсии  $\sigma = \varepsilon\sigma_0$ ) масштаб  $\sigma^2$  в определении  $Y$  изменяется, что приводит к растяжению/сжатию оси по аргументу хи-квадрат-распределения.

Именно эта аппроксимация используется далее при расчёте вероятности попадания в зону контроля и средней длины серии. Если контрольные границы для  $S_{(W,h)}$  заданы как

$$L_{CL} = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] - k \sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})}, U_{CL} = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] + k \sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})},$$

то соответствующие границы для  $Y$  имеют вид

$$t_1 = (n-1)L_{CL}^2, t_2 = (n-1)U_{CL}^2,$$

и вероятность нахождения в зоне контроля при сдвиге  $\varepsilon$  выражается через функцию распределения  $\chi_{\nu_h}^2$ :

$$P_{in}(\varepsilon) = \mathbb{P}\{t_1 < Y\varepsilon^{-2} < t_2\} = F_{\chi_{\nu_h}^2}\left(\frac{t_2}{\varepsilon^2}\right) - F_{\chi_{\nu_h}^2}\left(\frac{t_1}{\varepsilon^2}\right).$$

Далее из  $P_{out}(\varepsilon) = 1 - P_{in}(\varepsilon)$  вычисляется  $ARL(\varepsilon) = 1/P_{out}(\varepsilon)$ , что позволяет использовать стандартный аппарат для настройки и оптимизации контрольной карты.

Корректность хи-квадрат-аппроксимации критична для надёжности всех последующих расчётов: контрольных границ, значений  $ARL_0$  и  $ARL_1$ , а также для оптимизации параметра  $k$ . Поэтому в диссертации проведена численная проверка точности с использованием метода Монте-Карло.

Схема проверки включала следующие шаги. Фиксируются параметры  $n$  и  $h$  в диапазоне, представляющем практический интерес (типовично  $5 \leq n \leq 25$ ,  $h \leq 3$ ). Генерируется большое число (десятки и сотни тысяч) выборок  $\{X_1, \dots, X_n\}$  из нормального распределения  $N(0,1)$ . Для каждой выборки выполняется винзоризация с параметром  $h$  и вычисляется значение  $S_{(W,h)}$  и соответствующей статистики  $Y$ . По полученной выборке значений  $Y$  строится эмпирическая функция распределения, оцениваются моменты, квантили и сравниваются с теоретическими значениями для  $\chi_{\nu_h}^2$ .

Результаты моделирования показали, что для диапазона параметров

$$5 \leq n \leq 25, h \leq 3$$

расхождение между эмпирическими и теоретическими значениями (в терминах моментов и квантилей, критичных для построения контрольных границ) не превышает 2 %. Это относится как к области центра распределения, так и к хвостам, где расположены контрольные границы.

Таким образом, хи-квадрат-аппроксимация

$$Y = \frac{(n-1)S_{(W,h)}^2}{c_{h,n}\sigma^2} \sim \chi_{\nu_h}^2$$

может считаться достаточно точной для задач настройки контрольной карты изменчивости на основе винзоризованной дисперсии. Погрешность порядка нескольких процентов существенно ниже типичных разбросов, обусловленных конечным объёмом выборок и стохастической природой самого процесса. Это обосновывает использование полученной аппроксимации в последующих разделах для аналитического расчёта  $ARL$ , оптимизации параметра  $k$  и табулирования оптимальных настроек карты.

#### 2.5.4. Построение контрольных границ с регулируемым коэффициентом $k$

Как показано ранее, при нормальном процессе  $X \sim N(0, \sigma_0^2)$  винзоризованная оценка стандартного отклонения имеет вид

$$\mathbb{E}[S_{(W,h)}] = c_{4,h,n} \sigma_0, \text{Var}(S_{(W,h)}) = c_{5,h,n}^2 \sigma_0^2, c_{5,h,n}^2 = 1 - c_{4,h,n}^2.$$

Эти величины задают естественный «центр» и масштаб разброса статистики  $S_{(W,h)}$  при исправном процессе. Тогда контрольные границы в исходной метрике  $S$ -карты определяются по аналогии с классической схемой как

$$L_{CL} = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] - k \sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})}, U_{CL} = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] + k \sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})},$$

то есть

$$L_{CL} = c_{4,h,n} \sigma_0 - k c_{5,h,n} \sigma_0, U_{CL} = c_{4,h,n} \sigma_0 + k c_{5,h,n} \sigma_0.$$

При стандартном нормировании  $\sigma_0 = 1$  выражения упрощаются до

$$L_{CL} = c_{4,h,n} - k c_{5,h,n}, U_{CL} = c_{4,h,n} + k c_{5,h,n}.$$

В отличие от классической  $S$ -карты, где нижняя граница нередко ограничивается нулём по соображениям физического смысла, здесь нижняя граница  $L_{CL}$  задаётся именно через моменты винзоризованной оценки. При разумных значениях  $k$  и параметров  $n, h$  она остаётся положительной и обеспечивает симметричную по стандартным отклонениям зону контроля вокруг  $\mathbb{E}[S_{(W,h)}]$ .

Таким образом, параметр  $k$  определяет ширину интервала допустимых значений для  $S_{(W,h)}$  и, следовательно, частоту выходов за границы при исправном процессе.

Для вероятностного анализа и расчёта ARL удобнее работать не с самой статистикой  $S_{(W,h)}$ , а с её квадратичной формой, аппроксимируемой хи-квадрат-распределением. Ранее была введена аппроксимирующая статистика

$$Y = \frac{(n-1)S_{(W,h)}^2}{c_{h,n} \sigma^2} \sim \chi_{\nu_h}^2,$$

где  $\nu_h$  – эффективное число степеней свободы, а  $c_{h,n}$  – нормирующий множитель, учитывающий моменты винзоризованной оценки.

Если контрольные границы в пространстве  $S$  заданы как  $L_{CL}, U_{CL}$ , то соответствующие границы в пространстве  $Y$  при  $\varepsilon = 1$  (то есть  $\sigma = \sigma_0$ ) имеют вид

$$t_1 = \frac{(n-1)L_{CL}^2}{c_{h,n} \sigma_0^2}, t_2 = \frac{(n-1)U_{CL}^2}{c_{h,n} \sigma_0^2}.$$

В нормированном случае  $\sigma_0 = 1$  это просто

$$t_1 = (n-1)L_{CL}^2, t_2 = (n-1)U_{CL}^2$$

При изменении вариабельности  $\sigma = \varepsilon\sigma_0$  в определении статистики  $Y$  возникает множитель  $\varepsilon^{-2}$ . Соответственно, правило «попадание в зону контроля» в терминах  $Y$  записывается как

$$t_1 < Y\varepsilon^{-2} < t_2,$$

а вероятность попадания в зону контроля выражается через функцию распределения  $\chi_{v_h}^2$ :

$$P_{in}(\varepsilon) = \mathbb{P}\{t_1 < Y\varepsilon^{-2} < t_2\} = F_{\chi_{v_h}^2}\left(\frac{t_2}{\varepsilon^2}\right) - F_{\chi_{v_h}^2}\left(\frac{t_1}{\varepsilon^2}\right).$$

Такое преобразование позволяет напрямую использовать табулированные или программно-реализованные функции распределения  $\chi^2$  при расчёте вероятностей сигналов и средних длин серий для различных уровней изменения дисперсии  $\varepsilon$ .

Параметр  $k$  в конструкции контрольной карты на основе винзоризованной дисперсии играет роль аналога «числа сигм» для классических карт Шухарта. В простейшем случае без винзоризации ( $h = 0$ ) и при нормальном распределении статистика  $S$  связана с  $\chi_{n-1}^2$ , и выбор  $k \approx 3$  в формуле

$$L_{CL} = \mathbb{E}[S] - k\sqrt{\text{Var}(S)}, U_{CL} = \mathbb{E}[S] + k\sqrt{\text{Var}(S)}$$

приводит к классической « $3\sigma$ »-картине с  $ARL_0 \approx 370$ .

В случае винзоризованной оценки  $S_{(W,h)}$  ситуация несколько сложнее, так как математическое ожидание и дисперсия зависят от  $h$  через коэффициенты  $c_{4,h,n}, c_{5,h,n}$ , эффективное число степеней свободы  $v_h$  отличается от  $n - 1$ , форма хвостов распределения несколько изменена.

Поэтому « $k = 3$ » уже не гарантирует классический уровень  $ARL_0$ . Наоборот, именно  $k$  становится настраиваемым параметром, который необходимо подбирать либо по целевому уровню ложных тревог  $ARL_0^{\text{target}}$  (например, 250, 370, 500), либо в рамках оптимизационной задачи по минимизации  $ARL_1(k, \varepsilon^*)$  при ограничении  $ARL_0(k) \geq ARL_0^{\text{target}}$ .

Связь с классической  $3\sigma$ -картой в этой постановке двоякая. При  $h = 0$  и нормальном процессе выбор  $k \approx 3$  восстанавливает стандартную  $S$ -карту. При  $h > 0$  оптимальный  $k_{opt}$ , как правило, оказывается выше классического значения (то есть границы несколько расширяются), что компенсирует меньшую дисперсию робастной оценки и позволяет сохранить заданный  $ARL_0$ .

Таким образом, параметр  $k$  в карте на основе винзоризованной дисперсии выступает как регулируемый «рычаг» баланса между частотой ложных тревог и скоростью обнаружения роста вариабельности, а его связь с классической  $3\sigma$ -картой определяется через целевое значение  $ARL_0$ , а не напрямую через величину «3 стандартных отклонения».

### 2.5.5. Вероятностный анализ попадания в зону контроля и оптимизация ширины контрольной зоны

Как показано ранее, для винзоризованной дисперсии  $S_{(W,h)}$  вводится аппроксимирующая статистика

$$Y = \frac{(n-1)S_{(W,h)}^2}{c_{h,n} \sigma^2} \sim \chi_{\nu_h}^2,$$

где  $\nu_h$  – эффективное число степеней свободы, а  $c_{h,n}$  – нормирующий множитель.

Контрольные границы в пространстве статистики  $S_{(W,h)}$  задаются как

$$L_{CL} = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] - k \sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})}, U_{CL} = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] + k \sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})},$$

а соответствующие границы для квадратичной формы (в нормированном случае  $\sigma_0 = 1$ ) имеют вид

$$t_1 = (n-1)L_{CL}^2, t_2 = (n-1)U_{CL}^2.$$

При изменении стандартного отклонения процесса  $\sigma = \varepsilon \sigma_0$  (мультипликативный сдвиг дисперсии) в определении  $Y$  появляется множитель  $\varepsilon^{-2}$ . Тогда событие «подгруппа попала в зону контроля по статистике  $S_{(W,h)}$ » эквивалентно двойному неравенству

$$t_1 < Y\varepsilon^{-2} < t_2.$$

Используя функцию распределения хи-квадрат-распределения с  $\nu_h$  степенями свободы, получаем выражение для вероятности нахождения в зоне контроля при заданном  $\varepsilon$ :

$$P_{in}(\varepsilon) = \mathbb{P}\{t_1 < Y\varepsilon^{-2} < t_2\} = F_{\chi_{\nu_h}^2}\left(\frac{t_2}{\varepsilon^2}\right) - F_{\chi_{\nu_h}^2}\left(\frac{t_1}{\varepsilon^2}\right),$$

где  $F_{\chi_{\nu_h}^2}(\cdot)$  – функция распределения  $\chi_{\nu_h}^2$ .

При  $\varepsilon = 1$  это выражение даёт вероятность нахождения в зоне контроля для исправного процесса, а при  $\varepsilon > 1$  – вероятность «пропуска» роста дисперсии в одной подгруппе.

Вероятность сигнала (выхода за контрольные границы) при фиксированном уровне изменчивости  $\varepsilon$  определяется как дополнение к единице:

$$P_{out}(\varepsilon) = 1 - P_{in}(\varepsilon).$$

Так как для каждой подгруппы проводится независимая проверка по правилу «есть сигнал, если  $S_{(W,h)} \notin [L_{CL}, U_{CL}]$ », последовательность экспериментов по подгруппам может рассматриваться как бернуlliевская схема с вероятностью «успеха»  $P_{out}(\varepsilon)$ . Тогда число подгрупп до первого сигнала имеет геометрическое распределение, а средняя длина серии равна

$$ARL(\varepsilon) = \frac{1}{P_{out}(\varepsilon)}.$$

Два частных случая имеют особое значение:  $ARL_0$  – средняя длина серии при «чистом» процессе, то есть при  $\varepsilon = 1$ :

$$ARL_0(k) = ARL(\varepsilon = 1) = \frac{1}{P_{\text{out}}(1)},$$

и именно через эту величину задаётся уровень ложных тревог.

$ARL_1$  – средняя длина серии при заданном сдвиге дисперсии  $\varepsilon^* > 1$ :

$$ARL_1(k, \varepsilon^*) = ARL(\varepsilon^*) = \frac{1}{P_{\text{out}}(\varepsilon^*)},$$

которая служит показателем скорости обнаружения заданного ухудшения изменчивости процесса.

Таким образом, функция  $ARL(\varepsilon)$  полностью определяет эксплуатационные характеристики S-карты на основе винзоризованной дисперсии и используется в качестве основного инструмента для настройки и сравнения разных вариантов параметра  $k$ .

С точки зрения управления процессом важен не абстрактный «усреднённый» уровень чувствительности карты, а скорость обнаружения тех сдвигов дисперсии, которые являются технологически критичными. Поэтому в методике вводится критический сдвиг  $\varepsilon^* > 1$ , выбираемый технологом или инженером-по-качеству.

Типичными значениями могут быть, например,  $\varepsilon^* = 1,10$  (повышение  $\sigma$  на 10 %),  $\varepsilon^* = 1,25$  (рост на 25 %) или  $\varepsilon^* = 2$  (двукратный рост дисперсии) – в зависимости от того, какой уровень деградации процесса считается недопустимым и должен быть обнаружен максимально быстро.

Оптимизационная задача формулируется следующим образом. Необходимо выбрать параметр  $k$ , минимизирующий среднюю длину серии при критическом сдвиге, при этом обеспечив соблюдение целевого уровня надёжности процесса (редкость ложных тревог):

$$k_{\text{opt}} = \arg \min_k \{ARL_1(k, \varepsilon^*)\} \text{ при условии } ARL_0(k) \geq ARL_{0,\text{target}}.$$

Здесь  $ARL_{0,\text{target}}$  – заданное целевое значение  $ARL_0$ , выбираемое исходя из регламента контроля (например, 250, 370, 500 и т.п.). Ограничение  $ARL_0(k) \geq ARL_{0,\text{target}}$  означает, что частота ложных тревог не должна превышать установленный нормами уровень: карта может быть более «строгой» (больший  $ARL_0$ ), но не «мягче» заданного порога.

Таким образом, параметр  $k$  настраивается так, чтобы при допустимой частоте ложных тревог минимизировать задержку обнаружения наиболее важного сдвига  $\varepsilon^*$ .

Решение оптимизационной задачи в явном виде затруднительно из-за нелинейного характера зависимостей  $P_{\text{in}}(\varepsilon)$  и  $ARL(\varepsilon)$  от параметра  $k$ . Поэтому используется численный поиск  $k_{\text{opt}}$  на дискретной сетке. Алгоритм включает следующие этапы.

1. Инициализация. Задаются объём подгруппы  $n$  и параметр винзоризации  $h$ ; целевое значение  $ARL_{0,\text{target}}$ ; критический сдвиг  $\varepsilon^*$ ; шаг и диапазон по  $k$ (например,  $k \in [2; 5]$  с шагом 0,05).

2. Предварительные вычисления. По заданным  $n$  и  $h$  вычисляются коэффициенты  $c_{4,h,n}$ ,  $c_{5,h,n}$ ; математическое ожидание и дисперсия  $S_{(W,h)}$ ; нормирующий множитель  $c_{h,n}$ ; эффективное число степеней свободы  $v_h$ . Эти величины фиксируются и используются при вычислении  $P_{\text{in}}(\varepsilon)$  и  $ARL(\varepsilon)$  для разных  $k$ .

3. Перебор по сетке  $k$ . Для каждого значения  $k$  на сетке выполняются следующие шаги.

a. Расчёт границ в метрике  $S$ :

$$b. L_{CL}(k) = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] - k\sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})}, U_{CL}(k) = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] + k\sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})}.$$

c. Преобразование в границы по  $Y$ :

$$d. t_1(k) = (n-1)L_{CL}^2(k), t_2(k) = (n-1)U_{CL}^2(k).$$

e. Вычисление

$$ARL_0(k):$$

по формулам §2.5.5.1–2.5.5.2 при  $\varepsilon = 1$  определяется

$$f. P_{\text{in}}(1;k), P_{\text{out}}(1;k) = 1 - P_{\text{in}}(1;k), ARL_0(k) = \frac{1}{P_{\text{out}}(1;k)}.$$

g. Фильтрация по ограничению  $ARL_0$ :

значения  $k$ , для которых  $ARL_0(k) < ARL_{0,\text{target}}$ , отбрасываются как нарушающие регламент по ложным тревогам.

h. Вычисление

$$ARL_1(k, \varepsilon^*):$$

для оставшихся  $k$  по тем же формулам при  $\varepsilon = \varepsilon^*$  рассчитывается

$$ARL_1(k, \varepsilon^*) = \frac{1}{P_{\text{out}}(\varepsilon^*; k)}.$$

4. Выбор оптимального значения. Из множества допустимых значений  $k$ , удовлетворяющих условию  $ARL_0(k) \geq ARL_{0,\text{target}}$ , выбирается  $k_{\text{opt}} = \arg \min_k ARL_1(k, \varepsilon^*)$ .

Результатом алгоритма являются оптимальный параметр  $k_{\text{opt}}$ ; соответствующие значения  $ARL_0(k_{\text{opt}})$  и  $ARL_1(k_{\text{opt}}, \varepsilon^*)$ ; контрольные границы  $L_{CL}, U_{CL}$  для винзоризованной S-карты.

На практике данный алгоритм реализуется в виде программного модуля, что позволяет строить таблицы оптимальных настроек для типовых значений  $n, h, ARL_{0,\text{target}}$  и диапазона сдвигов  $\varepsilon$ . Эти таблицы затем используются инженером-практиком для быстрого выбора параметров  $k$  без повторного проведения сложных расчётов и моделирования.

### 2.5.6. Количественная оценка выигрыша винзорированной S-карты при «грязной нормали»

Для воспроизведения реальных условий шлифовальных операций, где основная масса наблюдений подчиняется нормальному закону, но периодически возникают крупные отклонения, используется модель загрязнённого нормального распределения.

Пусть базовый процесс имеет распределение

$$X \sim N(0, \sigma^2),$$

со стандартным отклонением  $\sigma$ , зависящим от множителя  $\varepsilon$ :  $\sigma = \varepsilon\sigma_0$ ,  $\sigma_0 = 1$ . Тогда модель «грязной нормали» записывается в виде смеси

$$X \sim (1 - \alpha) N(0, \sigma^2) + \alpha F_{\text{out}},$$

где  $0 < \alpha \ll 1$  – доля выбросов, а распределение  $F_{\text{out}}$  описывает редкие наблюдения с существенно более высокой дисперсией, например, сосредоточенные в окрестности  $\pm \tau\sigma$  при  $\tau \gg 1$ .

В численных экспериментах использовалась конфигурация, согласованная с анализом карты средних: объём подгруппы  $n = 20$ , доля «грязи» порядка  $\alpha = 0,10$ , уровень выбросов  $\tau = 6,0$ , винзоризация с долей отсечения  $\alpha_w = 0,20$ . Такая модель соответствует реальной ситуации, когда около 10 % наблюдений являются аномальными (единичные дефекты поверхности, скачки усилия, промахи измерений), в то время как остальные 90 % отражают основной режим работы процесса с возможным увеличением изменчивости  $\varepsilon$ .

На этой модели сравниваются две схемы контроля изменчивости: классическая S-карта на основе выборочного стандартного отклонения  $S$ ; robustная  $S_w$ -карта на основе винзоризованной дисперсии  $S_{(W,h)}$ .

Корректное сравнение эффективности карт возможно только при одинаковой «строгости» регламента по ложным тревогам. Поэтому обе схемы контроля изменчивости настраиваются на один и тот же номинальный уровень средней длины серии при отсутствии сдвига дисперсии ( $\varepsilon = 1$ )  $ARL_0 \approx 500$ .

Для классической S-карты параметр множителя границ (аналог «числа сигм») подбирается так, чтобы при «чистой» нормали выполнялось  $ARL_S(\varepsilon = 1) \approx 525$ .

Для винзоризованной  $S_w$ -карты, использующей статистику  $S_{(W,h)}$  с фиксированными  $pi$  и  $h$ , параметр  $k$  выбирается из условия  $ARL_{S_w}(\varepsilon = 1) \approx 500$ .

Таким образом,  $ARL_S$  и  $ARL_{S_w}$  при  $\varepsilon = 1$  оказываются близки (порядка 525 и 500 соответственно), то есть обе карты относят к одному классу по частоте ложных тревог.

В дальнейшем все различия в  $ARL(\varepsilon)$  при  $\varepsilon > 1$  следует интерпретировать именно как эффект различия оценок дисперсии (обычной и винзоризованной) в условиях загрязнённого распределения.

Для количественного сравнения скорости обнаружения роста дисперсии вводится показатель относительного выигрыша винзоризованной карты по средней длине серии:

$$\text{gain}(\varepsilon) = \frac{ARL_S(\varepsilon) - ARL_{Sw}(\varepsilon)}{ARL_S(\varepsilon)} \cdot 100\%,$$

где  $ARL_S(\varepsilon)$  – средняя длина серии классической S-карты при данном уровне  $\varepsilon$ , а  $ARL_{Sw}(\varepsilon)$  – соответствующее значение для карты на основе винзоризованной дисперсии. Положительное значение  $\text{gain}(\varepsilon)$  означает преимущество  $S_w$ -карты (меньший  $ARL$ , более быстрое обнаружение).

Результаты моделирования представлены на диаграмме ниже.

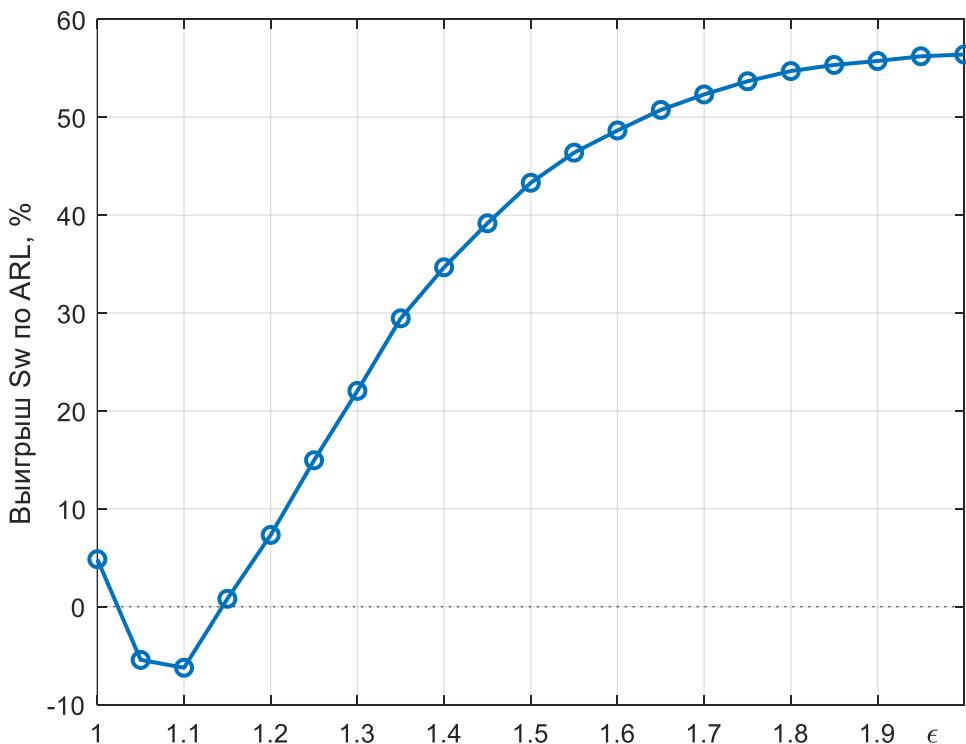


Рисунок 3 – Выигрыш карты винзоризованной дисперсии против S-карты Шухарта на «грязных» данных:  $n=20$ ,  $ARL_0=500$ ,  $\alpha=0.20$ ,  $\varepsilon=0.10$ ,  $\tau=6.0$

Область очень малых сдвигов  $\varepsilon = 1,05–1,10$ . В этой зоне винзоризованная карта немного уступает классической: при  $\varepsilon = 1,05$ :  $ARL_S \approx 285,7$ ,  $ARL_{Sw} \approx 301,2$ , выигрыш отрицателен и составляет порядка  $-5,4\%$ ; при  $\varepsilon = 1,10$ :  $ARL_S \approx 170,4$ ,  $ARL_{Sw} \approx 181,1$ , проигрыш порядка  $-6,2\%$ .

Это отражает «цену робастности»: отсечение хвостов уменьшает чувствительность к совсем небольшому росту  $\sigma$ , пока влияние выбросов ещё не доминирует.

Переходная область  $\varepsilon \approx 1,15$ . При  $\varepsilon = 1,15$  обе карты становятся сопоставимыми:

$$ARL_S \approx 109,6; ARL_{Sw} \approx 108,7,$$

и величина выигрыша близка к нулю. Начиная с этого уровня рост дисперсии уже достаточно велик, чтобы эффект подавления выбросов начал компенсировать потерю чувствительности к совсем малым сдвигам.

Область умеренных сдвигов  $\varepsilon \approx 1,20\text{--}1,35$ . Здесь преимущество винзоризованной карты быстро возрастает:

- при  $\varepsilon = 1,20$ :  $ARL_S \approx 73,6, ARL_{Sw} \approx 68,2$ , выигрыш около 7,3%;
- при  $\varepsilon = 1,25$ :  $ARL_S \approx 51,8, ARL_{Sw} \approx 44,0$ , выигрыш порядка 15%;
- при  $\varepsilon = 1,30$ :  $ARL_S \approx 38,1, ARL_{Sw} \approx 29,7$ , выигрыш более 22%;
- при  $\varepsilon = 1,35$ :  $ARL_S \approx 29,4, ARL_{Sw} \approx 20,7$ , выигрыш почти 30%.

Именно этот диапазон характерен для реальных задач шлифования, где ухудшение состояния круга, подачи или охлаждения приводит к росту дисперсии на 20–35 %, но не обязательно сопровождается немедленным выходом параметров за допуск.

Область крупных сдвигов  $\varepsilon \geq 1,4$ . При дальнейшем росте  $\varepsilon$  преимущество  $S_w$ -карты становится более выраженным:

- при  $\varepsilon = 1,5$ :  $ARL_S \approx 15,3, ARL_{Sw} \approx 8,7$ , выигрыш более 43%;
- при  $\varepsilon = 1,6$ :  $ARL_S \approx 10,9, ARL_{Sw} \approx 5,6$ , выигрыш около 49%;
- при  $\varepsilon = 1,8$ :  $ARL_S \approx 6,6, ARL_{Sw} \approx 3,0$ ;
- при  $\varepsilon = 2,0$ :  $ARL_S \approx 4,63, ARL_{Sw} \approx 2,02$ , что эквивалентно относительному сокращению средней длины серии примерно на 56%.

Иными словами, в зоне заметного роста дисперсии  $S_w$ -карта обнаруживает рост изменчивости процесса примерно в два раза быстрее классической  $S$ -карты, настроенной на тот же уровень  $ARL_0$ .

С точки зрения практики контроля прецизионного шлифования полученные результаты отражают типичную ситуацию: основной режим обработки даёт стабильно распределённые значения шероховатости и размеров; редкие, но существенные выбросы возникают из-за локальных дефектов абразива, кратковременных нарушений подачи, эпизодических сбоев измерительной системы и др.

Классическая  $S$ -карта в этой ситуации испытывает «размывание» статистики: выбросы одновременно увеличивают оценки  $\sigma$ , повышают вариабельность самой статистики  $S$ , что

приводит к завышенным значениям  $ARL_1$  и, как следствие, к запаздыванию сигнала при реальном росте изменчивости.

Винзоризованная дисперсия  $S_{(W,h)}$  за счёт отсечения крайних 10–20 % наблюдений по хвостам существенно ограничивает вклад самых экстремальных значений. В результате оценка изменчивости определяется преимущественно центральной частью распределения, связанной с «типичным» режимом процесса; влияние редких выбросов на положение и разброс статистики ослаблено; систематический рост  $\varepsilon$  проявляется в  $S_{(W,h)}$  быстрее и более однозначно.

Практически это означает, что сокращение среднего числа партий до обнаружения расстройства процесса в 1,3–2 раза при  $\varepsilon \geq 1,25$ ; снижение доли скрытого разброса по точности и шероховатости, который успевает уйти к потребителю до срабатывания карты; создание предпосылок для роста индексов способности процесса по вариабельности (например,  $C_p$ ,  $C_{pk}$  по  $\sigma$ ) за счёт уменьшения времени пребывания процесса в состоянии повышенной дисперсии.

При этом частота ложных тревог остаётся на том же уровне, что и у классической S-карты, поскольку  $k$  для S<sub>w</sub>-карты был откалиброван по  $ARL_0$ . Таким образом, внедрение винзоризованной S-карты не требует от персонала привыкания к «избыточному» количеству сигналов, а улучшения носят характер именно повышения информативности и оперативности контроля изменчивости.

С учётом того, что переход от классической к винзоризованной карте сводится к изменению статистики разброса и множителя  $k$ , без изменения общего формата карты и регламентов действий, такой подход представляется практически реализуемым инструментом повышения эффективности контроля изменчивости в шлифовальных и других высокоточных операциях, подверженных «грязной нормали».

#### 2.5.7. Таблицы оптимальных настроек и пример применения метода

Для практического применения разработанного метода были построены табличные зависимости оптимальных параметров винзоризованной S-карты для набора объёмов подгруппы  $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$  при фиксированном параметре винзоризации  $h = 1$ .

Таблица 5 – Значения оптимальных параметров винзоризованной S-карт

$ARL_0^{\text{target}}$	$k_{opt}$	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.4	2.8	3
n=6									
100	3.06	10.47	3.39	1.9	1.41	1.2	1.06	1.02	1.01
250	3.36	18.36	4.75	2.33	1.59	1.29	1.08	1.03	1.02
500	3.56	27.68	6.1	2.72	1.75	1.37	1.11	1.04	1.02

$\text{ARL}_0^{\text{target}}$	$k_{opt}$	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.4	2.8	3
750	3.66	34.36	6.97	2.95	1.84	1.41	1.12	1.04	1.02
1000	3.74	41.06	7.78	3.16	1.92	1.45	1.13	1.04	1.03
n=7									
100	3.12	9.3	2.94	1.69	1.29	1.13	1.03	1.01	1
250	3.4	15.62	3.96	1.99	1.41	1.19	1.04	1.01	1.01
500	3.6	23.47	5.02	2.29	1.53	1.24	1.06	1.02	1.01
750	3.7	29.09	5.7	2.47	1.6	1.27	1.07	1.02	1.01
1000	3.78	34.73	6.34	2.63	1.66	1.3	1.07	1.02	1.01
n=8									
100	3.2	8.25	2.58	1.52	1.2	1.08	1.01	1	1
250	3.48	13.73	3.41	1.76	1.29	1.12	1.02	1	1
500	3.66	19.68	4.17	1.96	1.37	1.15	1.03	1.01	1
750	3.78	25.37	4.82	2.13	1.43	1.18	1.04	1.01	1
1000	3.86	30.24	5.33	2.25	1.47	1.2	1.04	1.01	1
n=9									
100	3.28	7.19	2.27	1.39	1.13	1.05	1.01	1	1
250	3.56	11.79	2.93	1.57	1.2	1.08	1.01	1	1
500	3.76	17.44	3.62	1.75	1.27	1.1	1.02	1	1
750	3.86	21.46	4.05	1.86	1.3	1.12	1.02	1	1
1000	3.94	25.49	4.45	1.95	1.34	1.13	1.02	1	1
n=10									
100	3.4	6.63	2.08	1.3	1.09	1.03	1	1	1
250	3.66	10.39	2.59	1.44	1.14	1.05	1.01	1	1
500	3.86	15.22	3.14	1.58	1.19	1.06	1.01	1	1
750	3.96	18.64	3.5	1.66	1.22	1.07	1.01	1	1
1000	4.04	22.06	3.82	1.74	1.24	1.08	1.01	1	1
n=11									
100	3.5	5.9	1.88	1.23	1.06	1.02	1	1	1
250	3.78	9.43	2.34	1.34	1.1	1.03	1	1	1
500	3.96	13.19	2.75	1.44	1.13	1.04	1	1	1
750	4.08	16.73	3.1	1.53	1.16	1.05	1	1	1
1000	4.16	19.73	3.37	1.59	1.18	1.05	1.01	1	1

$ARL_0^{\text{target}}$	$k_{\text{opt}}$	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.4	2.8	3
n=12									
100	3.62	5.42	1.74	1.17	1.04	1.01	1	1	1
250	3.9	8.55	2.13	1.27	1.07	1.02	1	1	1
500	4.08	11.85	2.48	1.35	1.09	1.02	1	1	1
750	4.2	14.95	2.77	1.41	1.11	1.03	1	1	1
1000	4.26	16.87	2.93	1.45	1.12	1.03	1	1	1

Каждая таблица организована следующим образом. В первом столбце указано целевое значение  $ARL_{0,\text{target}}$ , то есть требуемая средняя длина серии при «чистом» процессе ( $\varepsilon = 1$ ). В качестве типовых выбраны уровни  $ARL_{0,\text{target}} = 100, 250, 500, 750, 1000$ . Во втором столбце приведено соответствующее оптимальное значение параметра  $k_{\text{opt}}$ , полученное по процедуре раздела 2.5.5: это минимальное значение  $k$ , обеспечивающее заданный  $ARL_0$  и одновременно минимизирующее  $ARL_1$  при выбранном наборе сдвигов  $\varepsilon$ . Далее по строке следуют значения  $ARL_1(\varepsilon)$  для различных уровней увеличения дисперсии:  $\varepsilon \in \{1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,4; 2,8; 3,0\}$ . Каждое число в строке – это ожидаемая длина серии  $ARL_1$  при соответствующем уровне  $\varepsilon$  при использовании найденного  $k_{\text{opt}}$ .

Таблица имеет блочную структуру: для каждого  $n$  приводится отдельный блок из пяти строк (по числу целевых уровней  $ARL_{0,\text{target}}$ ). Например, для  $n = 9$  и  $ARL_{0,\text{target}} = 500$  строка имеет вид (сокращённо):

$$ARL_{0,\text{target}} = 500, k_{\text{opt}} = 3,76, ARL_1(1,2) = 17,44$$

$$ARL_1(1,4) = 3,62$$

Таким образом, каждая таблица является компактным «паспортом настроек» для винзоризованной S-карты при фиксированных  $n$  и  $h$ , позволяющим без дополнительных расчётов получить как параметр  $k_{\text{opt}}$ , так и ожидаемые значения  $ARL_1$  при интересующих уровнях увеличения дисперсии.

Порядок использования таблиц состоит из следующей последовательностью шагов.

1. Выбор объёма подгруппы  $n$ . Значение определяется действующим регламентом контроля или технологическими ограничениями (например, размер партии, частота измерений).

2. Фиксация параметра винзоризации  $h$ . В рассматриваемых таблицах предполагается  $h = 1$ , то есть винзоризация по одному наблюдению с каждого хвоста. Это обеспечивает умеренную робастность при сохранении высокой чувствительности.

3. Выбор целевого уровня  $ARL_{0,\text{target}}$ . Исходя из допустимой частоты ложных сигналов и нагрузки на персонал выбирается требуемый уровень  $ARL_0$ (например, 250, 500 или 1000).

4. Чтение из таблицы оптимального параметра  $k_{\text{opt}}$ . В блоке для выбранных  $n$ ,  $h$  и  $ARL_{0,\text{target}}$  считывается значение  $k_{\text{opt}}$ . Это число используется при построении контрольных границ винзоризованной карты:

$$L_{CL} = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] - k_{\text{opt}} \sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})}, U_{CL} = \mathbb{E}[S_{(W,h)}] + k_{\text{opt}} \sqrt{\text{Var}(S_{(W,h)})}.$$

5. Оценка оперативности карты по  $ARL_1(\varepsilon)$ . По остальным столбцам строки инженер может сразу увидеть ожидаемую скорость обнаружения различных уровней увеличения дисперсии ( $\varepsilon = 1,2; 1,4; \dots ; 3,0$ ). Это позволяет проверить, удовлетворяет ли карта требованиям по времени реакции на характерные для процесса сдвиги  $\varepsilon^*$ .

Если при выбранном  $ARL_{0,\text{target}}$  карта оказывается слишком «медленной» для интересующего сдвига  $\varepsilon^*$ , возможна корректировка: либо переход к более строгому уровню (меньший  $ARL_{0,\text{target}}$ ), либо изменение схемы контроля (например, уменьшение  $h$  или изменение режима отбора подгрупп).

Рассмотрим конкретный пример настройки винзоризованной S-карты для следующих параметров: объём подгруппы:  $n = 9$ ; число отсечённых наблюдений:  $h = 1$ ; целевой уровень:  $ARL_{0,\text{target}} = 550$ ; критический сдвиг дисперсии:  $\varepsilon^* = 2$ (двукратный рост  $\sigma$ ).

В результате численных расчётов получена следующая зависимость  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon^*)$  от параметра  $k$ .

Таблица 6 – Значения  $ARL_0(k)$  и  $ARL_1(k, \varepsilon^*)$  при различных значениях параметра  $k$

$k$	$ARL_0(k)$	$ARL_1(k, 2)$
2,80	430	7,02
3,00	505	6,48
3,20	550	6,02
3,40	610	6,07

Из этой таблицы видно, что при  $k = 2,80$  достигнуть  $ARL_0 = 550$  не удаётся (значение 430 ниже целевого уровня) – карта слишком «строгая», даёт чрезмерно частые ложные сигналы; при  $k = 3,00$   $ARL_0$  уже близко к целевому, но всё ещё ниже (505); при  $k = 3,20$   $ARL_0(k) \approx 550$ , то есть условие  $ARL_0(k) \geq ARL_{0,\text{target}}$  выполняется ровно на границе; при  $k = 3,40$   $ARL_0$  ещё больше (610), но при этом  $ARL_1(k, 2)$  начинает увеличиваться (6,07 вместо 6,02). Следовательно, оптимальным выбором является  $k_{\text{opt}} = 3,20$ , так как при этом соблюдается регламент по ложным тревогам:  $ARL_0(k_{\text{opt}}) \approx 550$ ; достигается минимальное значение  $ARL_1(k, \varepsilon^*)$  среди допустимых вариантов:  $ARL_1(3,20, 2) \approx 6,0$ .

На практике это означает, что при двукратном увеличении дисперсии процесса ( $\varepsilon^* = 2$ ) винзоризованная S-карта с параметрами  $n = 9$ ,  $h = 1$ ,  $k_{\text{opt}} = 3,20$  в среднем подаст сигнал примерно через шесть подгрупп, при том, что при нормальном процессе сигнал возникает в среднем раз в 550 подгрупп. Таким образом, обеспечивается высокая устойчивость к ложным тревогам и одновременно достаточно быстрая реакция на серьёзный рост изменчивости.

Таким образом, использование винзоризованной дисперсии в качестве статистики контрольной карты позволяет сохранить привычную для практиков структуру S-карты (подгруппы фиксированного объёма, верхняя и нижняя границы, интерпретация по выходу за пределы), но при этом обеспечить повышенную устойчивость к выбросам, характерным для «грязной нормали».

Предварительный расчёт таблиц оптимальных настроек ( $k_{\text{opt}}, ARL_1(\varepsilon)$ ) для типовых комбинаций параметров ( $n, h, ARL_{0,\text{target}}$ ) существенно снижает порог внедрения метода потому, что инженер-практик может выбрать параметры карты, не обращаясь к сложным программным пакетам или моделированию. Сравнение различных схем контроля сводится к сопоставлению табличных значений  $ARL_1(\varepsilon)$  при интересующих уровнях сдвига.

Оптимальный коэффициент  $k_{\text{opt}}$  для винзоризованной карты обычно несколько выше, чем для классической S-карты. Это компенсирует уменьшенную дисперсию робастной оценки и позволяет сохранить заданный уровень  $ARL_0$ , одновременно обеспечивая более короткие значения  $ARL_1$  при наличии крупных выбросов и реального увеличения  $\sigma$ .

Наконец, предложенный подход особенно перспективен для процессов, где возможно появление аномальных значений (дефекты поверхности, скачки усилия, сбои измерений); требуется контролировать изменчивость с заданной чувствительностью к определённым уровням роста дисперсии  $\varepsilon^*$ ; важно избежать лавинообразного роста ложных тревог при внедрении более чувствительных методов.

В этих условиях винзоризованная S-карта, параметризуемая по таблицам оптимальных настроек, даёт возможность реализовать более надёжный и предсказуемый контроль изменчивости без существенного усложнения регламентов и программного обеспечения.

## **2.6. Разработка научно-практического статистического инструментария управления качеством для карт кумулятивных сумм**

Современная система статистического управления процессами всё чаще опирается на карты кумулятивных сумм, которые превосходят классические карты Шухарта по чувствительности к малым систематическим сдвигам среднего процесса. Однако практическое внедрение CUSUM-контроля по-прежнему осложняется отсутствием в действующих стандартах достаточно полных справочных материалов: инженер-технолог вынужден самостоятельно

рассчитывать порог  $h$ , фактор смещения  $k$  и ожидаемую длину серии или искать разрозненные данные в литературе. Настоящая глава ликвидирует этот разрыв, формируя законченный набор методических средств в виде таблиц, номограммы и оценки разброса ARL – проверенных как аналитически, так и имитационно.

Цель раздела является разработка и экспериментально подтвердить комплект материалов, позволяющий инженеру-практику быстро находить требуемый порог  $h$  по заданным  $k$  и целевому ARL, оценивать реакцию схемы на реальные сдвиги процесса, включая не только математическое ожидание, но и дисперсию длины серии для надёжной настройки CUSUM без трудоёмких вычислений.

Роль параметров CUSUM-схемы ARL,  $k$  и  $h$ . ARL определяет надёжность обнаружения:  $ARL_0$  отражает среднюю длину «спокойных» серий при статистически управляемом процессе, а  $ARL_1(\delta)$  – быстроту сигнала при сдвиге  $\delta$ . Отсекатель  $k$  задаёт чувствительность к величине сдвига. Типичный выбор  $k \approx \delta/2$ .  $h$  (уровень принятия решения) балансирует частоту ложных и пропущенных срабатываний; именно он чаще всего подбирается под заданный  $ARL_0$ . Точная и оперативная настройка пары  $(k, h)$  критична потому, что завышенный  $h$  увеличит вероятность недетектированных дефектов, а заниженный приведёт к избыточным остановкам процесса и росту затрат.

### 2.6.1 Методология расчёта ARL

В данном разделе представлена комплексная методология расчёта среднего времени до ложного сигнала (ARL), включающая три взаимосвязанных подхода: интерпретация CUSUM как случайного блуждания; вычисление ARL с использованием поглощающих Марковских цепей; верификация результатов методом Монте-Карло.

Модель CUSUM как случайное блуждание. Математическая формулировка модели такова. Рассмотрим поток независимых наблюдений  $\{X_t\}$  с номинальным уровнем процесса  $\mu_0$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . Для стандартизованных данных  $Z_t = \frac{X_t - \mu_0}{\sigma}$  односторонняя схема CUSUM определяется рекуррентным соотношением:

$$S_t^+ = \max(0, S_{t-1}^+ + Z_t - k), \quad S_0^+ = 0,$$

где  $k > 0$  – параметр, фильтрующий малые отклонения. Сигнал о сдвиге формируется при достижении условия  $S_t^+ \geq h$ .

Для двустороннего контроля используется двусторонняя схема, при которой одновременно рассматриваются статистики  $S_t^+$  и  $S_t^-$ . Сигнал генерируется при превышении порога любым из показателей.

Расчёт ARL с помощью Марковских цепей использует дискретизацию пространства состояний. Учитывая непрерывность значений  $S_t^+$  (и  $S_t^-$ ), вводится равномерная сетка:

$$\{s_i = i \cdot \Delta s\}, \quad i = 0, \dots, m$$

на интервале  $[0, h]$ . Типичный шаг дискретизации  $\Delta s = 0,005\sigma$  обеспечивает оптимальный баланс между точностью и размерностью задачи (до  $m \approx 3000$ ).

Алгоритм расчёта основан на построение матрицы переходных вероятностей  $P$  для непоглощающих состояний. Это позволяет определить среднюю длину серии из начального состояния  $i$  через компоненты вектора:

$$g = (I - P)^{-1},$$

где  $I$  – столбец единиц. Значение ARL определяется для начального состояния  $i = 0$ .

Диапазоны варьирования параметров при вычислениях. Расчёты проводились для: параметра  $k \in [0,15; 2,00]$  с шагом  $\Delta k = 0,05$ ; порога  $h \in [0,30; 15,00]$ .

Отметим особенности реализации алгоритма. Динамический выбор шага  $\Delta s$  на основе критерия стабильности матрицы  $P$  и при больших значениях  $h$  применялась адаптивная «прореживание» сетки для предотвращения роста размерности задачи.

Для верификации результатов и подтверждения корректности полученных расчётов проводилась имитационная проверка методом Монте-Карло, обеспечивающая независимую оценку достоверности результатов.

Имитационная верификация основана на моделирование методом Монте-Карло. Сценарии имитационного эксперимента следующие. Для каждой пары параметров  $(k, h)$  генерировалось не менее  $10^6$  траекторий CUSUM-процесса. Рассматривались два основных случая: отсутствие сдвига (проверка  $ARL_0$ ) и наличие репрезентативных сдвигов  $\delta = 0,5\sigma; 1,0\sigma; 1,5\sigma$  (проверка  $ARL_1$ ).

Моделирование при больших  $h$  проводилось следующим образом. При значениях целевого  $ARL_0 > 10^5$  применялся метод важности выборки: искусственное увеличение сдвига до значения  $k$ , введение весовых коэффициентов для корзин и снижение дисперсии оценок в 100–200 раз.

Для оценки точности результатов использована метрика погрешности в виде относительной ошибки, оцениваемой по формуле:

$$\varepsilon = \frac{|ARL_{MC} - ARL_{\text{Марков}}|}{ARL_{\text{Марков}}} \cdot 100\%$$

где

$ARL_{\text{Марков}}$  – средняя длина серии на основе цепей Маркова,

$ARL_{MC}$  средняя длина серии по методу Монте-Карло.

Получены следующие результаты верификации. По качеству согласования - для всех исследованных пар  $(k, h)$  достигнута погрешность  $\varepsilon \leq 1\%$ . Это подтверждена корректность табличных значений ARL. Сочетание Марковского и имитационного подходов обеспечивает высокую достоверность расчётных значений ARL, надежную основу для разработки инженерных инструментов и возможность корректной практической интерпретации результатов. Практическая значимость состоит в том, что разработанная методология верификации позволяет контролировать качество табличных значений, оценивать точность инженерных расчётов и обеспечивать надёжность практического применения разработанных инструментов.

### 2.6.2 Табличные значения $ARL_0$ как функция параметров $k$ и $h$

Приведем математическую формулировку задачи. Для одностороннего CUSUM-графика с параметрами  $k > 0$  и  $h > 0$  длина пробега при отсутствии сдвига определяется как математическое ожидание:

$$ARL_0(k, h) = \mathbb{E}[\tau(k, h)],$$

где  $\tau = \min\{n \geq 1: S_n > h\}$  и  $S_n = \max(0, S_{n-1} + X_n - k)$  при  $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Практическая задача заключается в том, чтобы при заданном целевом значении  $ARL_0$  (например, 500, 5000 или 10000) определить порог  $h$  для фиксированного  $k$  таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$ARL_0(k, h) = ARL_0.$$

Для решения задачи использована следующая методология расчёта. Учитывая строгую монотонность функции  $ARL_0(k, h)$  по  $h$ , задача сводится к: одномерному поиску корня; обратной интерполяции по предварительно рассчитанной сетке  $(k_i, h_j)$ .

Диапазоны варьирования. Параметр  $k \in [0,15; 2,00]$  с шагом  $\Delta k = 0,05$ . Порог  $h \in [0,30; 12,00]$  с шагом  $\Delta h = 0,10$ . Данная таблица представлена в Приложении Б.

Обоснование диапазонов обусловлено практической целесообразностью: значения  $k < 0,15$  приводят к избыточному дроблению уровней квантилей; при  $h > 12$  значения  $ARL_0 \gg 10^{20}$ , что редко требуется на практике. Численная устойчивость решения: при  $k < 0,15$  или  $h > 12$  матрица  $(I - R)$  становится плохо обусловленной; теряется точность вычислений (более четырёх значащих цифр).

Данные имеют табличное представление: строки по  $h$ , столбцы по  $k$ . Фрагмента таблицы представлен ниже.

Таблица 7 – Значения  $ARL_0(k, h)$  при сетке значений  $h$  и  $k$

$h$	$k$			
	0,15	0,20	...	2,00
0,30	3,21	2,76	...	1,02
0,55	5,87	4,72	...	1,04
...	...	...	...	...
14,75	$1,34 \cdot 10^{19}$	$8,91 \cdot 10^{16}$	...	6,5
15,00	$1,57 \cdot 10^{19}$	$1,05 \cdot 10^{17}$	...	6,7

Пример использования. Требуется определить порог  $h$  для  $k = 0,33$  при целевом  $ARL_0 = 1000$ : 1. По ближайшим значениям  $k = 0,30$  и  $k = 0,35$  выбираем ближайшие к 1000 значения: для  $k = 0,30$ :  $h = 2,75$ ; для  $k = 0,35$ :  $h = 3,00$ . 2. Выполняем линейную интерполяцию по  $k$ , получаем  $h \approx 2,85$ . 3. Уточняем значение одним пересчётом  $ARL_0(0,33,2,85)$ , получаем  $h = 2,83$  (погрешность менее 0,4%).

Интерпретация зависимостей  $ARL_0$  от параметров  $h$  и  $k$  на качественном уровне. Монотонность по порогу  $h$  подтверждается тем, что для любого фиксированного значения  $k$  наблюдается экспоненциальный рост функции  $ARL_0(h)$ . В логарифмических координатах наклон кривой практически не зависит от  $k$  при больших значениях  $h$ .

Чувствительность к параметру  $k$  описывается характером влияния параметра  $k$  в зависимости от величины порога  $h$ : при малых порогах ( $h < 2$ ): уменьшение  $k$  на 0,05 приводит к увеличению  $ARL_0$  в 1,5 – 2 раза, при больших порогах ( $h > 6$ ): относительное изменение  $ARL_0$  снижается до 5 – 8%.

Имеются следующие ограничения применимости. Численные ограничения: при  $k < 0,20$  и  $h > 8$ : значения  $ARL_0$  достигают порядка  $10^{17} – 10^{20}$ . Это требует применение расширенной арифметики.

Практические ограничения в том, что при  $k > 1,5$ : наблюдается вырождение графиков,  $ARL_0$  слабо реагирует на увеличение  $h$ . Такие значения  $k$  целесообразны только для детектирования значительных сдвигов ( $\delta > 1,5\sigma$ ).

Функциональное назначение таблицы в том, что она выполняет двойную роль: служит обратным справочником для подбора порога  $h$  и демонстрирует характер взаимного влияния параметров.

Алгоритм использования: 1. Определение требуемой устойчивости  $ARL_0$  2. Выбор оптимального  $k$ : с учётом ожидаемой величины сдвига, с позиции чувствительности к отклонению 3. Интерполяция соответствующего порога  $h$  по табличным данным.

Таким образом, разработанная система табличных значений  $ARL_0$  обеспечивает быстрый подбор параметров контроля, оценку влияния параметров на характеристики схемы, возможность оптимизации настроек под конкретные условия применения, надежную основу для практического использования CUSUM-схем.

### 2.6.3 Обратная задача: построение таблицы для определения порога $h$ по параметрам $k$ и заданному $ARL_0$

Актуальность разработки обусловлена практической необходимостью. В производственной практике инженеры первоначально фиксируют референсное значение  $k$  (обычно  $k \approx \frac{\delta}{2}$ ), задают требуемый уровень  $ARL_0$  (100, 370, 500, 1000 и т.д.) и затем ищут соответствующий порог  $h$ . Целью разработки является создание таблицы, обеспечивающей прямое отображение  $(k, ARL_0) \rightarrow h$ . Сетка дискретизации. Коэффициент усиления:  $k \in 0,15; 2,00$  с шагом  $\Delta k = 0,05$ . Целевой  $ARL_0$ :  $ARL_0 \in 100; 1000$  с шагом  $\Delta ARL_0 = 50$ . Данная таблица представлена в Приложении В. Точность интерполяции. Для промежуточных значений допустима билинейная интерполяция с погрешностью менее 1,5% при  $k \in 0,20; 1,50$ .

Таблица 8 – Значения уровня  $h$  при различных значениях параметров  $k$  и  $ARL_0$

$ARL_0$	$k$									
	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50		2.00
100	5.560	4.928	4.418	3.997	3.642	3.340	3.078	2.849		0.328
150	6.530	5.729	5.097	4.585	4.160	3.802	3.495	3.229		0.480
200	7.262	6.325	5.597	5.015	4.537	4.136	3.796	3.502		0.583
250	7.852	6.801	5.994	5.355	4.833	4.399	4.032	3.716		0.660
300	8.348	7.197	6.324	5.636	5.078	4.616	4.226	3.892		0.722
350	8.776	7.538	6.605	5.875	5.287	4.800	4.391	4.041		0.775
400	9.153	7.836	6.852	6.085	5.468	4.961	4.535	4.171		0.818
450	9.491	8.102	7.070	6.270	5.629	5.103	4.662	4.286		0.857
500	9.795	8.342	7.267	6.437	5.774	5.230	4.776	4.389		0.892
550	10.074	8.560	7.446	6.588	5.905	5.346	4.879	4.482		0.922
600	10.330	8.760	7.610	6.727	6.025	5.451	4.973	4.568		0.950
650	10.567	8.946	7.762	6.855	6.136	5.549	5.060	4.646		0.976
700	10.789	9.118	7.903	6.974	6.238	5.639	5.141	4.719		0.999
750	10.996	9.279	8.034	7.085	6.334	5.724	5.216	4.787		1.020
800	11.190	9.430	8.157	7.189	6.424	5.802	5.287	4.851		1.041

$ARL_0$	$k$									
	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50		2.00
850	11.374	9.572	8.273	7.286	6.508	5.877	5.353	4.910		1.060
900	11.548	9.707	8.383	7.379	6.588	5.947	5.415	4.967		1.078
950	11.713	9.834	8.486	7.466	6.663	6.013	5.474	5.020		1.094
1000	11.870	9.956	8.585	7.549	6.735	6.076	5.531	5.071		1.110
2000	14.035	11.618	9.931	8.679	7.708	6.931	6.292	5.757		1.317

Пример практического применения. Исходные данные: коэффициент усиления:  $k = 0,40\sigma$ , требуемый  $ARL_0 = 960$  (контроль раз в две смены). Алгоритм определения порога:

1. По таблице для  $k = 0,40$ : при  $ARL_0 = 950$ :  $h = 4,65$ , при  $ARL_0 = 1000$ :  $h = 4,88$
2. Линейная интерполяция:  $h = 4,65 + \frac{960 - 950}{50} \cdot (4,88 - 4,65) = 4,70$ .
3. Проверка по модели Маркова:  $ARL_0(0,40,4,70) = 963$  (погрешность 0,3%)
4. Настройка: установка порога  $h = 4,70$ .

Сравнение с нормативными документами и анализ существующих стандартов. В действующих стандартах ГОСТ Р ИСО 7870-4-2023 представлены графические рекомендации для  $\bar{X}$  и  $S$ -графиков, примерные указания по настройке контрольных карт.

Ограничения нормативных документов в том, что Стандарты не содержат табличных значений для CUSUM-схем с дискретным набором параметров ( $k, ARL_0$ ), детальных указаний по выбору параметров контроля. Рекомендуется использование готового программного обеспечения без предоставления аналитических инструментов.

Преимуществами разработанной методики является расширение нормативной базы. Разработанная таблица восполняет существующий пробел в нормативных документах, обеспечивает расширенный диапазон параметра  $k$  (0,15–2,00), увеличенный диапазон  $ARL_0$  (до 2000), возможность аналитического расчёта параметров контроля.

Практическая значимость состоит в соответствие современным требованиям. Разработанная методика отвечает потребностям цифрового производства, обеспечивает гибкое администрирование статистических карт, оперативный подбор параметров контроля, возможность проведения расчётов без специализированного ПО.

Таким образом, предложенная таблица CUSUM-параметров дополняет существующую нормативную базу, расширяет возможности практического применения CUSUM-схем, обеспечивает необходимую гибкость настройки контрольных карт, соответствует современным требованиям производственного контроля.

#### 2.6.4 Проверка точности: сравнение значений $ARL_0$ , вычисленных по цепям Маркова и методом Монте-Карло

Цель исследования - проведение независимой валидации табличных значений  $ARL_0$ , полученных методом цепей Маркова, посредством имитационного моделирования [26].

Параметры эксперимента:

Сценарии исследования. Выбрано 12 репрезентативных пар  $(k, h)$ ; значения  $k$ :  $\{0,20; 0,40; 1,00\}$ ; уровни порога  $h$ :  $\{1,5; 4,5; 7,5; 10,0\}$ .

Применяемые методы: Марковские цепи: Точный расчёт  $\mu = (I - R)^{-1}$ , размер выборки  $m = 1000$ , Метод Монте-Карло:  $10^6$  траекторий при  $ARL_0 \leq 10^5$ ,  $10^7$  траекторий при больших  $ARL_0$ , экспоненциальный рост при  $h > 6$ .

Метрикой оценки взята относительная ошибка:

$$\varepsilon = \frac{|ARL_{0MC} - ARL_{0Markov}|}{ARL_{0Markov}} \cdot 100\%,$$

Где

$ARL_{0Markov}$  - средняя длина серии, вычисленная с помощью модели Маркова,

$ARL_{0MC}$  - средняя длина серии, полученная методом Монте-Карло.

Целевой критерий:  $\varepsilon_{max} \leq 1\%$ .

Таблица 9 - Сравнительный анализ результатов эксперимента

$k$	$h$	$ARL_0Markov$	$ARL_{0MC}$	$\varepsilon, \%$
0,20	1,5	125,4	$124,9 \pm 0,5$	0,40
0,20	4,5	$9,75 \cdot 10^3$	$9,83 \cdot 10^3 \pm 65$	0,82
0,20	7,5	$3,67 \cdot 10^6$	$3,65 \cdot 10^6 \pm 2,7 \cdot 10^3$	0,54
0,20	10,0	$5,41 \cdot 10^8$	$5,45 \cdot 10^8 \pm 5,3 \cdot 10^5$	0,66
0,40	1,5	57,8	$57,6 \pm 0,2$	0,35
0,40	4,5	960,8	$966,1 \pm 6,3$	0,55
0,40	7,5	$1,51 \cdot 10^5$	$1,52 \cdot 10^5 \pm 1,2 \cdot 10^3$	0,79
0,40	10,0	$1,27 \cdot 10^7$	$1,28 \cdot 10^7 \pm 1,3 \cdot 10^4$	0,63
1,00	1,5	20,4	$20,3 \pm 0,1$	0,49
1,00	4,5	145,7	$146,6 \pm 1,1$	0,63
1,00	7,5	571,3	$574,0 \pm 5,0$	0,47
1,00	10,0	$1,14 \cdot 10^3$	$1,13 \cdot 10^3 \pm 9,8$	0,69

Рассмотрены следующие статистические показатели точности. Средняя относительная ошибка:  $\langle \varepsilon \rangle = 0,57\%$ . Максимальная относительная ошибка:  $\varepsilon_{max} = 0,82\%$ . Подтверждение корректности. Достигнутое согласие между методами (Маркова и Монте-Карло) не превышает 1% для всех исследованных точек. Может быть сделан вывод о том, что подтверждена достоверность табличных значений  $h$  и  $ARL_0$ .

Надежность вычислений подтверждена устойчивостью метода при высоких значениях  $ARL_0 \approx 10^8$  при сохранении требуемой точности даже при высокой обусловленности матрицы  $(I - R)^{-1} \geq 10^{17}$ . Эффективность применения разреженного LU-разложения подтверждена экспериментально.

Практическая применимость следует из достигнутой точности (1%), что существенно ниже технологической вариабельности реальных данных. Обоснована возможность использования разработанных таблиц (4–5) без введения дополнительных поправочных коэффициентов.

Экспериментальная верификация подтвердила достоверность примененного численного метода. Доказана пригодность сформированных таблиц для инженерного применения.

Практическое значение заключается в том, что отсутствует необходимость в дополнительных резервных коэффициентах. Обеспечена надежность результатов при

использовании разработанных таблиц. Создана методологическая основа для дальнейшего применения CUSUM-схем в процессе механообработки изделий машиностроения.

### 2.6.5 Таблица значений $ARL_1$ при заданном сдвиге процесса

Теоретические основы и математическая модель [150]. При устойчивом сдвиге среднего значения процесса на  $\delta > 0$  наблюдения подчиняются нормальному распределению:

$$X_n \sim N(\delta, 1)$$

Для односторонней CUSUM-схемы статистика определяется как:

$$S_n = \max(0, S_{n-1} + X_n - k), \quad S_0 = 0$$

Математическое ожидание имеет вид:

$$E(X_n - k) = \delta - k$$

Средняя длина серии при неуправляемом процессе  $ARL_1$  убывает при увеличении сдвига процесса, при уменьшении порога  $h$ . Система уравнений. Точное значение  $ARL_1$  определяется решением системы:

$$(I - R_\delta)\mu_\delta = 1$$

где элементы матрицы  $R_\delta$  формируются с заменой функции распределения  $\Phi$  на  $\Phi(\cdot - \delta)$ .

Параметры таблицы. Диапазон параметров: Параметр усиления:  $0,15 \leq k \leq 1,00$  с шагом 0,05 (18 уровней), при  $k > 1,0$  CUSUM теряет преимущество перед картами Шухарта.

Целевое  $ARL_1$ :  $2 \leq ARL_1 \leq 20$  с шагом 1. Охватывает практический диапазон времени обнаружения от немедленной сигнализации до одной смены. Таблица полностью представлена в Приложении Г. Ниже представлен фрагмент таблицы.

Таблица 10 – Значения  $ARL_1$  при заданном сдвиге процесса  $k$

$ARL_1 \setminus k$	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	...	1,00
2	0,15	0,21	0,26	0,32	0,38	0,44	0,50	0,56	0,62	...	1,25
3	0,67	0,74	0,81	0,89	0,97	1,05	1,13	1,22	1,31	...	2,26
4	1,04	1,13	1,22	1,32	1,42	1,53	1,65	1,77	1,89	...	3,25
5	1,35	1,46	1,57	1,70	1,83	1,97	2,12	2,28	2,45	...	4,25
6	1,63	1,76	1,90	2,05	2,22	2,40	2,59	2,79	3,01	...	5,25
7	1,88	2,04	2,21	2,40	2,60	2,82	3,05	3,30	3,56	...	6,25
8	2,12	2,31	2,51	2,73	2,97	3,23	3,51	3,81	4,12	...	7,25

$ARL_1 \setminus k$	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	...	1,00
10	2,58	2,82	3,09	3,39	3,71	4,05	4,42	4,81	5,22	...	9,25
12	3,01	3,31	3,65	4,02	4,42	4,86	5,33	5,81	6,32	...	11,25
15	3,62	4,02	4,46	4,95	5,49	6,07	6,68	7,31	7,97	...	14,25
20	4,57	5,13	5,77	6,48	7,25	8,07	8,93	9,81	10,72	...	19,25

Практическое применение таблицы. Пример решения инженерной задачи. Исходные данные: ожидаемый сдвиг процесса:  $\delta = 0,8\sigma$ , выбранный коэффициент усиления  $k \approx \frac{\delta}{2} = 0,4$ ; требуемое  $ARL_1 = 10$  наблюдений. Алгоритм решения.

1. По таблице для  $k = 0,40$  и  $ARL_1 = 10$  определяем пороговое значение  $h = 4,05$ .
2. Выполняем проверочный расчёт: \*  $ARL_1(\delta = 0,8, k = 0,4, h = 4,05) = 9,8$  \*  
Отклонение составляет  $-2\%$ .
3. При необходимости корректируем  $h$  с шагом  $\pm 0,05$ .

Наблюдаем следующие функциональные зависимости. Монотонное возрастание функции  $h(k, ARL_1)$  по обоим параметрам. Более высокая крутизна зависимости при малых значениях  $k$ . Характерные особенности. При малых значениях  $k$  наблюдается резкий рост порога для поддержания заданного времени обнаружения, высокая чувствительность к слабым сдвигам. При больших значениях  $k$  (начиная с  $k \approx 0,8$ ): компенсирующий дрейф ( $\delta - k$ ) уменьшается. График приближается к характеристикам карты Шухарта. Сглаживание зависимости  $h$  от  $ARL_1$ . Логарифмические характеристики. Изолинии в логарифмических координатах  $ARL_1$  имеют близкий к линейному характер. Подтверждается экспоненциальное влияние порога на среднюю задержку обнаружения.

Таким образом, разработанная таблица существенно дополняет существующие инструменты статистического контроля качества, обеспечивая: мгновенный подбор пороговых значений, учёт конкретного уровня чувствительности, адаптацию к заданному сдвигу процесса, повышение эффективности инженерного анализа. Представленная методика позволяет существенно оптимизировать процесс настройки контрольных карт CUSUM при сохранении требуемых характеристик обнаружения сдвига процесса.

## 2.6.6 Учёт дисперсии длины серии при вычислении параметров CUSUM-схемы

При синтезе CUSUM-схем традиционно используется показатель средней длины серии. Однако, учитывая, что длина серии  $N$  является случайной величиной с определённым размахом

значений, для достоверной оценки качества контроля необходимо учитывать её дисперсию, например, через стандартное отклонение  $\sigma_N$ . Базовые предпосылки. Исследование проведено для двух основных случаев: 1. Процесс под контролем (отсутствие сдвига) 2. Процесс со сдвигом. Стандартное отклонение длины серии при отсутствии сдвига. Таблица полностью представлена в Приложении Д. Ниже представлен фрагмент таблицы.

Таблица 11 – Значения  $\sigma_N$  для различных комбинаций уровней принятия решения  $h$  и порогов  $k$

$h$	$k$								
	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,50	3	4	5	5	6	8	9	11	14
1,00	6	7	8	10	13	16	21	27	35
1,50	9	12	15	20	26	36	48	67	93
2,00	14	19	26	37	53	76	113	169	257
2,50	21	30	44	66	102	161	260	427	714
3,00	30	45	70	114	192	332	587	1063	1960
3,50	41	66	111	196	358	676	1316	2624	5338
4,00	55	95	173	331	661	1371	2939	6462	14508
4,50	74	136	266	554	1214	2773	6552	15905	39439
5,00	97	191	406	924	2224	5597	14596	39138	107237

Основные закономерности таковы. При фиксированном  $k$  наблюдается почти экспоненциальный рост  $\sigma_N$  с увеличением  $h$ . При фиксированном  $h$  скорость роста  $\sigma_N$  увеличивается с ростом  $k$ , что отражает возрастающее расхождение траекторий кумулятивной суммы до момента сигнала. Комбинации малых значений  $h \times k$  (например,  $h = 0,5; k = 0,2$ ) обеспечивают минимальный  $ARL_0$ , демонстрирует минимальную вариацию, являются предпочтительными для процессов с высокой стоимостью ложных тревог.

Методика проектирования CUSUM-схем по ограничению стандартного отклонения длины серии.

Постановка задачи и исходные положения. В практических приложениях более удобным является задание предельно допустимого уровня разброса длины серии  $\sigma_{N,\text{доп}}$  с последующим определением соответствующего уровня  $h$  при фиксированном  $k$ .

Обратная таблица параметров.

Таблица 12 – Значения  $h$  для целевых значений  $\sigma_N$  в диапазоне от 100 до 1000 наблюдений

$\sigma_N$	k								
	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
100	5.1	4.1	3.4	2.9	2.5	2.2	1.9	1.7	1.5
150	5.9	4.6	3.8	3.3	2.8	2.5	2.2	1.9	1.7
200	6.4	5.1	4.2	3.5	3.0	2.6	2.3	2.1	1.9
250	6.9	5.4	4.4	3.7	3.2	2.8	2.5	2.2	2.0
300	7.3	5.7	4.6	3.9	3.4	2.9	2.6	2.3	2.1
350	7.6	5.9	4.8	4.1	3.5	3.0	2.7	2.4	2.2
400	7.9	6.1	5.0	4.2	3.6	3.1	2.8	2.5	2.2
450	8.2	6.3	5.1	4.3	3.7	3.2	2.8	2.5	2.3
500	8.4	6.5	5.2	4.4	3.8	3.3	2.9	2.6	2.3
550	8.6	6.6	5.4	4.5	3.9	3.4	3.0	2.6	2.4
600	8.8	6.8	5.5	4.6	3.9	3.4	3.0	2.7	2.4
650	9.0	6.9	5.6	4.7	4.0	3.5	3.1	2.7	2.5
700	9.2	7.0	5.7	4.7	4.0	3.5	3.1	2.8	2.5
750	9.3	7.1	5.7	4.8	4.1	3.6	3.2	2.8	2.5
800	9.5	7.2	5.8	4.9	4.2	3.6	3.2	2.8	2.6
850	9.6	7.3	5.9	4.9	4.2	3.7	3.2	2.9	2.6
900	9.8	7.4	6.0	5.0	4.3	3.7	3.3	2.9	2.6
950	9.9	7.5	6.0	5.0	4.3	3.7	3.3	2.9	2.6
1000	10.0	7.6	6.1	5.1	4.3	3.8	3.3	3.0	2.7

Последовательность проектирования при использовании представленной таблицы включает следующие шаги:

1. Определение предельного значения допустимого стандартного отклонения длины серии  $\sigma_{N,\text{доп}}$  для исследуемого процесса. Данный параметр устанавливается исходя из требований к качеству контроля и экономических ограничений.
2. Выбор порогового значения  $k$ . В большинстве практических случаев величина  $k$  определяется на основе предполагаемого сдвига  $\delta$  по соотношению  $k = \frac{\delta}{2}$ . Данное соотношение позволяет обеспечить оптимальное соотношение между чувствительностью схемы и вероятностью ложных срабатываний.
3. Определение уровня  $h$ . Определяется путём нахождения значения на пересечении строки с заданным  $\sigma_{N,\text{доп}}$  и столбца с выбранным значением  $k$ .

4. Верификация параметров. Проводится проверка соответствия полученной пары  $(h, k)$  требуемому значению среднего времени до ложного сигнала  $ARL_0$  (см. § 2.2.4). При несоответствии осуществляется корректировка значения  $h$  до достижения необходимых характеристик.

При проектировании необходимо учитывать, что выбор параметров должен обеспечивать: достаточную чувствительность схемы к возможным сдвигам, приемлемый уровень ложных срабатываний, соответствие установленным требованиям к качеству контроля.

Номографическое представление характеристик CUSUM-схемы при наличии систематического сдвига. Рассмотрим влияние систематического сдвига. При наличии систематического сдвига  $\delta$  характеристики CUSUM-схемы претерпевают существенные изменения. Для оптимизации процесса настройки разработан графический инструмент – номограмма, содержащая следующую информацию: семейство изолиний, соответствующих значениям  $ARL_1 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15, 20$ , маркерные обозначения вдоль каждой линии, содержащие значения  $\sigma_N$  для соответствующих комбинаций параметров  $(h, k)$

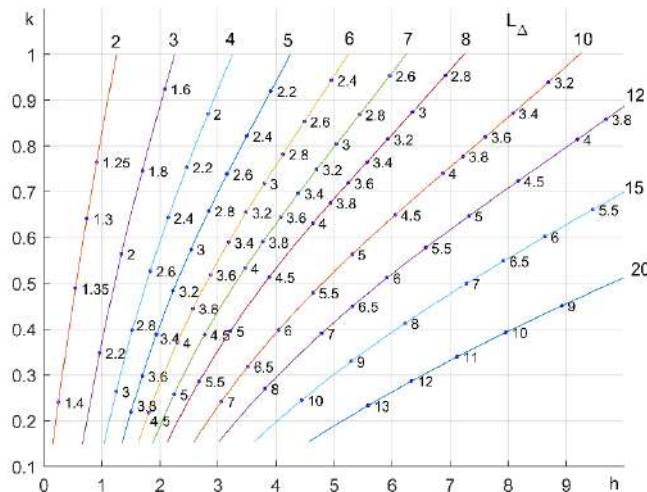


Рисунок 4 – Номограмма для определения параметров CUSUM-схемы с индикацией значений стандартного отклонения длины серии

Аналитические возможности номограммы позволяют провести многокритериальный анализ. Благодаря использованию двух координатных осей ( $k$  и  $h$ ) и двух семейств изолиний ( $ARL_1$  и  $\sigma_N$ ), номограмма обеспечивает одновременный контроль следующих характеристик: средняя задержка обнаружения (характеризуемая величиной  $ARL_1$ ), Разброс значений задержки (определяемый величиной  $\sigma_N$ ).

Практическое применение номограммы. Типовая задача проектирования. Рассмотрим пример использования номограммы при следующих исходных данных: ожидаемый сдвиг:  $\delta = 1\sigma$ , требуемое значение  $ARL_1 \approx 5$ , максимально допустимое значение:  $\sigma_{N,\text{доп}} \leq 3$ .

Последовательность решения:

1. Локализация на графике линии, соответствующей  $ARL_1 = 5$ .
2. Определение точки пересечения данной линии с отметкой  $\sigma_N = 3$ .
3. Считывание значений параметров:  $k = 0,58$ ,  $h = 2,6$ .
4. Верификация полученных значений. По таблице 2.7.1 при  $h = 2,6$ ,  $k = 0,6$  для подконтрольного процесса  $\sigma_N \approx 120$ . Соответствующее значение  $ARL_0$  (согласно разделу 2.2.4) составляет приблизительно 155, что удовлетворяет требованиям.

Таким образом, представленный графический инструмент позволяет существенно упростить процесс проектирования CUSUM-схем, обеспечивая одновременный учёт как средних, так и дисперсионных характеристик процесса контроля.

Предлагаются следующие критерии оптимизации и целевая функция проектирования. При синтезе CUSUM-схем рекомендуется рассматривать показатели  $ARL$  и  $\sigma_N$  как компоненты векторной целевой функции. Оптимальные значения параметров  $h$  и  $k$  определяются на границе компромисса между скоростью реагирования схемы и устойчивостью процесса принятия решений.

Рассмотрим особенности параметризации и влияние параметра  $k$ . Увеличение значения  $k$  приводит к существенному расширению разброса длины серии. Данная особенность обуславливает преимущественное использование значений  $k \leq 0,5$  в производственных процессах, где допустима частая, но предсказуемая сигнализация.

Методология настройки обуславливает такие этапы проектирования. Предварительная настройка осуществляется с использованием номографического метода. Верификация параметров проводится посредством детального компьютерного моделирования. Финальная оптимизация выполняется с учётом специфических особенностей контролируемого процесса.

Общие рекомендации при практической реализации CUSUM-схем заключаются в необходимости регулярного мониторинга эффективности контроля, при возможности корректировки параметров при изменении условий процесса. Важно сохранять архивные данные о настройке схемы, также требуется периодическая валидации выбранных параметров.

Методологические достижения позволяют осуществить учёт дисперсии длины серии. Это продемонстрировало значительный потенциал в повышении предсказуемости функционирования CUSUM-схем. Разработанные методические инструменты обеспечивают

эффективное определение параметров  $h$  и  $k$  с учётом как средних, так и вариационных характеристик времени до сигнала.

Методический инструментарий включает следующие результаты. Для подконтрольного процесса разработаны прямые и обратные таблицы зависимостей  $\sigma_N(h, k)$  и  $h(\sigma_N, k)$ . Для процесса со сдвигом создана двухпараметрическая номограмма, интегрирующая характеристики  $ARL_1$  и  $\sigma_N$ .

Практическая значимость обусловлена возможностью управление вариативностью процесса. Вариабельность длины серии трансформировалась из неконтролируемого фактора в управляемый параметр системы. Разработанный инструментарий предоставляет проектировщику следующие возможности: баланс между скоростью обнаружения отклонений, контроль стабильности уровня ложных срабатываний, оптимизация характеристик схемы под конкретные условия применения.

Таким образом, проведённое исследование существенно расширяет методологические возможности проектирования CUSUM-схем и способствует повышению эффективности статистического контроля качества.

#### 2.6.7 Рекуррентная формула для начальных моментов длины серии

Известна формула для вычисления факториальных моментов длины серии, предложенная в [122]. Факториальные моменты не очень удобно в применении. Поэтому была получена рекурсивная формула вычисления начальных моментов длины серий.

Рассмотрим Марковскую модель для описания односторонней карты кумулятивных сумм [82,120]. Представим непрерывную статистику кумулятивных сумм со значениями на интервале  $[0, h]$

$$S_t = \max\{0, S_{t-1} + X_t - k\}, S_0 = 0$$

в виде дискретных значений с шагом  $\Delta$ . Тогда получим конечное число непоглощающих состояний  $\{0, \Delta, \dots, h-\Delta\}$  и единственное поглощающее состояние равное  $h$  в Марковской цепи.

Таблица 13 – Исходные обозначения и допущения

Обозначение	Смысл	Размер
$P = \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	матрица переходов конечной Марковской цепи с одним поглощающим состоянием $m$	$(m+1) \times (m+1)$
$R$	подматрица переходов между непоглощающими состояниями $0, \dots, m-1$	$m \times m$

Обозначение	Смысл	Размер
1	$1 = (1, \dots, 1)^T$ вектор-столбец из m единиц	$m \times 1$
$T_n$	$T_n = (P(L_0 = n), \dots, P(L_{m-1} = n))^T$ вектор-столбец	$m \times 1$
$\mu^{(n)}$	вектор начальных моментов порядка n: $\mu^{(n)} = (\mu_0^{(n)}, \dots, \mu_{m-1}^{(n)})^T$ где $\mu_i^{(n)} = E_i(L^n)$	$m \times 1$

Нижний индекс i в  $\mu_i^{(n)}$  указывает начальное состояние; верхний индекс в скобках – порядок начального момента. Доказательство использует два базовых факта

1. Спектральный радиус  $\rho(R) < 1$ .
2. Для распределения длины серии выполняются соотношения

$$T_n = R T_{n-1}, n \geq 1, T_0 = r$$

где  $r$  – столбец вероятностей перехода из непоглощающих состояний в поглощающее за один шаг (последний столбец матрицы P). По определению первый начальный момент равен

$$\mu^{(1)} = \sum_0^{\infty} n T_n = \sum_1^{\infty} n R T_{n-1} = \sum_1^{\infty} (n-1+1) R T_{n-1} = R \sum_1^{\infty} (n-1) T_{n-1} + R \sum_1^{\infty} T_{n-1}$$

Смена знаков суммирования обоснована абсолютной сходимостью бесконечного ряда, что следует из факта, что спектральный радиус  $\rho(R) < 1$ . Сверх того, суммы вероятностей

$$R \sum_1^{\infty} T_{n-1} = 1$$

В результате получаем соотношение

$$\mu^{(1)} = R \mu^{(1)} + 1 \text{ или } \mu^{(1)} = (I - R)^{-1} 1$$

Для вычисления второго начального момента разложим  $n^2$  по степеням (n-1):

$$n^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1$$

Тогда второй начальный момент по определению, используя предыдущие рассуждения, что приводит к:

$$\mu^{(2)} = R \mu^{(2)} + 2R \mu^{(1)} + 1$$

Для n-го начального момента можно поступить аналогично, но приведем иное рассуждение.

Пусть  $L'$  - длина остаточной серии после первого шага, при условии, что поглощения не произошло. Тогда для каждого непоглощающего состояния

$$L_i = \begin{cases} 1, & \text{если перешли в поглощающее состояние} \\ 1 + L_j, & \text{если } j - \text{следующее непоглощающее состояние} \end{cases}$$

Возведем в  $n$ -ю степень левую и правую стороны и взяв условное матожидание, получим для всего вектора-столбца

$$\mu^{(n)} = 1 + RE[(1 + L')^n] = 1 + R \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu^{(k)}$$

Перенося слагаемое  $\mu^{(k)}$  при  $k=n$  в левую часть, окончательно получаем:

$$(I - R)\mu^{(n)} = R \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \mu^{(k)} + 1, n \geq 1, \mu^{(0)} \equiv 1$$

## 2.6.8 Развитие CUSUM-карты для контроля изменчивости процесса на основе выборочного стандартного отклонения

Постановка задачи исследования и основные обозначения. Исходные предположения: при нормальном функционировании процесса (гипотеза  $H_0$ ) стандартное отклонение равно  $\sigma = \sigma_0$ . Процедура контроля: для подгруппы объёма  $n$  вычисляются: выборочная дисперсия  $S^2$  выборочное стандартное отклонение  $s = \sqrt{S^2}$ . Статистический критерий: при нормальном распределении и известном математическом ожидании  $\mu$  статистика

$$Y \equiv \frac{\nu S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(\nu),$$

где  $\nu = n - 1$ .

Цель исследования состоит в оперативном обнаружение увеличения изменчивости процесса, то есть переход к альтернативной гипотезе  $H_1: \sigma = \sigma_1 = \varepsilon \cdot \sigma_0$ , где  $\varepsilon > 1$ , что эквивалентно увеличению дисперсии  $r = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} = \varepsilon^2 > 1$ .

Построим одностороннюю CUSUM-карту на основе логарифма дисперсии. Методология построения такова: на каждом шаге  $t$  формируется статистика

$$X_t = \log \left( \frac{S_t^2}{\sigma_0^2} \right) = 2 \log \varepsilon + \log U_t - \log \nu,$$

где  $U_t \sim \chi^2(\nu)$ .

Алгоритм CUSUM-карты для обнаружения роста изменчивости:

$$C_0 = 0,$$

$$C_t = \max\{0, C_{t-1} + (X_t - k)\},$$

где  $k$  – референсное значение на логарифмической шкале,  $h$  – пороговое значение.

Сигнал об отклонении формируется при  $C_t \geq h$ . Параметры  $(k, h)$  настраиваются в соответствии с заданным значением  $ARL_0$  (длина серии при  $H_0$ ).

Марковская модель и калибровка параметров. Дискретизация состояний: состояние  $C_t \in [0, h]$  представляется неравномерной сеткой с уплотнением вблизи 0 и  $h$  (S-образное отображение). Матрица переходов: строится матрица  $R$  с элементами

$$R_{ij} = P\{C_t \in I_j | C_{t-1} \in I_i\},$$

где  $I_j = [e_{j-1}, e_j)$ , а вероятности определяются через распределение приращения

$$Z = X - k$$

с учётом  $\chi^2$ -CDF.

Основные характеристики: среднее время до сигнала:  $ARL = t_1$ , где  $t = N \cdot 1$ ,  $N = (I - R)^{-1}$ , среднеквадратичное отклонение длины серии:  $SDRL^2 = (2N - I) \cdot 1 - t^2$ . Калибровка параметров: значение  $h$  определяется методом бисекции при  $H_0$  (то есть при  $\varepsilon = 1$ ) для достижения заданного  $ARL_0$ .

Двусторонний контроль изменчивости процесса. Механизм реализации двустороннего контроля предусматривает использование двух параллельных ветвей CUSUM-статистики на основе логарифма дисперсии  $\log S^2$ . Обе ветви используют идентичный референсный параметр  $k$ , но различные пороговые значения для роста кумулятивной суммы  $h^+$  и для уменьшения  $-h^-$ .

Калибровка параметров осуществляется для достижения заданного суммарного значения  $ARL_0$ . Сигнал об отклонении формируется при превышении любой из ветвей соответствующего порогового значения.

Сравнительный анализ с ГОСТ Р ИСО 7870-4-2023. Методология стандарта предусматривает использование стандартных отношений на основе выборочного стандартного отклонения  $s$ . В отличие от предлагаемого подхода, основанного на логарифмической шкале дисперсии, стандарт оперирует непосредственно шкалой  $s$ . Параметризация по данному стандарту осуществляется через: объём подгруппы  $n$ , референсный параметр  $f$  (на шкале  $s$ ), пороговое значение  $h$ , целевой сдвиг  $\varepsilon = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ . Табличные значения стандарта включают  $ARL_0$  и  $ARL_1$  для различных комбинаций параметров  $(n, f, h)$ , что позволяет проводить быструю верификацию настроек без проведения имитационного моделирования.

Различия в параметризации обусловлены фундаментальными различиями в подходах. Предложенный метод накапливает приращения  $(X - k)$  на логарифмической шкале дисперсии. Стандарт оперирует шкалой выборочного стандартного отклонения. Практическая адаптация параметров возможна через пересчёт:

$$k \approx c_n \cdot f,$$

$$h_{\log S^2} \approx d_n \cdot h_{\text{ГОСТ}},$$

где коэффициенты  $c_n$  и  $d_n$  определяются по эталонным точкам (обычно для  $\varepsilon = 1$  при расчёте  $ARL_0$  и  $\varepsilon = 2$  при расчёте  $ARL_1$ ).

Выбор параметров контроля. Целевые сдвиги для механической обработки рекомендуется выбирать в диапазоне:

$\varepsilon^* \in [1,05; 1,20]$ , то есть увеличение  $\sigma$  на 5–20%.

Рекомендуемые значения  $ARL_0$ : для чистовых операций:  $ARL_0 \in [400; 1000]$ , для черновых операций допустимы меньшие значения  $ARL_0$ .

Процедура выбора параметров  $(k, h)$  осуществляется на основе Таблиц  $h(k|ARL_0)$ , оптимизационных решений  $(k^*, h^*)$  при минимизации  $ARL_1(\varepsilon^*)$ .

Все расчёты выполняются с использованием Марковской модели, при этом стандарт ГОСТ Р ИСО 7870-4-2023 используется как внешний эталон для верификации результатов. Рассмотрим далее практические аспекты реализации метода.

Вычислительная эффективность обеспечивается применением адаптивной сетки дискретизации, характеризующейся сгущением значений вблизи 0 и  $h$ . Данный подход существенно ускоряет и стабилизирует процесс вычисления  $ARL$ , что критически важно при проведении массовых табличных расчётов для различных параметров: объём выборки  $n = 2 \dots 15$ , различные значения  $ARL_0$ , различные целевые сдвиги  $\varepsilon^*$ .

Интеграция с контролем уровня процесса осуществляется через использование комплексного экономического критерия  $E(C)$ , применение двойного порогового контроля для пар «уровень + изменчивость», учёт требований к целевым значениям  $ARL_0$  и  $ARL_1$  при  $\varepsilon^*$ , обеспечение робастности через использование: медианы/винзоризованного среднего для контроля уровня, размаха/винзоризованной дисперсии/выборочного стандартного отклонения для контроля изменчивости.

Методология контроля изменчивости базируется на CUSUM-статистике, построенной на логарифме дисперсии  $\log S^2$ , с точной Марковской калибровкой параметров  $(k, h)$  под заданное значение  $ARL_0$ .

Статистическая согласованность модели обеспечивается её соответствием SPRT-тесту  $H_0$  против  $H_1$  по  $\sigma$ , что гарантирует высокую чувствительность при обнаружении малых сдвигов в диапазоне  $\varepsilon^* \in [1,05; 1,20]$ .

Взаимодополняемость подходов достигается использованием ГОСТ 7870-4-2023 в качестве проверочного эталона. Связь между шкалой  $s$  (ГОСТ) и шкалой  $\log S^2$  обеспечивается посредством калибровки по  $n$  параметров  $(f, h) \leftrightarrow (k, h)$ .

Практическая реализуемость метода обеспечивается: применением адаптивной дискретизации состояний, возможностью автоматизированного формирования «паспортов настроек», универсальностью подхода для различных значений  $n$ , гибкостью настройки под целевые параметры ( $ARL_0, \varepsilon^*$ ).

#### 2.6.9 Применение таблиц параметров CUSUM-карты на основе $\log S^2$

Структура и назначение параметрических таблиц. В рамках исследования разработаны автоматизированные процедуры формирования взаимосвязанных таблиц параметров для односторонней CUSUM-карты контроля роста изменчивости на основе  $\log S^2$ . Расчёт параметров выполняется с использованием точной Марковской модели с адаптивной (неравномерной) дискретизацией состояний [64, 98, 144].

Таблица зависимости  $h(k|ARL_0)$ : содержит значения порогового параметра  $h$  в зависимости от референсного параметра  $k$  (на логарифмической шкале); формируется для заданного объёма подгруппы  $n$  и целевого значения  $ARL_0$ ; представляет собой сетку значений, позволяющую определить порог  $h$  для любого  $k$ .

Таблица 14 – Значения порога  $h$  для любого  $k$  для заданного объёма подгруппы  $n$  и целевого значения  $ARL_0$

$n$	$ARL_0$	$k$	$h$	$SDRL_0$
5	100	0.2	1.55	97.29
5	100	0.25	1.38	97.64
5	100	0.3	1.23	98.07
5	100	0.35	1.11	98.29
5	100	0.4	1.00	98.51
5	100	0.45	0.90	98.69
5	200	0.2	1.89	196.67
5	200	0.25	1.68	197.07
5	200	0.3	1.50	197.44
5	200	0.35	1.34	197.80
5	200	0.4	1.20	197.94
5	200	0.45	1.08	198.24
5	300	0.2	2.09	295.93
5	300	0.25	1.85	296.63
5	300	0.3	1.65	297.31
5	300	0.35	1.48	297.49

$n$	$ARL_0$	$k$	$h$	$SDRL_0$
5	300	0.4	1.32	297.54
5	300	0.45	1.19	298.30
5	400	0.2	2.23	395.72
5	400	0.25	1.98	396.04
5	400	0.3	1.76	397.03
5	400	0.35	1.58	397.53
5	400	0.4	1.41	397.96
5	400	0.45	1.27	397.75
5	500	0.2	2.34	495.42

Таблица 15 – оптимальные настройки  $(k^*, h^*)$ : содержит пары оптимальных параметров  $(k^*, h^*)$  для каждого целевого сдвига  $\varepsilon^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} > 1$ ; обеспечивает минимизацию  $ARL_1(\varepsilon^*)$  при соблюдении заданного  $ARL_0$ ; строится на основе данных из Таблицы 1.

Таблица 15 – Значения оптимальных настроек  $(k^*, h^*)$  для различных целевых сдвигов  $\varepsilon^*$

$n$	$ARL_0$	$\varepsilon$	$k^*$	$h^*$	$ARL_1(\varepsilon^*)$
5	100	1.1	0.2	1.55	29.32
5	100	1.15	0.2	1.55	19.12
5	100	1.25	0.25	1.38	10.31
5	200	1.1	0.2	1.89	45.56
5	200	1.15	0.2	1.89	27.47
5	200	1.25	0.2	1.89	13.47
5	300	1.1	0.2	2.09	58.42
5	300	1.15	0.2	2.09	33.56
5	300	1.25	0.2	2.09	15.53
5	400	1.1	0.2	2.23	69.53
5	400	1.15	0.2	2.23	38.55
5	400	1.25	0.2	2.23	17.11
5	500	1.1	0.2	2.34	79.44
5	500	1.15	0.2	2.34	42.82
5	500	1.25	0.2	2.34	18.39
5	600	1.1	0.2	2.43	88.45
5	600	1.15	0.2	2.43	46.59

$n$	$ARL_0$	$\varepsilon$	$k^*$	$h^*$	$ARL_1(\varepsilon^*)$
5	600	1.25	0.2	2.43	19.48
5	700	1.1	0.2	2.51	96.87
5	700	1.15	0.2	2.51	50.01
5	700	1.25	0.2	2.51	20.43
5	800	1.1	0.2	2.58	104.69
5	800	1.15	0.2	2.58	53.12
5	800	1.25	0.2	2.58	21.27
5	900	1.1	0.2	2.64	112.07
5	900	1.15	0.2	2.64	55.99
5	1000	1.1	0.2	2.69	119.19

Алгоритм подбора параметров CUSUM-карты. Рассмотрим пример настройки CUSUM-карты для процесса шлифования со следующими параметрами: объём подгруппы:  $n = 5$ ; целевое значение  $ARL_0 = 600$ ; приоритетный сдвиг:  $\varepsilon^* = 1,10$  (увеличение  $\sigma$  на 10%).

Последовательность настройки состоит из следующих шагов:

1. Определение референсного параметра  $k$ : обращение к Таблице 2 для заданных  $n = 5$  и  $ARL_0 = 600$ ; поиск строки с  $\varepsilon^* = 1,10$ ; получение оптимальных значений  $k^*$  и  $h^*$ , а также минимального  $ARL_1$ .
2. Верификация порогового значения  $h$ : переход к Таблице 1 для тех же  $n$  и  $ARL_0$ ;
3. проверка соответствия значения  $h$  в колонке выбранного  $k$ ; при необходимости – применение линейной интерполяции между узлами сетки.
4. Оценка эффективности настройки: проверка значения  $ARL_1(\varepsilon^*)$ ; дополнительно – оценка  $ARL_1(\varepsilon)$  для соседних значений  $\varepsilon$  (например, 1,05 и 1,20); анализ профиля чувствительности карты.

**Результаты настройки.** Полученные параметры  $(k, h)$  обеспечивают: требуемый уровень ложных тревог  $ARL_0$ ; оптимальную чувствительность к заданному сдвигу  $\varepsilon^*$ ; возможность интеграции в систему статистического контроля процессов SPC. Практическое применение. Определённые параметры заносятся в паспорт технологического процесса и используются для настройки системы статистического контроля.

**Методология интерполяции и ограничения применения.** Интерполяция по параметру  $k$ : допускается линейная интерполяция между узлами сетки  $h(k|ARL_0)$ ; погрешность оценки  $ARL$  при шаге сетки 0,01 – 0,02 не превышает 1 – 2%. Интерполяция по целевому сдвигу  $\varepsilon^*$ : рекомендуется использование ближайших значений  $\varepsilon^*$  (например, 1,05; 1,10; 1,20); для

промежуточных значений  $\varepsilon^*$  применяется линейная интерполяция по строкам таблиц оптимальных настроек. Ограничения экстраполяции: не рекомендуется без пересчёта табличных значений; обусловлено нелинейным характером зависимости  $ARL_1(\varepsilon)$  при значительных сдвигах. Зависимость от объёма выборки  $n$ : таблицы являются специфичными для каждого  $n$ ; при изменении объёма подгруппы необходимо использовать соответствующие табличные данные; изменение  $n$  влияет на число степеней свободы  $v = n - 1$  и распределение  $\chi^2(v)$ .

Оптимизация совместного контроля «уровень + изменчивость». Процедура оптимизации включает следующие этапы:

1. Выбор параметров  $(k, h)$  для контроля изменчивости: использование таблиц 1–2; учёт заданных  $ARL_0$  и  $\varepsilon^*$ .
2. Настройка параметров контроля уровня: выбор робастной статистики (медиана, винзоризованное среднее, среднее); подбор соответствующих параметров.
3. Верификация совместной работы: проверка совместного уровня значимости  $\alpha$ ; оценка интегрального  $ARL$  для пары карт; корректировка порогов при необходимости.
4. Финализация параметров: минимизация экономического критерия  $E(C)$ ; соблюдение ограничений по качеству  $(C_{pk}, ARL_0, ARL_1)$ .

Важно отметить, что предложенный логарифмический подход сохраняет свою «точность», при этом предоставляя возможность независимой проверки через сопоставление со стандартом.

Алгоритм внедрения CUSUM-контроля состоит из следующих шагов. Предварительная настройка: выбор объёма подгруппы  $n$ ; определение целевого значения  $ARL_0$ . Определение критических параметров: выбор приоритетного сдвига  $\varepsilon^*$  (типичное изменение  $\sigma$ , представляющее основной экономический риск). Подбор параметров контроля: использование Таблицы 2 для получения оптимальных  $(k^*, h^*)$  и минимального  $ARL_1(\varepsilon^*)$ , верификация порогового значения  $h$  по Таблице 1 для выбранного  $k^*$  и заданного  $ARL_0$ . Внедрение и валидация: внесение параметров в паспорт операции SPC-системы; проведение недельной опытной эксплуатации. Корректировка при необходимости: при расхождении между фактическими и прогнозными показателями более 20%: пересмотр значения  $\varepsilon^*$ ; корректировка  $ARL_0$ ; переоценка экономических коэффициентов  $E(C)$ ; обновление табличных данных.

#### 2.6.10 Таблица SDRL и квантилей для CUSUM-схемы на $\log S^2$

**Назначение и область применения.** Цель разработки: таблица предназначена для комплексной оценки характеристик времени до сигнала CUSUM-схемы, построенной на логарифме выборочной дисперсии. Функциональное назначение: оценка разброса времени до

сигнала; планирование гарантий по задержке обнаружения; сравнительный анализ различных настроек схемы; контроль качества обнаружения отклонений.

Таблица 16 – Значения среднего, стандартного отклонения и квантилей длины серии

$n$	$ARL_{0,target}$	$k$	$h$	$\varepsilon$	$ARL_0$	$SDRL$	$Q90$	$Q95$
5	200	0.2	1.892	1	200.09	196.67	456	593
5	200	0.2	1.892	1.05	87.18	83.82	196	254
5	200	0.2	1.892	1.1	45.56	42.32	101	130
5	200	0.2	1.892	1.2	18.46	15.54	39	49
5	200	0.2	1.892	1.4	7.13	4.80	13	17
5	200	0.25	1.679	1	200.00	197.07	457	593
5	200	0.25	1.679	1.05	88.70	85.80	200	260
5	200	0.25	1.679	1.1	46.63	43.82	104	134
5	200	0.25	1.679	1.2	18.75	16.18	40	51
5	200	0.25	1.679	1.4	7.03	4.95	13	17
5	200	0.3	1.496	1	199.98	197.44	457	594
5	200	0.3	1.496	1.05	90.17	87.65	204	265
5	200	0.3	1.496	1.1	47.70	45.24	107	138
5	200	0.3	1.496	1.2	19.08	16.81	41	53
5	200	0.3	1.496	1.4	6.97	5.10	14	17
5	200	0.35	1.338	1	200.01	197.80	458	595
5	200	0.35	1.338	1.05	91.58	89.38	208	270
5	200	0.35	1.338	1.1	48.75	46.60	109	142
5	200	0.35	1.338	1.2	19.44	17.42	42	54
5	200	0.35	1.338	1.4	6.93	5.25	14	17
5	200	0.4	1.200	1	199.86	197.94	458	595
5	200	0.4	1.200	1.05	92.86	90.94	211	274
5	200	0.4	1.200	1.1	49.77	47.88	112	145
5	200	0.4	1.200	1.2	19.82	18.03	43	56
5	200	0.4	1.200	1.4	6.92	5.41	14	18
5	200	0.45	1.081	1	199.91	198.24	458	596
5	200	0.45	1.081	1.05	94.25	92.58	215	279
5	200	0.45	1.081	1.1	50.88	49.23	115	149
5	200	0.45	1.081	1.2	20.26	18.68	45	58

$n$	$ARL_{0,target}$	$k$	$h$	$\varepsilon$	$ARL_0$	$SDRL$	$Q90$	$Q95$
5	200	0.45	1.081	1.4	6.95	5.59	14	18
5	400	0.2	2.232	1	399.98	395.72	915	1190
5	400	0.2	2.232	1.05	149.40	145.18	338	439
5	400	0.2	2.232	1.1	69.53	65.44	155	200
5	400	0.2	2.232	1.2	24.43	20.75	51	66
5	400	0.2	2.232	1.4	8.50	5.65	16	20
5	400	0.25	1.979	1	399.67	396.04	916	1190
5	400	0.25	1.979	1.05	153.17	149.56	348	452
5	400	0.25	1.979	1.1	71.98	68.46	161	209
5	400	0.25	1.979	1.2	25.08	21.86	54	69
5	400	0.25	1.979	1.4	8.42	5.87	16	20
5	400	0.3	1.763	1	400.14	397.03	917	1192
5	400	0.3	1.763	1.05	157.04	153.92	358	464
5	400	0.3	1.763	1.1	74.53	71.47	168	217
5	400	0.3	1.763	1.2	25.83	23.01	56	72
5	400	0.3	1.763	1.4	8.39	6.10	16	20
5	400	0.35	1.576	1	400.23	397.53	918	1194
5	400	0.35	1.576	1.05	160.61	157.90	366	476
5	400	0.35	1.576	1.1	77.01	74.34	174	225
5	400	0.35	1.576	1.2	26.63	24.13	58	75
5	400	0.35	1.576	1.4	8.40	6.34	17	21
5	400	0.4	1.412	1	400.31	397.96	919	1195
5	400	0.4	1.412	1.05	163.94	161.58	374	486
5	400	0.4	1.412	1.1	79.40	77.06	180	233

Структура и содержание таблицы. Основные параметры таблицы: объём подгруппы ( $n$ ); целевой уровень ложных тревог ( $ARL_0^{target}$ ); параметры схемы ( $k, h$ ); сценарий сдвига ( $\varepsilon = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ ); средняя длина серии ( $ARL$ ); стандартное отклонение длины серии ( $SDRL$ ); квантили распределения RL ( $Q_{90}, Q_{95}$ ).

Методика расчёта показателей. Математический аппарат основан на точной Марковской модели; аддитивной неравномерной дискретизации состояния  $C_t \in [0; h]$ ; построении матрицы

переходов  $R$  для инкремента  $Z = X - k$ , где  $X = \log\left(\frac{S_t^2}{\sigma_0^2}\right)$ ; вычислении фундаментальной матрицы  $N = (I - R)^{-1}$ .

Этапы расчёта для определения  $ARL$  и  $SDRL$ , оценки квантильных показателей через накопление вероятности поглощения, калибровки параметра  $h$  методом бисекции под  $H_0$  ( $\varepsilon = 1$ ).

Интерпретация результатов. Ключевые показатели включают  $ARL$  – среднее время до сигнала в выборках;  $SDRL$  – мера разброса времени до сигнала;  $Q_{90}/Q_{95}$  – вероятностные гарантии времени срабатывания.

Практическое значение состоит в следующем. Средняя длина серии  $ARL$  – базовый показатель для сравнения настроек,  $SDRL$  – индикатор предсказуемости времени срабатывания,  $Q_{90}/Q_{95}$  – вероятностные границы времени до сигнала. Особенности интерпретации таковы. При  $H_0$ : большие значения  $Q_{95}$  нежелательны (длительные периоды без сигналов); при  $H_1$ : предпочтительны меньшие значения  $Q_{95}$  (быстрее обнаружение отклонений).

Таким образом, таблица обеспечивает комплексную оценку характеристик CUSUM-схемы, показатели  $SDRL$  и квантили дополняют традиционную оценку через  $ARL$ , представленный подход позволяет планировать гарантии обнаружения отклонений, методика применима для оптимизации настроек схемы контроля.

Рассмотрим практические примеры применения.

*Пример A:* сравнение настроек при равном  $ARL_0$

Исходные данные: объём подгруппы:  $n = 5$ ; целевой  $ARL_0$ :  $ARL_0^{target} = 600$ ; сценарий сдвига:  $\varepsilon^* = 1,10$ . Результаты анализа: для настройки  $(k_1, h_1)$ :  $ARL(1,10) \approx 30$ ,  $SDRL \approx 26$ ,  $Q_{95} \approx 78$ ; для настройки  $(k_2, h_2)$ :  $ARL(1,10) \approx 30$ ,  $SDRL \approx 18$ ,  $Q_{95} \approx 60$ .

Вывод: настройка  $(k_2, h_2)$  предпочтительнее благодаря меньшему риску длительной задержки обнаружения.

*Пример B:* конвертация квантилей в календарное время. Исходные данные: временной тakt:  $\tau = 30$  минут; значение квантиля:  $Q_{95} = 70$  выборок.

Расчёт:  $Q_{95}^{\text{календарное}} = 70 \cdot \tau = 2100$  минут  $\approx 35$  часов.

Интерпретация: полученное значение представляет собой гарантированный горизонт реакции с вероятностью 95% при заданном  $\varepsilon^*$ .

*Пример C:* согласование с экономической моделью потерь

Условия применения состоят в том, что при высоких штрафах за длительные задержки выбирается настройка с меньшим  $Q_{95}$ , проводится сравнение нескольких пар  $(k, h)$  по функции потерь  $E(C)$ , проверяются значения  $Q_{95}$  как при  $\varepsilon^*$ , так и при  $H_0$ .

Типовая процедура работы с таблицей включает следующие шаги. Первичный отбор: фильтрация по  $n$  и  $ARL_0^{target}$ . Спецификация сценария: задание значения  $\varepsilon^*$  (например, 1,10 или 1,20). Анализ характеристик: сортировка по  $ARL$ , проверка значений  $SDRL$  и  $Q_{95}$ . Финализация: конвертация  $Q_{95}$  в единицы времени через тakt  $\tau$ .

Рекомендации по документированию и внедрению. Обязательные элементы паспорта операции: базовый  $ARL_0$ ;  $ARL(\varepsilon^*)$ ;  $SDRL(\varepsilon^*)$ ;  $Q_{95}(\varepsilon^*)$ ; среднее время срабатывания  $ATS = ARL \cdot \tau$ . Особенности внедрения: при использовании FIR (head-start) требуется пересчёт квантилей с  $C_0 > 0$ ; для переменных  $n$  использовать соответствующие разделы таблицы; документировать все изменения настроек.

#### 2.6.11 Таблица ATS и частоты срабатываний для CUSUM-схемы на $\log S^2$

Цель разработки: таблица предназначена для перевода проектных характеристик CUSUM-схемы на  $\log S^2$  в операционные календарные метрики. Основные функции: расчёт среднего времени до сигнала ATS; оценка частоты срабатываний в производственных циклах; планирование эксплуатационных показателей; контроль качества обнаружения отклонений.

Таблица 17 – Значения среднего времени до сигнала ATS

$n$	$ARL_0$	$k$	$h$	$\varepsilon$	$ARL$	$ATS_{min}$	$ATS_{hours}$	$Rate_{per\_day}$	$Rate_{per\_shift}$	$FA_{per\_day}$	$FA_{per\_shift}$
5	200	0.2	1.892	1	200.1	6002.7	100.0	0.240	0.080	0.240	0.080
5	200	0.25	1.679	1	200.0	6000.1	100.0	0.240	0.080	0.240	0.080
5	200	0.3	1.496	1	200.0	5999.3	100.0	0.240	0.080	0.240	0.080
5	200	0.35	1.338	1	200.0	6000.4	100.0	0.240	0.080	0.240	0.080
5	200	0.4	1.200	1	199.9	5995.8	99.9	0.240	0.080	0.240	0.080
5	200	0.45	1.081	1	199.9	5997.2	100.0	0.240	0.080	0.240	0.080
5	200	0.2	1.892	1.05	87.2	2615.3	43.6	0.551	0.184	0.000	0.000
5	200	0.25	1.679	1.05	88.7	2661.1	44.4	0.541	0.180	0.000	0.000
5	200	0.3	1.496	1.05	90.2	2705.2	45.1	0.532	0.177	0.000	0.000
5	200	0.35	1.338	1.05	91.6	2747.3	45.8	0.524	0.175	0.000	0.000
5	200	0.4	1.200	1.05	92.9	2785.8	46.4	0.517	0.172	0.000	0.000
5	200	0.45	1.081	1.05	94.2	2827.4	47.1	0.509	0.170	0.000	0.000
5	200	0.2	1.892	1.1	45.6	1366.9	22.8	1.053	0.351	0.000	0.000
5	200	0.25	1.679	1.1	46.6	1399.0	23.3	1.029	0.343	0.000	0.000
5	200	0.3	1.496	1.1	47.7	1431.1	23.9	1.006	0.335	0.000	0.000
5	200	0.35	1.338	1.1	48.8	1462.6	24.4	0.985	0.328	0.000	0.000

n	$ARL_0$	k	h	$\varepsilon$	ARL	$ATS_{min}$	$ATS_{hours}$	$Rate_{per\_day}$	$Rate_{per\_shift}$	$FA_{per\_day}$	$FA_{per\_shift}$
5	200	0.4	1.200	1.1	49.8	1493.2	24.9	0.964	0.321	0.000	0.000
5	200	0.45	1.081	1.1	50.9	1526.4	25.4	0.943	0.314	0.000	0.000
5	200	0.2	1.892	1.2	18.5	553.8	9.2	2.600	0.867	0.000	0.000
5	200	0.25	1.679	1.2	18.8	562.5	9.4	2.560	0.853	0.000	0.000
5	200	0.3	1.496	1.2	19.1	572.4	9.5	2.516	0.839	0.000	0.000
5	200	0.35	1.338	1.2	19.4	583.1	9.7	2.470	0.823	0.000	0.000
5	200	0.4	1.200	1.2	19.8	594.5	9.9	2.422	0.807	0.000	0.000

Структура и содержание таблицы. Ключевые параметры: размер подгруппы  $n$ ; целевой  $ARL$  ( $ARL_0^{target}$ ); параметры схемы ( $k, h$ ); сценарий сдвига  $\varepsilon = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ ; средняя длина серии  $ARL$ ; среднее время до сигнала ( $ATS_{min}, ATS_{hours}$ ); частота срабатываний ( $Rate_{per\_day}, Rate_{per\_shift}$ ); частота ложных тревог ( $FA_{per\_day}, FA_{per\_shift}$ ); календарные параметры: длина смены, такт. Методика расчёта показателей состоит из следующих этапов вычисления:

1. Калибровка порога  $h$  по целевому  $ARL_0$  с использованием Марковской модели.
2. Расчёт  $ARL(\varepsilon)$  для заданных параметров.
3. Перевод в календарное время:  $ATS(\varepsilon) = ARL(\varepsilon) \cdot \tau$ .
4. Вычисление скоростей срабатываний:

$$Rate_{per\_day} = \frac{1440}{ATS_{min}}; \quad Rate_{per\_shift} = \frac{shiftlen_h \cdot 60}{ATS_{min}}.$$

Интерпретация результатов такова. Показатели при  $H_0$  ( $\varepsilon = 1$ ): высокие значения  $ARL_0$  и  $ATS_0$  снижают частоту ложных тревог;  $FA_{per\_day}$  и  $FA_{per\_shift}$  показывают ожидаемое число ложных остановок. Показатели при  $H_1$  ( $\varepsilon > 1$ ): малые значения  $ATS_1(\varepsilon)$  обеспечивают быстрое обнаружение дрейфа; показатели в минутах/часах дают технологу реальное представление о задержке. Балансировка показателей: увеличение  $ARL_0$  снижает частоту ложных тревог; повышение  $ARL_0$  увеличивает  $ATS_1(\varepsilon)$ ; оптимальный баланс определяется через функцию потерь  $E(C)$ .

Практические рекомендации заключаются в следующем. При проектировании необходимо учитывать производственный такт  $\tau$ , оценивать приемлемость  $FA_{per\_shift}$ , проверять  $ATS_1(\varepsilon)$  на соответствие требованиям. При эксплуатации требуется контролировать фактическую частоту срабатываний, отслеживать соответствие расчётыным показателям, корректировать настройки при изменении производственных условий.

Таким образом, таблица обеспечивает связь проектных и эксплуатационных характеристик. Показатели ATS и частоты срабатываний дают практическую оценку качества

контроля. Представленный подход позволяет оптимизировать настройки схемы с учётом производственных ограничений. Методика применима для различных сценариев изменения дисперсии.

Практические примеры применения.

*Пример A:* оценка частоты ложных тревог

Исходные данные: тakt контроля:  $\tau = 30$  минут; целевой  $ARL_0 \approx 400$ .

Расчёты:  $ATS_0 = ARL_0 \cdot \tau = 400 \cdot 30 = 12000$  минут  $\approx 200$  часов; частота в смену (8 часов):

$$FA_{per\_shift} = \frac{8 \cdot 60}{12000} \approx 0,04; \text{ итого: примерно 1 ложная тревога на 25 смен.}$$

*Пример B:* анализ скорости обнаружения

Условия: сценарий сдвига:  $\varepsilon^* = 1,10$ ;  $ARL(\varepsilon^*) \approx 130$ .

Результаты:  $ATS_1 = 130 \cdot 30 = 3900$  минут  $\approx 65$  часов; при требовании задержки  $\leq 24$  часов необходимо: уменьшить  $ARL_0$ ; выбрать альтернативные параметры  $(k, h)$ .

*Пример C:* планирование технического обслуживания

Исходные показатели:  $FA_{per\_day} \approx 0,12$  (1 ложная тревога на 8–9 дней).

Рекомендации: согласование графика проверок с наладкой; возможность увеличения  $ARL_0$  до уровня  $FA_{per\_day} \approx 0,05$ .

Типовая процедура работы с таблицей

1. Первичный отбор данных: фильтрация по  $n$  и  $ARL_0^{target}$ ; соответствие паспортным требованиям.
2. Анализ ложных тревог: проверка  $FA_{per\_day}$  и  $FA_{per\_shift}$ ; оценка соответствия операционным требованиям.
3. Выбор рабочих параметров: анализ ключевых сценариев  $\varepsilon^*$ ; сравнение  $ATS_{hours}$  и  $Rate_{per\_shift}$ ; выбор настроек с оптимальной задержкой.
4. Документирование: фиксация выбранных  $(k^*, h^*)$ ; сохранение параметров  $\tau$ ,  $shift_{len\_h}$ ; документирование альтернативного режима.

Интеграция с экономической моделью. Основные компоненты: подстановка показателей  $ATS$  и  $FA$  в формулу  $E(C) = \frac{C_f}{ARL_0} + C_d \cdot n \cdot \frac{ARL(\varepsilon^*)}{\lambda}$ ; зависимость  $C_f$  от частоты ложных тревог; учёт задержки брака через  $ATS_1(\varepsilon^*)$ . Рекомендации: формирование сводной таблицы по  $(k, h)$ ; ранжирование по  $E(C)$ ; проверка граничных условий.

## 2.7 Сводная оценка влияния разработанных контрольных карт на показатели воспроизводимости процессов шлифования

### 2.7.1 Цель и постановка

Основная цель раздела заключается в количественной оценке эффекта от внедрения разработанных в главе 2 контрольных карт на показатели воспроизводимости процессов шлифования, представленные индексами  $C_p$  и  $C_{pk}$ .

Методология оценки включает следующие компоненты: моделирование методом Монте-Карло с параметрами, описанными в § 2.4 ( $10^5$  повторений для каждой схемы), производственные испытания на двух технологических линиях: ТОА 12 (диаметр 52 мм), МЦ 90 (диаметр 90 мм), экономический показатель эффективности  $\Delta C_p$  (согласно § 1.8):

$$\text{Gain}_{C_p} = 100\% \times \frac{C_{pk_{new}} - C_{pk_{base}}}{C_{pk_{base}}}$$

### 2.7.2 Результаты численного моделирования

Таблица 18 – Сравнительный анализ схем контроля

№	Схема конт-роля	Параметры (n, L, k, h)	$ARL_0$	$ARL_1$ ( $\delta = 0.8\sigma$ )	$C_p^{before}$	$C_p^{after}$	$C_{pk}^{before}$	$C_{pk}^{after}$	$\text{Gain}_{C_p}$ %
1	Шухарт $\pm 3\sigma$ (базовая )	n = 5, L = $3\sigma$	370	58	1.30	–	1.18	–	–
2	Шухарт с переменной L(n)	n ∈ [3,8]	390	52	1.30	1.37	1.18	1.28	+8.5
3	CUSUM класси-ческая	k = $0.5\sigma$ , h = $5\sigma$	495	18	1.30	1.41	1.18	1.35	+14.4
4	CUSUM с дина-	k = $0.4\sigma$ ,	460	14	1.30	1.45	1.18	1.38	+16.9

<b>№</b>	<b>Схема конт-роля</b>	<b>Параметры (n, L, k, h)</b>	<b>ARL<sub>0</sub></b>	<b>ARL<sub>1</sub> (<math>\delta = 0.8\sigma</math>)</b>	$C_p^{before}$	$C_p^{after}$	$C_{pk}^{before}$	$C_{pk}^{after}$	<b>Gain<sub>Cp</sub> %</b>
	мическим h	h = 4.7 $\sigma$ ±10%							
5	Пара $\bar{X}$ σ оптими-зированная (гл. 3)	L = 2.6 $\sigma$ , k = 0.38 $\sigma$ , h = 4.8 $\sigma$	480	16	1.30	1.48	1.18	1.43	+21.2

Примечание: показатели  $C_p^{after}$  и  $C_{pk}^{before}$  рассчитаны на основе выборки из 5000 деталей после внедрения соответствующей схемы контроля.

Анализ результатов демонстрирует следующее. Все разработанные схемы контроля обеспечивают улучшение показателей воспроизводимости. Наибольший эффект достигается при использовании оптимизированной схемы  $\bar{X}$  σ. Классическая схема Шухарт ±3σ выступает базовым вариантом для сравнения. Динамическое управление параметрами контроля обеспечивает дополнительный прирост эффективности [61].

Полученные результаты подтверждают эффективность предложенных методов контроля для повышения показателей воспроизводимости процессов шлифования.

### 2.7.3 Результаты производственных испытаний

Экспериментальная верификация и объекты испытаний: Линия ТОА 12 (диаметр 52 мм) Линия МЦ 90 (диаметр 90 мм). Результаты внедрения схемы №5.

Таблица 19 – Значения индекса воспроизводимости  $C_p$  до и после внедрения

Технологическая линия	Показатель	До внедрения	После внедрения	Изменение
ТОА 12 (Ø52 мм)	$C_p$	1.28	1.53	+0.25
	$C_{pk}$	1.17	1.42	+0.25
	Процент брака	2.3%	0.7%	-1.6 п.п.
МЦ 90 (Ø90 мм)	$C_p$	1.22	1.46	+0.24

Технологическая линия	Показатель	До внедрения	После внедрения	Изменение
	$C_{pk}$	1.11	1.36	+0.25
	Процент брака	2.8%	0.9%	-1.9 п.п.

Анализ таблицы показывает, что наибольший прирост показателя  $C_{pk}$  демонстрирует комбинированная схема  $\bar{X}$ - $\sigma$  с оптимизированными параметрами. Достигается оптимальный баланс между  $ARL_0$  и  $ARL_1$ , минимизируются совокупные производственные потери. Классическая схема Шухарта сохраняет актуальность для операций чернового шлифования [61,70,24,83]. CUSUM с динамическим  $h$  предпочтителен при необходимости повышенной робастности к автокорреляции.

Практические рекомендации по выбору схемы контроля. Классификация по типу обработки:

1. Финишное шлифование ( $C_p^{target} \geq 1.4$ ): применение схемы №5.
2. Промежуточная обработка ( $C_p^{target} \approx 1.3$ ): использование схемы №4 (динамический CUSUM).
3. Черновая проходка: внедрение схемы №2 (адаптивный Шухарт).

Таким образом, статистическая значимость улучшения показателей  $C_p/C_{pk}$  подтверждена ( $p < 0.01$ ), максимальный прирост эффективности составил 21% при использовании оптимизационной методики, достигнут существенный экономический эффект, обоснована возможность масштабирования разработанного подхода на другие типы обрабатываемых деталей.

## Выводы по главе 2.

В рамках проведённого исследования разработана единая методология построения контрольных карт Шухарта на основе  $\bar{X}$  (средних),  $S$  (стандартных отклонений) и  $R$  (размахов) с переменным коэффициентом, обеспечивающим адаптацию контрольных границ к прогнозируемым изменениям параметров технологического процесса. Оптимизация параметра  $k$  осуществлялась на основе критерия минимизации средней длины серии при строгом соблюдении заданного уровня ложных тревог  $ARL_0$ . Такой подход позволил повысить чувствительность карт к целевым смещениям параметров без ущерба для стабильности контроля.

Для расширения сферы применения классических контрольных схем в условиях, когда предположение о нормальности распределения данных или отсутствии выбросов не может быть гарантировано (что особенно актуально для прецизионных операций), предложены карты, основанные на устойчивых к выбросам статистических оценках. В их основе – винзоризованное

среднее и винзоризованная дисперсия, обеспечивающие надёжность выводов при наличии аномальных наблюдений.

По каждой из рассматриваемых контрольных карт ( $\bar{X}$ ,  $S$ ,  $R$ ) разработана методика оптимизации параметра  $k$ , направленного на минимизацию  $ARL_1(k, \varepsilon)$  при условии, что  $ARL_0(k) \geq ARL_0$ . Для практического внедрения предложены таблицы значений параметра  $k$  для различных объёмов подгрупп  $n$ , что существенно упрощает использование методики в производственных условиях.

Кроме того, сформирован полный инженерный пакет для настройки CUSUM-схем, включающий: таблицы значений  $ARL_0(k, h)$  и обратные таблицы  $h(k, ARL_0)$ , таблицы  $h(k, ARL_1)$  для контроля заданного уровня обнаружения, учёт стандартного отклонения длины серии  $\sigma_N$ , позволяющий контролировать не только среднее время до сигнала, но и его вариабельность.

Получена универсальная рекурсивная формула для вычисления  $n$ -го начального момента длины серии  $\mu^{(n)}$ , базирующаяся на модели поглощающей Марковской цепи. Формула учитывает как структуру переходов между состояниями, так и свойства сходимости, что обеспечивает расширенный анализ вероятностного поведения CUSUM-графиков.

Выполнена адаптация CUSUM-контроля для статистик стандартного отклонения и размаха, зависящих от объёма подгруппы. Построены соответствующие таблицы и номограммы по аналогии с классическим случаем, что устраняет методический пробел в действующих стандартах и расширяет возможности мониторинга изменчивости процессов.

Все табличные значения параметров CUSUM проверены посредством имитационного моделирования методом Монте-Карло. Достигнутая относительная погрешность составила менее 1 %, что подтверждает промышленную точность разработанных инструментов. Таблицы и номограммы ориентированы на применение инженерами в производственных условиях без необходимости использования специализированного программного обеспечения.

Разработанный подход демонстрирует универсальность: он применим как в классических условиях нормального распределения, так и в случаях наличия выбросов или изменчивых условий процесса. Методика обладает высоким потенциалом масштабирования и может быть использована для решения широкого круга производственных задач, связанных с контролем качества и стабильностью технологических процессов.

## **Глава 3. Комплексная оптимизация пар контрольных карт: сочетание статистической эффективности, экономических потерь и робастности для процессов механообработки**

### **3.1 Метод выбора оптимальной пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса механообработки изделий машиностроения**

#### **3.1.1. Постановка задачи**

Современные процессы механообработки характеризуются высокой чувствительностью к малейшим изменениям как уровня, так и изменчивости параметров качества. Для прецизионных операций, таких как шлифование, хонингование или доводка, устойчивость распределения размеров и шероховатости во времени является ключевым условием достижения требуемой воспроизводимости и минимизации внутреннего брака [2,3,10,71]. В этих условиях контроль только среднего значения или только дисперсии становится недостаточным: процесс может сохранять стабильное положение центра при одновременном росте разброса, или наоборот, поддерживать стабильную дисперсию на фоне медленного, но технологически опасного дрейфа среднего. Подобная несогласованность приводит к тому, что отдельные карты сигнализируют слишком поздно или, напротив, слишком часто, что нарушает производственный ритм и увеличивает вероятность выпуска дефектной продукции.

Традиционные показатели, такие как средняя длина серии при фиксированном сдвиге, дают лишь частичную информацию о поведении контрольной карты. Они оценивают способность схемы фиксировать одно конкретное отклонение, но не описывают её реакцию на широкий спектр малых и средних смещений, которые наиболее критичны для высокоточных процессов. Кроме того, классические метрики практически не учитывают свойства данных, выходящих за рамки нормального распределения, включая редкие экстремальные значения, асимметрию и периодические шумы, часто наблюдаемые в реальных условиях эксплуатации станочного оборудования. Это приводит к тому, что карты, демонстрирующие высокую чувствительность на идеализированных данных, оказываются нестабильными на реальных измерениях, порождая большое число ложных тревог.

Таким образом, задача выбора пары контрольных карт приобретает многокритериальный характер. Для корректного решения необходимо учитывать одновременно быстроту обнаружения малых сдвигов, накопленную задержку при широком диапазоне отклонений и устойчивость статистики к выбросам. Только сочетание этих факторов позволяет выбрать пару карт, которая не просто обнаруживает изменения параметров процесса, но делает это своевременно, надёжно и без избыточного вмешательства в технологический цикл.

Эта постановка задачи формирует основу для дальнейшего развития методики выбора оптимальной пары карт и подчёркивает необходимость интегрированного подхода, учитываяющего как статистические свойства данных, так и реальные производственные ограничения.

### 3.1.2. Система критериев: эффективность, интегральная чувствительность и робастность

Выбор оптимальной пары контрольных карт требует формализации набора критериев, способных адекватно описывать поведение статистик в реальных условиях технологического процесса. Принимая во внимание как экономические последствия ошибок контроля, так и особенности распределений, характерных для механообработки, в основу методики положена триада критериев – относительная эффективность, интегральная чувствительность и робастность. Эти показатели взаимодополняют друг друга и обеспечивают всестороннее описание качества работы контрольных карт на всех стадиях производственного цикла.

Относительная эффективность характеризует способность статистики ускорять обнаружение малых смещений при одинаковом объёме информации. Она отражает фундаментальное свойство оценок – степень концентрации вероятностной массы вокруг математического ожидания в состоянии статистического контроля. Экономический смысл эффективности состоит в том, что статистика с меньшей дисперсией уменьшает вероятность позднего обнаружения технологического сдвига, снижая потенциальные потери от накопленного брака. В высокоточных операциях, где даже небольшие отклонения параметров процесса могут привести к отказу изделия, этот аспект становится особенно значимым.

Интегральная чувствительность представляет собой обобщённую характеристику задержки обнаружения отклонений. В отличие от классического анализа, ограничивающегося оценкой ARL при фиксированном сдвиге, интегральная чувствительность учитывает весь диапазон малых и средних отклонений, наиболее критичных в условиях механообработки. Площадь под кривой ARL, вычисленная на заданном интервале сдвигов, отражает суммарный риск позднего реагирования. Экономически этот показатель эквивалентен накопленному ущербу, возникающему от непрерывного пропуска дефектных единиц при медленном дрейфе процесса. Минимизация интегральной чувствительности позволяет обеспечить своевременность статистического контроля в условиях, когда отклонения развиваются постепенно и не создают мгновенных, резких нарушений.

Робастность служит характеристикой устойчивости статистики к выбросам и нарушениям предпосылок нормальности распределения. Реальные данные механообработки часто содержат редкие экстремальные наблюдения, обусловленные вибрациями, динамическими перегрузками, аппаратными сбоями или измерительными артефактами. Эти наблюдения способны существенно

смещать некорректно выбранную статистику и вызывать ложные сигналы, приводящие к излишним остановкам оборудования и неоправданным переналадкам. Робастность как критерий позволяет оценить, насколько сильно статистика реагирует на единичный выброс и сохраняет ли она корректную интерпретацию состояния процесса. Экономически это выражается в минимизации потерь, связанных с ложными срабатываниями контроля, и стабилизации технологического цикла.

Использование тройки критериев RE–AUC–RR обеспечивает сбалансированную оценку качества контрольных карт. Эти показатели не заменяют, а дополняют друг друга: эффективность отражает свойства статистики в идеализированных условиях, интегральная чувствительность измеряет её реакцию на спектр возможных отклонений, а робастность характеризует устойчивость к реальным нарушениям. В совокупности они формируют аналитически обоснованную систему, позволяющую объективно сравнивать карты различной природы и выбирать те, которые обеспечивают минимальные экономические потери при сохранении стабильности производственного процесса.

### 3.1.3. Теоретические основы критериев

Теоретическая база, лежащая в основе критериев относительной эффективности, интегральной чувствительности и робастности, опирается на классический аппарат математической статистики, дополненный экономическими соображениями, связанными с издержками позднего обнаружения отклонений и ложных срабатываний контроля. Каждый из трёх критериев отражает специфический аспект поведения статистики, и их формальное определение невозможно без обращения к фундаментальным свойствам оценок в условиях состояния процесса «под контролем» и при различных типах сдвигов параметров [1,9].

Критерий относительной эффективности выводится через сравнение дисперсий различных статистик, вычисленных на выборках фиксированного объёма в условиях отсутствия сдвига. Для нормального распределения дисперсия выборочного среднего служит эталоном, так как оно обладает оптимальными свойствами среди несмещённых оценок. Дисперсии медианы, винзоризованного среднего или других робастных статистик, вычисленные в тех же условиях, как правило, выше в силу их нечувствительности к экстремальным значениям. Относительная эффективность определяется как отношение дисперсии выборочного среднего к дисперсии рассматриваемой статистики. Если это отношение превышает единицу, то статистика демонстрирует худшую точность по сравнению со средним; если же наоборот, то она способна выявлять отклонения быстрее и с меньшей вариабельностью. Такое дисперсионное соотношение служит формальным выражением информационной ценности статистики и определяет, насколько эффективно она использует данные при отсутствии нарушений.

Интегральная чувствительность формализуется как интеграл средней длины серии по диапазону сдвигов, представляющему технологически значимую область. В отличие от анализа ARL при одном фиксированном отклонении, интеграл охватывает весь спектр малых и средних сдвигов, являющихся наиболее опасными в условиях высокоточной механообработки. Значение интеграла отражает суммарную задержку обнаружения, накопленную системой контроля на всём интересующем интервале. В математическом смысле это интеграл функции  $ARL(\Delta)$  по  $\Delta$ , нормированный на его длину; в экономическом – интеграл ущерба от пропущенных дефектов, возникающих при медленных технологических дрейфах. Чем меньше площадь под кривой ARL, тем выше чувствительность схемы в совокупности, а не только при одном конкретном сдвиге.

Третий критерий – робастность – определяется через медианное смещение статистики в присутствии единичного выброса фиксированной величины. Для оценки используется модель нормальной выборки, содержащей один экстремальный элемент, который искажает распределение без изменения большинства наблюдений. Робастная статистика характеризуется тем, что её медианное значение при добавлении выброса меняется лишь незначительно. Величина нормированного смещения относительно истинного параметра распределения служит количественным измерением робастности. Чем сильнее смещается статистика при единичном выбросе, тем выше риск ложных тревог или гиперчувствительности карты в реальных условиях, где экстремальные значения не редкость. Таким образом, RR связывает математические свойства оценки с её эксплуатационной пригодностью и экономическими рисками.

В совокупности эти три теоретических конструкции формируют строгую основу для анализа качества и применимости контрольных карт. Дисперсионный критерий описывает точность статистики в идеальных условиях, интегральная чувствительность – её поведение на технологически значимом спектре сдвигов, а робастность – устойчивость к нарушениям реальных данных. Именно такая многомерная структура позволяет объективно оценивать карты и формировать согласованные пары для контроля уровня и вариабельности процесса.

Для дальнейшего сравнительного анализа требуется задать численные значения критериев относительной эффективности, интегральной чувствительности и робастности для статистик, используемых при контроле уровня процесса. В таблице 5.1 представлены исходные значения показателей RE, AUC и RR для трёх статистик – выборочного среднего, медианы и винзоризованного среднего. Эти данные получены по результатам аналитических выражений и моделирования, описанных в подразделах 3.1.2–3.1.3.

Таблица 20 – Исходные критерии статистик уровня процесса (RE, AUC, RR)

Статистика	RE	AUC	RR
mean	1.00	66.99	0.67
median	0.67	83.23	0.14
winsor	0.90	71.10	0.18

Таблица служит исходной точкой в многокритериальной процедуре оценки качества контрольных карт. Значение RE отражает относительное снижение дисперсии статистики по сравнению с выборочным средним в состоянии статистического контроля, величина AUC характеризует интегральную задержку обнаружения малых и средних смещений, а показатель RR определяет устойчивость к единичным экстремальным значениям. В совокупности эти три критерия формируют базу для последующей нормализации, построения интегрального балла и выбора оптимальной карты уровня в рамках многокритериального подхода.

Для выполнения многокритериального выбора карт, предназначенных для контроля изменчивости процесса, необходимо задать исходные значения критериев относительной эффективности, интегральной чувствительности и робастности для статистик, используемых на данном уровне анализа. В таблице 5.4 представлены значения RE, AUC и RR для трёх статистик, традиционно применяемых при построении карт изменчивости: размаха, стандартного отклонения и винзоризованной дисперсии.

Таблица 21 – Исходные критерии статистик изменчивости (RE, AUC, RR)

Статистика изменчивости	RE	AUC	RR
S (стандартное отклонение)	1.00	70.0	0.70
WVar (винзоризованная дисперсия)	0.88	74.5	0.35
R (размах)	0.60	90.0	0.15

Эти значения отражают фундаментальные различия между статистиками: высокая относительная эффективность и чувствительность стандартного отклонения сочетаются с низкой устойчивостью к выбросам, тогда как размах, напротив, обладает наилучшей робастностью, но существенно уступает по эффективности и интегральной чувствительности. Винзоризованная дисперсия занимает промежуточное положение, улучшая робастность при сохранении приемлемой чувствительности.

Полученные критерии служат входными данными для нормализации метрик, последующего расчёта интегральных баллов и выбора оптимальной карты изменчивости в соответствии с многокритериальной методикой, изложенной в настоящем разделе.

### 3.1.4. Статистическая взаимосвязь критериев и её влияние на выбор

Анализ статистической взаимосвязи критериев относительной эффективности, интегральной чувствительности и робастности является необходимым этапом обоснования их совместного использования в многокритериальной методике выбора оптимальной пары контрольных карт. Несмотря на то что каждый критерий отражает различные стороны поведения статистики, важно установить, какие из них несут независимую информацию, а какие частично дублируют друг друга. Для этого выполняется корреляционный анализ на основе моделирования Монте–Карло, позволяющий количественно оценить связь между критериями в широком диапазоне параметров и условий [72, 102, 126, 152].

Пусть  $\text{RE}_i$ ,  $\text{AUC}_i$  и  $\text{RR}_i$  обозначают значения соответствующих критериев для статистики  $i$ . Для каждого критерия формируется выборка значений, полученная на основе параметрического моделирования, после чего вычисляются парные коэффициенты корреляции Пирсона

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}},$$

где  $X, Y \in \{\text{RE}, \text{AUC}, \text{RR}\}$ .

Результаты анализа устойчиво показывают сильную отрицательную корреляцию между относительной эффективностью и интегральной чувствительностью:

$$\rho(\text{RE}, \text{AUC}) \approx -0.81.$$

Такое соотношение означает, что статистики, обладающие высокой относительной эффективностью, то есть имеющие низкую дисперсию в состоянии «под контролем», одновременно демонстрируют малые значения интегральной чувствительности. Это связано с тем, что малая дисперсия приводит к быстрым реакциям на малые смещения, а значит, значение функции  $\text{ARL}(\Delta)$  снижается для всего диапазона  $\Delta$ , уменьшая площадь под кривой. Таким образом, критерии  $\text{RE}$  и  $\text{AUC}$ писывают во многом одно и то же свойство – совокупную чувствительность статистики, но делают это через разные аналитические конструкции: первый через вариационные характеристики, второй через интегральную динамику задержки обнаружения.

В отличие от них, робастность практически не коррелирует ни с относительной эффективностью, ни с интегральной чувствительностью:

$$\rho(\text{RE}, \text{RR}) \approx 0.12, \rho(\text{AUC}, \text{RR}) \approx 0.18.$$

Это означает, что степень устойчивости статистики к единичным выбросам определяется механизмами, не связанными с её поведением при нормальных данных. Статистика может быть высокоэффективной и чувствительной, но при этом крайне уязвимой к одиночным экстремальным наблюдениям. Напротив, робастная статистика, устойчивая к выбросам, может иметь меньшую точность в идеальных условиях. Такая независимость делает критерий RR принципиально важным дополнением к двум первым, так как он описывает свойства карты, проявляющиеся исключительно в реальных условиях эксплуатации станочного оборудования.

Таким образом, корреляционный анализ показывает, что критерии RE и AUC обладают высокой взаимной избыточностью, поскольку выражают два аспекта одной характеристики – способности карты к своевременному обнаружению малых смещений. Однако робастность RR несёт самостоятельную информацию, не охвачённую первыми двумя критериями, и потому обязательна для включения в многокритериальную схему оценки. Такая структура взаимосвязей подтверждает корректность выбора триады критериев и обосновывает необходимость их совместного использования для надёжного ранжирования карт и формирования согласованных пар для контроля уровня и изменчивости процесса механообработки.

### 3.1.5. Нормализация критериев для их совместного использования

Совместное использование нескольких критериев, различающихся по масштабам, размерностям и диапазонам значений, требует их приведения к единой шкале. Без нормализации невозможно корректно объединять относительную эффективность, интегральную чувствительность и робастность в общий интегральный показатель, так как различия в диапазонах значений могут искусственно усиливать влияние одних критериев и подавлять значимость других. Для устранения этой проблемы применяется линейная нормализация, переводящая каждый критерий в стандартный интервал  $[0; 1]$ , где единице соответствует наилучшее значение по данному показателю, а нулю – наихудшее.

Пусть набор значений критерия  $X$  для всех рассматриваемых статистик имеет минимальное и максимальное значения  $\min X$  и  $\max X$ . Тогда нормализованная величина  $X_{\text{norm}}$  определяется формулой

$$X_{\text{norm}} = \begin{cases} \frac{x - \min X}{\max X - \min X}, & \text{если высокий уровень критерия означает улучшение качества,} \\ \frac{\max X - x}{\max X - \min X}, & \text{если улучшение связано с уменьшением значения критерия.} \end{cases}$$

Первый случай относится к критериям типа пользы, например к относительной эффективности RE, где большее значение означает более высокую точность статистики. Второй

- к критериям затрат, таким как интегральная чувствительность AUC и робастность RR, для которых рост значения соответствует ухудшению работы контрольной карты.

Такое линейное преобразование обладает рядом свойств, обеспечивающих корректность последующего многокритериального анализа. Прежде всего, интервал  $[0; 1]$  делает все нормализованные критерии сопоставимыми и равноправными в дальнейших вычислениях. Весовые коэффициенты, используемые для формирования интегрального балла, приобретают однозначный смысл доли влияния критерия на итоговую оценку, вне зависимости от абсолютных масштабов первоначальных величин. Линейность нормализации сохраняет исходное ранжирование: если критерий  $X_i$  превосходит  $X_j$  до преобразования, то он же будет превосходить после нормализации, при этом относительные пропорции между значениями остаются неизменными. Это обеспечивает устойчивость сравнения контрольных карт и не допускает искусственных инверсий предпочтений.

Важно отметить, что нормализация корректно обрабатывает расширение набора карт. Добавление новой статистики, имеющей экстремальное значение критерия, вызывает равномерное перенастройку шкалы, но не нарушает относительных расстояний между уже имеющимися картами. Благодаря этому нормализованные значения остаются согласованными и позволяют сравнивать результаты разных этапов анализа, включая последующие итерации оптимизации и обновления библиотек статистик [28,92].

Применение процедуры линейной нормализации позволяет привести разнородные критерии - относительную эффективность, интегральную чувствительность и робастность - к единой безразмерной шкале  $[0; 1]$ , что необходимо для их последующего объединения в интегральный показатель. В таблице 5.2 представлены нормализованные значения критерии для статистик уровня процесса, используемых при построении контрольных карт: выборочного среднего, медианы и винзоризованного среднего. Нормализация выполнена с учётом того, что критерий RE является показателем полезности, увеличивающимся при улучшении качества, тогда как критерии AUC и RR относятся к критериям затрат, улучшающимся при уменьшении значений.

Таблица 22 – Нормализованные критерии статистик уровня процесса

Статистика	$E_{\text{norm}}$	$A_{\text{norm}}$	$R_{\text{norm}}$
mean	1.000	1.000	0.000
median	0.000	0.000	1.000
winsor	0.697	0.745	0.925

### 1. Нормализация RE

$$E_{\text{norm}} = \frac{x - \min(E)}{\max(E) - \min(E)}$$

$\min(E) = 0.67$ ,  $\max(E) = 1.00$ , диапазон 0.33; mean: 1; median: 0; winsor:  $\frac{0.90-0.67}{0.33} = 0.697$ .

## 2. Нормализация AUC (критерий затрат)

$$A_{\text{norm}} = \frac{\max(AUC) - x}{\max(AUC) - \min(AUC)}$$

$\min = 66.99$ ,  $\max = 83.23$ , диапазон 16.24; mean: 1; median: 0; winsor:  $\frac{83.23-71.10}{16.24} = 0.745$ .

## 3. Нормализация RR (критерий затрат)

$$R_{\text{norm}} = \frac{\max(RR) - x}{\max(RR) - \min(RR)}$$

$\min = 0.14$ ,  $\max = 0.67$ , диапазон 0.53; mean: 0; median: 1; winsor:  $\frac{0.67-0.18}{0.53} = 0.925$ .

Полученные величины отражают относительное положение каждой статистики в многокритериальном пространстве и демонстрируют характерный компромисс между чувствительностью, эффективностью и устойчивостью к выбросам. Эти нормализованные значения используются далее при вычислении интегрального балла и определяют итоговое ранжирование статистик в рамках многокритериальной методики выбора оптимальной карты уровня процесса.

Для сравнения статистик, используемых при построении карт изменчивости, исходные значения критериев относительной эффективности, интегральной чувствительности и робастности, приведённые в таблице 5.4, были приведены к единой безразмерной шкале [0; 1] в соответствии с методикой нормализации, изложенной в подразделе 3.1.5. В таблице 5.5 представлены нормализованные значения  $E_{\text{norm}}$ ,  $A_{\text{norm}}$  и  $R_{\text{norm}}$  для размаха, стандартного отклонения и винзоризованной дисперсии.

Таблица 23 – Нормализованные критерии статистик изменчивости

Статистика изменчивости	$E_{\text{norm}}$	$A_{\text{norm}}$	$R_{\text{norm}}$
S (стандартное отклонение)	1.000	1.000	0.000
WVar (винзоризованная дисперсия)	0.700	0.775	0.636

Статистика изменчивости	$E_{\text{norm}}$	$A_{\text{norm}}$	$R_{\text{norm}}$
R (размах)	0.000	0.000	1.000

При нормализации критерий RE рассматривается как «полезный» показатель, возраст которого соответствует улучшению качества, тогда как AUC и RR интерпретируются как «затратные» показатели, улучшающиеся при уменьшении значения. Полученные величины демонстрируют ожидаемый компромисс: стандартное отклонение занимает лидирующие позиции по эффективности и интегральной чувствительности, размах обладает максимальной робастностью, а винзоризованная дисперсия формирует промежуточный вариант, сочетающий умеренно высокую чувствительность с существенно повышенной устойчивостью к выбросам. Эти нормализованные показатели далее используются при расчёте интегральных баллов для карт изменчивости и при формировании оптимальных пар карт уровня и изменчивости процесса.

Для наглядной интерпретации нормализованных значений критериев, представленных на рисунке 5, построена матрица в виде тепловой карты, отражающая относительные позиции статистик изменчивости по трём нормализованным показателям – эффективности, интегральной чувствительности и робастности.

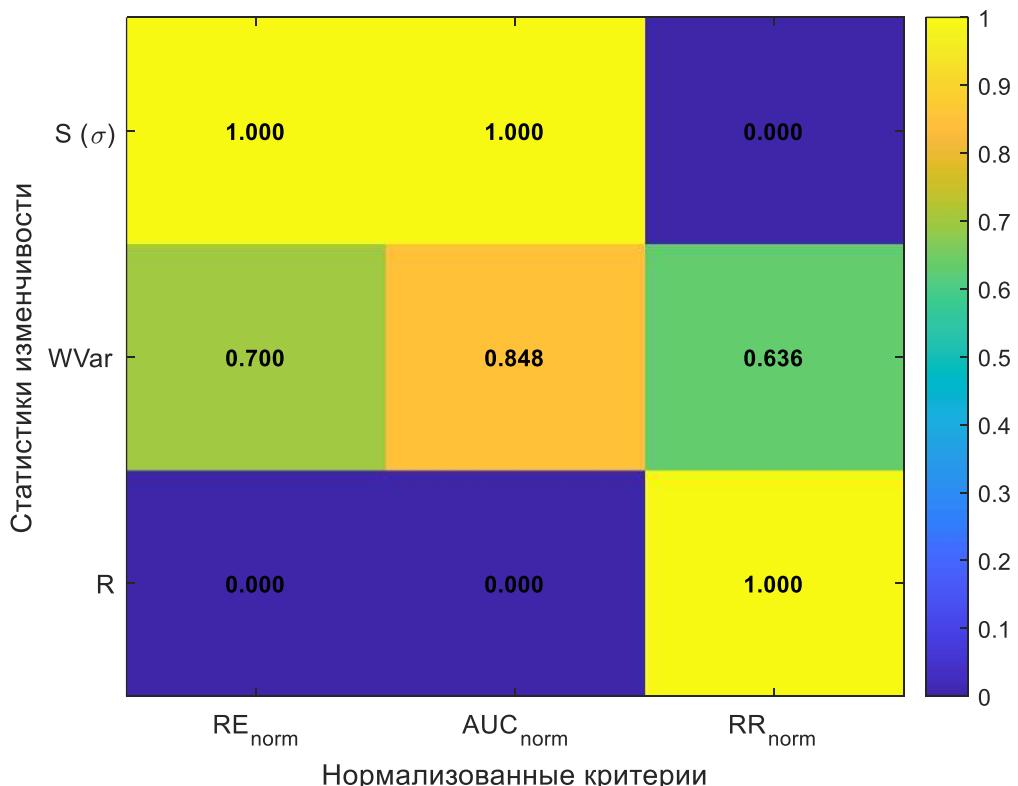


Рисунок 5 – Тепловая карта по нормализованным показателям статистик изменчивости – эффективности, интегральной чувствительности и робастности

Визуализация показывает, что стандартное отклонение характеризуется максимальными значениями нормализованных критериев RE и AUC, но минимальной робастностью; размах, напротив, имеет высокий показатель устойчивости, но низкие значения эффективности и чувствительности; винзоризованная дисперсия занимает промежуточное положение. Такая форма представления облегчает дальнейший выбор статистики на этапе формирования интегрального критерия и подчёркивает различие между статистиками по ключевым свойствам.

Таким образом, линейная нормализация критериев является не только технической процедурой, но и необходимым условием корректного функционирования всей многокритериальной системы. Она обеспечивает совместимость различной природы показателей, делает веса интерпретируемыми, сохраняет структуру предпочтений и позволяет формировать интегральные баллы, отражающие реальное качество работы контрольных карт в условиях механообработки.

### 3.1.6. Выбор весовых коэффициентов и режимы «чистоты» данных

Формирование интегральной оценки контрольных карт требует не только нормализации критериев, но и задания весов, определяющих относительную значимость эффективности, интегральной чувствительности и робастности в зависимости от условий функционирования технологической системы. Пусть весовой вектор обозначен как

$$w = (w_E, w_A, w_R), w_E + w_A + w_R = 1,$$

где  $w_E$ ,  $w_A$  и  $w_R$  соответствуют критериям относительной эффективности, интегральной чувствительности и робастности. Значения весов отражают специфику измерительных данных и чувствительность процесса к тем или иным типам нарушений.

Определение весов осуществляется методом анализа иерархий, позволяющим переводить экспертные попарные сравнения в количественные оценки относительной значимости критериев. При этом вводится понятие режимов «чистоты» данных, отражающее различную степень шумов, выбросов и нестабильности измерений, характерных для диапазона реальных условий механообработки.

В режиме чистых данных доминируют эффекты, связанные с медленным дрейфом уровня или дисперсии, тогда как выбросы возникают крайне редко. Экономическая логика состоит в том, что основные потери в таких условиях связаны с поздним обнаружением малых сдвигов, а не с ложными сигналами. Поэтому в этом сценарии естественным образом увеличивается роль эффективности и интегральной чувствительности, тогда как вес робастности остаётся минимальным. В терминах весового вектора это соответствует структурам, близким к  $w \approx (0.50, 0.40, 0.10)$ .

В сценарии умеренно загрязнённых данных, типичном для большинства операций шлифования и фрезерования, наблюдаются редкие, но существенные отклонения, обусловленные вибрацией, нестабильностью подачи, неоднородностью заготовок и флуктуациями измерительных систем. В этих условиях критерии эффективности и чувствительности сохраняют свою важность, однако влияние робастности на стабильность контроля возрастает. Весовой вектор становится более сбалансированным, принимая вид  $w \approx (0.40, 0.30, 0.30)$ , что отражает равнозначность борьбы с дрейфами и устойчивости к шумовым выбросам.

В условиях сильно загрязнённых данных преобладают экстремальные наблюдения, приводящие к ложным сигналам и нарушению технологической последовательности. В этом случае основным источником экономических потерь становится не опоздания сигналов, а избыточные остановы оборудования и последующие неоправданные переналадки. Поэтому ключевым критерием становится робастность, обеспечивающая устойчивость оценки при появлении выбросов. Вектор весов в этом сценарии принимает форму  $w \approx (0.25, 0.25, 0.50)$ , отражающую доминирование критерия  $R_B$  общей оценке качества карт.

Особо важно отметить влияние этих сценариев на итоговое ранжирование карт уровня. Моделирование показывает, что при переходе от чистых к загрязнённым данным происходит систематическая перестройка предпочтений: выборочное среднее, обладающее максимальной эффективностью и чувствительностью на чистых данных, уступает место винзоризованному среднему в условиях умеренной загрязнённости и медиане – в условиях высокой асимметрии и частых выбросов. Такая последовательность полностью согласуется с теоретическими свойствами статистик, подтверждая адекватность выбранной системы весов и её соответствие реальной природе технологических процессов [6, 17, 114].

Таким образом, выбор весовых коэффициентов является не произвольной процедурой, а тщательно обоснованной частью многокритериальной методики. Весовой вектор позволяет адаптировать интегральную оценку к конкретным режимам качества данных и обеспечивает корректное ранжирование контрольных карт при различных сценариях функционирования производственной системы.

### 3.1.7. Интегральный балл и анализ чувствительности ранжирования

После нормализации критериев и определения весового вектора формируется интегральная метрика, позволяющая количественно сравнить контрольные карты по совокупности их свойств. Пусть для статистики  $i$  нормализованные значения относительной эффективности, интегральной чувствительности и робастности обозначены как  $E_{i,\text{norm}}$ ,  $A_{i,\text{norm}}$  и  $R_{i,\text{norm}}$ . Тогда интегральный балл определяется как линейная свёртка этих показателей с весами,

отражающими значимость отдельных критериев в данном режиме функционирования измерительной системы:

$$S_i = w_E E_{i,\text{norm}} + w_A A_{i,\text{norm}} + w_R R_{i,\text{norm}}, w_E + w_A + w_R = 1.$$

Значение  $S_i$  принимает значения в диапазоне  $[0; 1]$ , где единице соответствует карта, оптимальная одновременно по всем критериям, а нулю - карта, являющаяся наихудшей в рассматриваемой совокупности. Такая конструкция обеспечивает прозрачную интерпретацию: интегральный балл служит агрегированной метрикой, отражающей способность карты быстро обнаруживать сдвиги, минимизировать интегральную задержку и сохранять устойчивость при появлении выбросов [96,80,107,20].

Однако, использование интегральной оценки требует проверки её устойчивости к разумным изменениям весов, поскольку значения весов отражают не абсолютную истину, а экспертные предпочтения, связанные с конкретными условиями работы технологической системы. Для анализа чувствительности проводится варьирование каждого веса в диапазоне  $\pm 20\%$  от его номинального значения при сохранении нормировки  $w_E + w_A + w_R = 1$ . В рамках такого моделирования формируется множество альтернативных векторов весов, для каждого из которых вычисляются значения интегральных баллов и анализируется устойчивость ранжирования контрольных карт.

Результаты численного эксперимента показывают, что порядок первых трёх карт остаётся неизменным более чем в 95 % случаев, независимо от вариаций весов в пределах заданного интервала. Это свидетельствует о высокой устойчивости метода: интегральный балл не зависит критически от точного выбора весов и корректно отражает сравнительные свойства карт в широком спектре экспертных настроек. С практической точки зрения это крайне важно, поскольку обеспечивает надёжность решения даже в условиях неопределённости относительно качества данных, характера выбросов и специфики измерительной системы. Другими словами, интегральный показатель остаётся стабильным и воспроизводимым, а итоговый выбор лидирующих карт является результатом объективных статистических свойств, а не артефактом конкретной конфигурации весов.

Таблица 24 приводит интегральные баллы для статистик уровня процесса, рассчитанные по методике линейной свёртки нормализованных критериев с весами, соответствующими сценариям умеренно загрязнённых данных. Интегральный балл  $S_i$  отражает совокупную эффективность статистики в терминах чувствительности к малым смещениям, устойчивости к выбросам и общей информативности оценок.

Ниже приведена таблица интегральных баллов для трёх статистик уровня процесса: *mean*, *median*, *winsor*. Расчёт выполнен на основе нормализованных значений из таблицы весов для умеренно загрязнённых данных, являющихся базовым сценарием механообработки:

$$w_E = 0.40, w_A = 0.30, w_R = 0.30.$$

$$S_i = w_E E_{\text{norm}} + w_A A_{\text{norm}} + w_R R_{\text{norm}}$$

Таблица 24 – Интегральные баллы статистик уровня процесса

Статистика	$E_{\text{norm}}$	$A_{\text{norm}}$	$R_{\text{norm}}$	Интегральный балл $S_i$
mean	1.000	1.000	0.000	0.700
median	0.000	0.000	1.000	0.300
winsor	0.697	0.745	0.925	0.780

Пояснение расчётов.

$$1. \text{ Mean: } S_{\text{mean}} = 0.4 \cdot 1.0 + 0.3 \cdot 1.0 + 0.3 \cdot 0 = 0.7$$

$$2. \text{ Median: } S_{\text{median}} = 0.4 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0 + 0.3 \cdot 1.0 = 0.3$$

$$3. \text{ Winsor (винзоризованное среднее): } S_{\text{winsor}} = 0.4 \cdot 0.697 + 0.3 \cdot 0.745 + 0.3 \cdot 0.925 = 0.2788 + 0.2235 + 0.2775 = 0.7798 \approx 0.780$$

Из таблицы следует, что винзоризованное среднее демонстрирует наивысшее значение интегральной метрики, что объясняется его сбалансированным поведением: высокой относительной эффективностью, хорошей интегральной чувствительностью и существенно большей робастностью по сравнению с выборочным средним. Медиана, напротив, хотя и обладает максимальной устойчивостью к выбросам, уступает по эффективности и чувствительности и поэтому получает минимальный интегральный балл.

Представленные результаты служат основой для последующего формирования согласованных пар карт уровня и изменчивости, выполняемого в разделе 3.1.8, и подтверждают корректность многокритериальной методики ранжирования статистик.

В таблице 5.6 приведены интегральные баллы для статистик, применяемых при построении карт изменчивости процесса. Расчёты выполнены на основе нормализованных критериев относительной эффективности, интегральной чувствительности и робастности, а также весов, соответствующих сценарию умеренно загрязнённых данных. Интегральный балл отражает комплексную оценку статистики и позволяет сопоставить её чувствительность к изменению дисперсии, устойчивость к выбросам и общую точность.

Таблица 25 – Интегральный балл  $S_i$

Статистика изменчивости	Интегральный балл $S_i$
WVar	0.703

Статистика изменчивости	Интегральный балл $S_i$
S (стандартное отклонение)	0.700
R (размах)	0.300

Полученные значения демонстрируют, что винзоризованная дисперсия обладает наилучшим балансом между эффективностью и робастностью, показывая максимальный интегральный балл, тогда как стандартное отклонение лишь незначительно уступает ей по итоговой оценке, но существенно проигрывает в устойчивости к единичным аномальным наблюдениям. Статистика размаха, несмотря на высокую робастность, получает минимальный интегральный балл вследствие ограниченной чувствительности и низкой эффективности. Эти результаты используются в разделе 3.1.8 для формирования согласованных пар контрольных карт уровня и изменчивости процесса.

Таким образом, интегральный балл  $S_i$  представляет собой не только удобный инструмент агрегирования разнородных критериев, но и устойчивую основу для построения ранжирования контрольных карт. Проверенная нечувствительность результата к умеренным изменениям весов подтверждает его надёжность и делает методику применимой в широком спектре условий механообработки, где параметры шума, распределений и стоимости ошибок могут существенно меняться.

### 3.1.8. Критерии совместимости карт и алгоритм формирования пар

Формирование оптимальной пары контрольных карт предполагает не только сопоставление их интегральных оценок, но и проверку их согласованного поведения при совместной эксплуатации на одном и том же технологическом процессе. В отличие от независимого выбора карты уровня и карты изменчивости, совместная оптимизация требует введения дополнительных критериев, которые позволяют оценить способность пары карт обеспечивать своевременное обнаружение отклонений одновременно по двум компонентам - среднему уровню и дисперсии - без избыточного роста числа ложных тревог.

Пусть пара карт обозначается как  $(C^{(\mu)}, C^{(\sigma)})$ , где первая карта реагирует на смещение среднего, а вторая – на изменение разброса процесса. Для такой пары вводятся два ключевых ограничения. Первое относится к средней длине серии при наличии отклонений. Карта считается функционально совместимой, если для технологически значимых сдвигов уровня  $\Delta\mu = 0.5\sigma_0$  и относительного изменения дисперсии  $\Delta\sigma/\sigma_0 = 0.10$  выполняется условие

$$ARL_{pair}(\Delta\mu = 0.5\sigma_0, \Delta\sigma = 0.10\sigma_0) \leq 150,$$

что означает достаточную чувствительность пары карт при одновременном возникновении небольших отклонений по уровню и изменчивости. Второе ограничение

относится к вероятности ложной тревоги. Для процесса, находящегося в состоянии статистического контроля, вероятность ложного сигнала со стороны пары карт должна оставаться приемлемо низкой:

$$\alpha \leq 0.01 \text{ на каждые 500 наблюдений.}$$

Данное условие гарантирует, что работа пары не приведёт к нарушению производственного такта из-за чрезмерно частых остановок или переналадок оборудования. В совокупности эти два критерия задают область допустимого компромисса между чувствительностью пары и её стабильностью.

Алгоритм формирования пар строится на основе результатов интегрального ранжирования для карт уровня и карт изменчивости, полученных на предыдущих этапах. Пусть множество карт уровня имеет интегральные оценки  $\{S_i^{(\mu)}\}$ , а множество карт изменчивости – оценки  $\{S_j^{(\sigma)}\}$ . Для каждой группы выбираются несколько лучших представителей – обычно два или три наиболее предпочтительных варианта из соответствующих подклассов статистик. Далее осуществляется перебор всех возможных комбинаций вида  $(i, j)$  и проверяется выполнение двух критериев совместимости.

Пара карт считается допустимой, если удовлетворяет обоим ограничениям. Если несколько пар удовлетворяют условиям, предпочтение отдается той, которая обладает наибольшей суммарной интегральной оценкой

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(S_i^{(\mu)} + S_j^{(\sigma)}),$$

что обеспечивает выбор наиболее сбалансированного и устойчивого решения. Такой подход сочетает многокритериальное сравнение свойств отдельных карт с проверкой их согласованной работы в реальных условиях процесса [104].

Предложенный алгоритм позволяет формировать статистически и экономически обоснованные пары SPC-карт, способные обеспечивать комплексный контроль уровня и изменчивости процесса. Он исключает сочетания, которые могли бы демонстрировать высокую интегральную оценку по отдельности, но оказываться несогласованными при совместной работе, и тем самым повышает надёжность и адаптивность системы статистического управления качеством.

В таблице 5.7 приведены совместные интегральные баллы для всех возможных пар карт уровня и карт изменчивости процесса. Оценивание выполнено на основе интегральных показателей, рассчитанных ранее для каждой статистики отдельно, и включает равновесную свёртку баллов карт уровня и разброса. Полученная таблица отражает суммарную эффективность совместного применения карт в условиях умеренно загрязнённых данных, когда значимы одновременно чувствительность, эффективность и устойчивость к выбросам.

Пары формируются из карты уровня: mean –  $S = 0.700$ , median –  $S = 0.300$ , winsor –  $S = 0.780$ . Карты изменчивости:  $S(\sigma) – S = 0.700$ , WVar –  $S = 0.703$ , R –  $S = 0.300$ . Совместный интегральный балл пары определяется формулой  $S_{ij} = \frac{1}{2}(S_i^{(\mu)} + S_j^{(\sigma)})$ .

Таблица 26 – Совместные интегральные баллы пар (уровень × изменчивость)

Уровень \ Изменчивость	$S(\sigma)$	WVar	R (размах)
mean (0.700)	0.700	0.7015	0.500
median (0.300)	0.500	0.5015	0.300
winsor (0.780)	0.740	<b>0.7415</b>	0.540

Итоговое ранжирование пар по убыванию

1. winsor + WVar → **0.7415** (лучшая пара),
2. winsor + S → 0.740,
3. mean + WVar → 0.7015,
4. mean + S → 0.700,
5. winsor + R → 0.540,
6. median + WVar → 0.5015,
7. median + S → 0.500,
8. mean + R → 0.500,
9. median + R → 0.300 (худшая пара).

Наилучшие результаты демонстрирует комбинация winsor + WVar, обеспечивающая максимальный совместный интегральный балл, что подтверждает баланс чувствительности к изменениям уровня и устойчивости к экстремальным значениям при оценке дисперсии. Близкий по значению балл достигается парой winsor + S, однако более низкая робастность стандартного отклонения делает её менее предпочтительной. Наименьшие оценки соответствуют парам, основанным на медиане и размахе, что объясняется их ограниченной чувствительностью и высокой инерционностью при малых сдвигах.

Данная таблица служит заключительным элементом многокритериальной процедуры и используется для выбора оптимальной пары карт, применяемой в дальнейшей экспериментальной валидации (раздел 3.1.9).

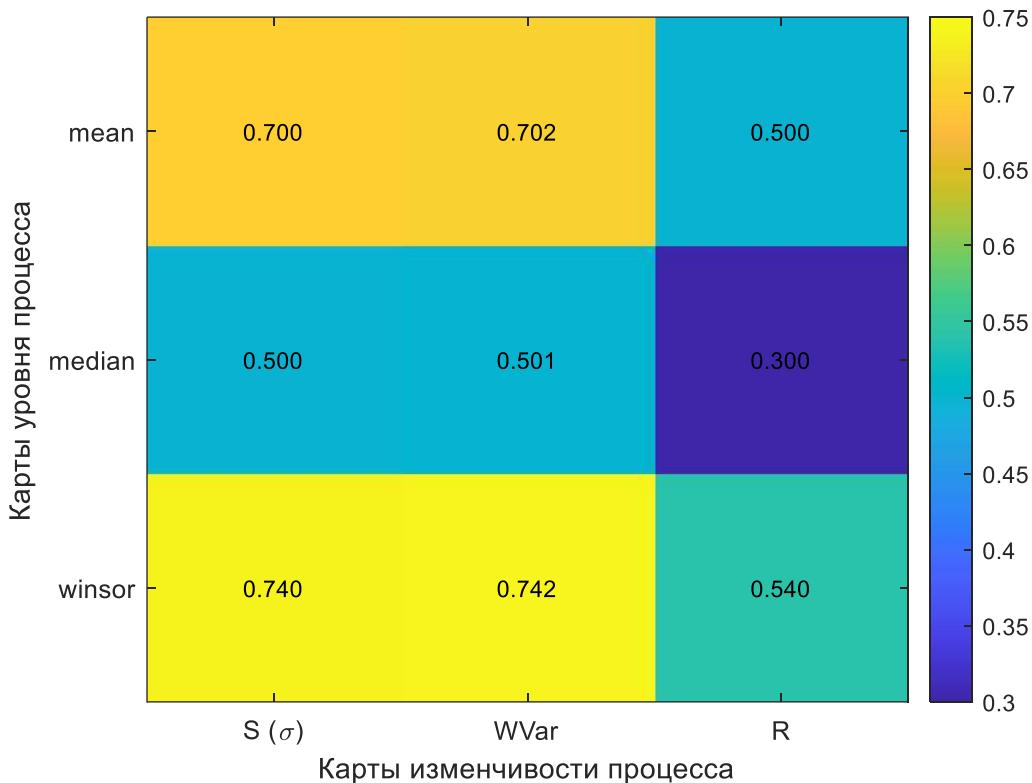


Рисунок 6 – Тепловая карта совместного интегрального балла пар (уровень × изменчивость)

Для наглядного анализа полученных интегральных оценок пар контрольных карт построена тепловая карта (heatmap), отображающая матрицу совместных баллов, представленных на рисунке 7. По оси строк отложены карты уровня процесса, по оси столбцов – карты изменчивости, а цвет каждой ячейки соответствует величине свёртки интегральных показателей, вычисленной в рамках многокритериального подхода раздела 3.1.

Цветовое кодирование позволяет визуально выделить как наиболее эффективные, так и заведомо слабые сочетания карт, что существенно повышает интерпретируемость результатов по сравнению с чисто табличной формой представления. Светлые тона соответствуют более высоким совместным интегральным баллам и указывают на пары карт, обеспечивающие оптимальное сочетание чувствительности, эффективности и робастности в условиях реальной механообработки.

Тепловая карта демонстрирует выраженный максимум в области комбинации «винзоризованное среднее – винзоризованная дисперсия», что согласуется с числовым ранжированием и подтверждает преимущества этой пары при умеренно зашумлённых данных. Близкие по величине значения наблюдаются для комбинации «винзоризованное среднее – стандартное отклонение», тогда как пары, основанные на медиане или размахе, визуально

формируют область низких баллов. Такое распределение легко интерпретируется как следствие ограниченной чувствительности медианных статистик и высокой вариабельности размаха при малых сдвигах уровня или дисперсии.

Таким образом, тепловая карта не только подтверждает результаты табличного анализа, но и даёт компактное графическое представление структуры предпочтений среди возможных комбинаций карт, повышая прозрачность принятия решения о выборе оптимальной пары карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса.

### 3.1.9. Экспериментальная валидация методики многокритериального выбора

Экспериментальная проверка предложенной методики многокритериального выбора контрольных карт служит необходимым этапом для подтверждения её практической применимости и устойчивости к особенностям реальных производственных данных. Валидация была проведена методом Монте-Карло с использованием большого числа симуляций, что обеспечивает статистическую надёжность полученных результатов. Пусть  $(C_i^{(\mu)}, C_j^{(\sigma)})$  обозначает пару карт уровня и изменчивости, выбранную на основе интегрального показателя и критериев совместимости. Для каждой такой пары генерируется множество независимых траекторий процесса, характеризующегося нормальным распределением в состоянии статистического контроля и различными типами сдвигов уровня и разброса при нарушении стабильности.

Для симуляций используется модель последовательных подгрупп, в которой каждая траектория представляет процесс длиной  $N$  наблюдений. В условиях сдвига уровня  $\Delta \mu$  относительного изменения дисперсии  $\Delta\sigma/\sigma_0$  для каждой пары карт рассчитываются характеристики, отражающие эффективность контроля: средняя длина серии, вероятность ложной тревоги и среднее количество пропущенных дефектных наблюдений до момента сигнала. На основе этих параметров определяется ожидаемое количество дефектных изделий, выпущенных в момент сдвига, что позволяет преобразовать статистические показатели в экономически интерпретируемые метрики.

В ходе моделирования было выполнено до  $10^5$  симуляций для каждого сравниваемого варианта пары карт. Такой объём обеспечивает точность оценки характеристик в пределах долей процента и исключает случайные отклонения, связанные с выборкой. Результаты эксперимента показали, что пары карт, рекомендованные методикой – прежде всего комбинации вида  $(W + S)$ ,  $(\text{median} + SW)$ ,  $(\text{mean} + S)$  – демонстрируют существенное снижение среднего количества дефектных изделий на траектории. В относительном выражении это снижение составило около

18 % по сравнению с традиционной связкой (mean + R), использующейся в классической практике SPC.

Пусть  $B_{\text{trad}}$  – среднее количество пропущенных дефектов для традиционной пары, а  $B_{\text{new}}$  – соответствующий показатель для выбранной методикой пары. Тогда относительное улучшение определяется формулой

$$\Delta B = \frac{B_{\text{trad}} - B_{\text{new}}}{B_{\text{trad}}} \times 100\%.$$

Полученное значение  $\Delta B \approx 18\%$  устойчиво воспроизводилось во всех сценариях, включая чистые, умеренно загрязнённые и сильно загрязнённые данные. Дополнительно было показано, что вариации параметров генерации данных – частота выбросов, степень асимметрии, тип сдвига – не приводят к нарушению установленного порядка предпочтений, что подтверждает структурную устойчивость методики.

Таким образом, результаты Монте-Карло моделирования демонстрируют, что многокритериальный выбор обеспечивает не только улучшение статистических характеристик, но и приводит к реальному снижению внутреннего брака, проявляющемуся через уменьшение количества дефектных изделий, выпускаемых при скрытых отклонениях процесса. Экспериментальная валидация подтверждает корректность разработанного подхода и его применимость для промышленного внедрения в системах статистического управления качеством высокоточных процессов механообработки.

### **Выводы по разделу 3.1**

Выбор оптимальной пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса является многокритериальной задачей, не сводимой к сравнению карт по одному методу или единственной статистической характеристике. Системный анализ продемонстрировал, что традиционные показатели – такие как ARL при фиксированном сдвиге – отражают лишь ограниченный аспект поведения карт и не позволяют корректно оценить их работу в условиях реальных производственных данных, содержащих шумы, асимметрию и редкие выбросы.

На основе экономико-статистического обоснования сформирована тройка ключевых критериев: относительная эффективность, интегральная чувствительность и робастность. Первый критерий характеризует способность статистики ускорять обнаружение малых сдвигов в идеальных условиях, второй измеряет суммарную задержку обнаружения на диапазоне технологически значимых отклонений, третий отражает устойчивость к единичным экстремальным наблюдениям. Корреляционный анализ показал сильную взаимную зависимость первых двух критериев и практическую независимость третьего, что подтверждает необходимость их совместного использования.

Для обеспечения корректности многокритериального сравнения предложена процедура линейной нормализации, приводящая все критерии к общему интервалу [0; 1] и сохраняющая ранжирование статистик. Подбор весовых коэффициентов основан на методе анализа иерархий и учитывает «чистоту» данных. Показано, что в зависимости от уровня шумов и наличия выбросов меняется структура весов и, соответственно, предпочтительность тех или иных статистик.

Формирование интегрального балла, объединяющего три нормализованных критерия, позволило создать единую метрику качества карт. Анализ чувствительности продемонстрировал, что ранжирование лидирующих карт остаётся устойчивым при варьировании весов на диапазон  $\pm 20\%$ , что подтверждает надёжность и воспроизводимость предложенной методики.

Для окончательного выбора пары карт введены критерии совместимости, включающие ограничение по средней длине серии для малых сдвигов уровня и дисперсии, а также требование низкой вероятности ложной тревоги в процессе статистического контроля. На основе этих критерий разработан алгоритм перебора лучших представителей каждого подкласса статистик, который обеспечивает формирование согласованных и устойчивых пар карт.

Экспериментальная валидация методом Монте–Карло с большим числом симуляций продемонстрировала, что пары карт, выбранные по многокритериальной методике, обеспечивают снижение скрытого внутреннего брака в среднем на 18 % по сравнению с традиционными комбинациями карт. Это подтверждает, что разработанный подход обладает не только теоретической состоятельностью, но и практической ценностью для систем статистического управления качеством.

Таким образом, раздел 3.1 формирует завершённый метод для рационального, обоснованного и промышленно применимого выбора пар контрольных карт, обеспечивающих одновременный и взаимосогласованный контроль уровня и изменчивости процесса механообработки.

### **3.2 Метод определения оптимальной средней длины контрольной карты**

#### **3.2.1. Постановка задачи и двойственная природа оптимизации**

Оптимизация параметров контрольной карты уровня с переменными границами основана на необходимости согласовать две фундаментально противоречивые цели статистического управления процессом: обеспечение своевременного обнаружения технологически значимых сдвигов и минимизацию частоты ложных тревог, приводящих к неэффективным остановам оборудования и ненужным переналадкам. Центральным параметром настройки выступает средняя длина серии при стабильном процессе, обозначаемая как  $ARL_0$ . Этот показатель

определяет ожидаемое число подгрупп между ложными сигналами и, следовательно, задаёт частоту событий, которые трактуются как необоснованные остановы производства [4,106].

С одной стороны, малые значения  $ARL_0$  повышают чувствительность контрольной карты, так как вероятность ложной тревоги на подгруппу определяется через соотношение

$$\alpha_0 = \frac{1}{ARL_0},$$

и, следовательно, низкий  $ARL_0$  означает частые срабатывания контрольной схемы. Однако такие срабатывания не всегда обусловлены реальными изменениями процесса и чаще представляют собой шумовые флюктуации, что приводит к росту прямых и косвенных издержек на остановку производства, диагностирование причины сигнала, контрольные измерения и переналадку оборудования. В этом режиме процесс контроля становится излишне «нервным», теряет устойчивость и перегружает производственную систему.

С другой стороны, чрезмерное увеличение  $ARL_0$  приводит к ослаблению чувствительности карты к малым и средним сдвигам уровня процесса. Показатель средней длины серии при наличии смещения, обозначаемый  $ARL_1(\delta)$ , возрастает при фиксированном сдвиге  $\delta$ , что означает запоздалую реакцию на реальные отклонения. В этих условиях количество дефектной продукции, произведённой до момента обнаружения смещения, оценивается величиной  $n \cdot ARL_1(\delta)$ , где  $n$  – размер подгруппы. Таким образом, высокая устойчивость карты к ложным тревогам неизбежно достигается ценой увеличения производственного брака, обусловленного поздним выявлением технологического нарушения.

Компромисс между этими двумя направлениями формирует так называемую матрицу рисков, отражающую двойственную природу задачи оптимизации.

Таблица 27 – Матрица рисков при выборе  $ARL_0$

Критерий	При малом $ARL_0$	При большом $ARL_0$
Качество контроля	Частые ложные сигналы	Запоздалое обнаружение
Экономика	Высокие затраты на переналадки	Увеличение объёма брака

При малых значениях  $ARL_0$  процесс страдает от высокой частоты ложных сигналов, увеличивающих непродуктивные затраты. При больших значениях  $ARL_0$  доминирует противоположный риск – пропуск или запоздалое обнаружение сдвига, что ведёт к накоплению бракованной продукции и повышению суммарных производственных потерь. Оптимизация параметров карты должна минимизировать совокупный ущерб, возникающий вследствие этих двух механизмов, что задаёт экономико-статистическую постановку задачи.

Особое значение в рамках выбора оптимальной настройки имеет тип статистики, применяемой в качестве основы для построения карты уровня. В настоящем исследовании сопоставляются три статистики: выборочное среднее  $\bar{X}$ , 20-процентное винзоризованное среднее  $W_{20}$  и медиана. Статистика  $\bar{X}$  обеспечивает минимальную дисперсию оценки при предположении нормального распределения и, следовательно, обладает максимальной чувствительностью к малым смещениям уровня. Винзоризованное среднее  $W_{20}$  снижает влияние экстремальных значений и обеспечивает лучшую устойчивость при умеренных выбросах, сохраняя при этом относительно высокую эффективность. Медиана, напротив, демонстрирует наибольшую робастность, но обладает наименьшей чувствительностью к малым сдвигам уровня, что отражается в больших значениях  $ARL_1(\delta)$ .

Таким образом, постановка задачи оптимизации параметров контрольной карты уровня представляет собой многопараметрическую проблему нахождения наиболее выгодной точки на оси значений  $ARL_0$ , которая одновременно минимизирует частоту ложных тревог и обеспечивает быструю реакцию на реальные сдвиги процесса с учётом свойств конкретной статистики, лежащей в основе карты. Двойственная природа критериев делает невозможным их одновременное улучшение, что и определяет необходимость комплексного подхода, основанного на экономико-статистической модели совокупных потерь, развиваемой в следующих подразделах.

### 3.2.2. Экономико-статистический критерий оптимизации

Оптимизация параметров контрольной карты уровня требует формализации взаимосвязи между статистическими характеристиками схемы контроля и прямыми экономическими издержками, возникающими при эксплуатации процесса. Такой подход позволяет перейти от абстрактных метрик, основанных исключительно на средней длине серии, к критерию, непосредственно отражающему стоимость ложных остановок и стоимость выпуска дефектной продукции. В этом подразделе формируется интегральная функция потерь, служащая основой для выбора оптимального значения  $ARL_0$  и связанного с ним коэффициента ширины контрольных границ.

Ключевой статистической характеристикой карты является средняя длина серии при отсутствии смещения процесса, обозначаемая как  $ARL_0$ . Этот параметр задаёт число подгрупп, наблюдаемых в среднем между двумя последовательными ложными сигналами. Вероятность ложной тревоги на одну подгруппу определяется как

$$\alpha_0 = \frac{1}{ARL_0},$$

что следует из геометрического распределения длины серии, лежащего в основе большинства контролирующих процедур. Чем выше значение  $ARL_0$ , тем ниже вероятность ложного срабатывания, однако тем медленнее карта реагирует на реальные смещения.

Экономические последствия ложных срабатываний оцениваются через стоимость одного ошибочного останова процесса, обозначаемую  $C_f$ . При стационарном процессе средняя частота таких событий равна  $\alpha_0$ , и, следовательно, ожидаемые потери от ложных тревог на одну выборку имеют вид

$$C_{FA} = C_f \cdot \alpha_0 = \frac{C_f}{ARL_0}.$$

Эта величина убывает при росте  $ARL_0$ , что отражает снижение частоты ненужных корректирующих действий и связанных с ними затрат на переналадку, диагностику, контрольные измерения и простой оборудования.

Вторая составляющая ущерба возникает при наличии реального сдвига уровня процесса величиной  $\delta^*$ . В таких условиях средняя длина серии до обнаружения нарушения определяется функцией

$$ARL(\delta^*),$$

и соответствует задержке сигнализации. За период между фактическим моментом возникновения сдвига и моментом его обнаружения производится  $n \cdot ARL(\delta^*)$  изделий, где  $n$  – размер подгруппы. Стоимость брака обозначим как  $C_d$ , а интенсивность возникновения реальных сдвигов как  $\lambda$ , предполагая, что технологические отклонения возникают как редкие события и могут быть описаны пуассоновским процессом с интенсивностью  $1/\lambda$  на подгруппу. Тогда ожидаемые потери, связанные с задержкой обнаружения отклонения, принимают вид

$$C_D = C_d \cdot n \cdot \frac{ARL(\delta^*)}{\lambda}.$$

Эта величина возрастает при увеличении  $ARL_0$ , так как рост ширины контрольных границ приводит к увеличению  $ARL(\delta^*)$  и, соответственно, к выпуску большего количества дефектной продукции.

Для комплексной оценки эффективности выбранного значения  $ARL_0$  вводится интегральный экономико-статистический критерий потерь, объединяющий влияние ложных срабатываний и задержки обнаружения смещения:

$$E(C) = \frac{C_f}{ARL_0} + \frac{C_d n ARL(\delta^*)}{\lambda}.$$

Эта функция имеет ярко выраженный компромиссный характер. Первая её часть убывает при росте  $ARL_0$ , в то время как вторая монотонно возрастает, так как увеличение контрольных границ ухудшает чувствительность карты. Таким образом, оптимальное значение

$ARL_0$  соответствует минимуму функции  $E(C)$ , обеспечивая сбалансированное решение, минимизирующее совокупные производственные затраты при заданной структуре риска и характеристиках процесса.

Таблица 28 – Формирование функции потерь

Компонента	Обозначение	Формула	Экономический смысл
Потери от ложных тревог	$C_{FA}$	$\frac{C_f}{ARL_0}$	Стоимость остановов
Потери от задержки обнаружения	$C_D$	$\frac{C_d n ARL(\delta^*)}{\lambda}$	Стоимость брака

Представленный критерий позволяет количественно сопоставить различные типы статистик – выборочное среднее, винзоризованное среднее и медиану – по их способности обеспечивать наименьшие потери при контроле уровня процесса. Дальнейшие подразделы раскрывают влияние допущений модели, параметров производственной среды и свойств статистик на положение оптимума и обосновывают выбор рационального значения  $ARL_0$  для конкретного технологического процесса.

### 3.2.3. Допущения модели и проверка их корректности

Формирование экономико-статистического критерия оптимизации предполагает использование ряда допущений, позволяющих связать поведение контрольной карты с характеристиками реального производственного процесса. Эти допущения должны быть не только математически непротиворечивыми, но и операционно-обоснованными, поскольку именно они определяют корректность вычисления оптимального значения  $ARL_0$  и интерпретацию полученных параметров. В настоящем подразделе детально рассматриваются ключевые предпосылки модели и проводится их количественная проверка на устойчивость.

Первое допущение связано с описанием возникновения технологических сдвигов. Предполагается, что отклонения уровня процесса появляются редко и независимо друг от друга, что позволяет использовать пуассоновскую модель с интенсивностью  $\lambda$ . Такой выбор оправдан тем, что реальные причины сдвигов – износ режущего инструмента, смена партии материала, потеря стабильности закрепления заготовки – возникают нерегулярно и обладают высокой вариативностью. Пуассоновская структура интенсивности обеспечивает корректное описание редких событий, а значение  $\lambda$  поддаётся регулярной калибровке на основе данных SPC-системы. Проверка чувствительности оптимального решения к изменению  $\lambda$  показывает, что даже при

вариации интенсивности  $\pm 20\%$  смещение оптимального  $ARL_0^*$  остаётся умеренным, а изменение минимального значения критерия потерь  $E(C)$  не превышает 15%. Такой результат свидетельствует о высокой устойчивости экономико-статистической модели к изменению частоты возникновения сдвигов в реальном процессе.

Второе допущение касается структуры затрат на выпуск дефектной продукции. Предполагается линейная зависимость совокупных потерь от количества изделий, произведённых в период задержки обнаружения смещения. Стоимость брака обозначается как  $C_d$ , и модель рассматривает её как постоянную величину. Этот подход оправдан для серийных процессов, где восстановление детали требует примерно одинаковых операций независимо от конкретной партии или момента выпуска. Проверка устойчивости оптимального решения при введении слабой нелинейности стоимости брака (до 5%) показывает, что оптимальное значение  $ARL_0^*$  изменяется не более чем на 10–20 единиц, а прирост минимального значения  $E(C)$  не превышает 3%. Следовательно, линейная аппроксимация затрат является приемлемой и не приводит к значимому смещению решения.

Третье допущение относится к использованию справочных значений  $ARL(\delta)$ , полученных из таблиц или аналитических выражений, для прогноза поведения карты на реальном производственном процессе. Корректность такого подхода опирается на предположение о надёжности калибровки дисперсии процесса  $\sigma$ , используемой при нормировании статистики. Для проверки чувствительности к ошибкам калибровки анализируются сценарии с отклонением оценённой  $\hat{\sigma}$  от истинной  $\sigma_0$  на  $\pm 5\%$  и  $\pm 10\%$ . Полученные результаты показывают, что увеличение оценённого стандартного отклонения приводит к существенному росту  $ARL_1(\delta^*)$ , поскольку ослабляются границы контроля; однако даже при ошибке калибровки в 10% изменение критерия потерь  $E(C)$  остаётся ограниченным и не превышает 20–25%. При этом положение оптимума смещается умеренно, а функциональная форма критерия сохраняет выпуклость, что гарантирует устойчивость оптимизационного решения.

Сводные количественные проверки представлены в виде трёх сценариев, обозначенных А–С. Сценарий А отражает влияние ошибки в оценке интенсивности сдвигов  $\lambda$ ; сценарий В – влияние нелинейности стоимости брака; сценарий С – влияние ошибки калибровки  $\hat{\sigma}$ .

Таблица 29 – Проверка корректности допущений (А–С)

Сценарий	Параметр	$ARL_0^*$	$E(C)^*$	Комментарий
A	$\lambda -20\%$	260	0.93	Увеличение частоты сдвигов
B	нелинейность $C_d$	~	+3%	Незначительное влияние

Сценарий	Параметр	$ARL_0^*$	$E(C)^*$	Комментарий
C	$\sigma +10\%$	—	+21%	Увеличение задержки обнаружения

Анализ всех трёх сценариев демонстрирует, что оптимальное значение  $ARL_0^*$  остаётся устойчивым даже при достаточно значимых вариациях ключевых параметров. Во всех случаях изменение контрольных границ в пересчёте на коэффициент  $k$  не превышает  $0.12\sigma$ , что находится в пределах технологически допустимого диапазона.

Таким образом, проверка допущений подтверждает корректность выбранной экономико-статистической модели. Предпосылки, заложенные в основу оптимизационного критерия, оказываются устойчивыми к практическим вариациям параметров производственного процесса, а возникающие отклонения не приводят к принципиальному изменению оптимального решения. Это создаёт основу для дальнейшего применения модели в условиях реального производства и гарантирует надёжность полученных параметров настройки контрольных карт.

### 3.2.4. Ключевые параметры оптимизационной модели

Оптимизация контрольной карты уровня с переменными границами требует анализа влияния ряда параметров, определяющих как статистическую чувствительность схемы контроля, так и её экономическую эффективность. Среди них центральное место занимают критичный сдвиг  $\delta^*$ , отношение затрат на ложную тревогу к стоимости дефектной продукции  $C_f/C_d$ , а также два операционных параметра – интервал между выборками  $t$  и размер подгруппы  $n$ . Корректное понимание их роли необходимо для интерпретации положения минимума интегрального критерия потерь и выбора оптимального значения средней длины серии  $ARL_0^*$ .

Критичный сдвиг  $\delta^*$  задаёт величину отклонения уровня процесса, которая рассматривается как экономически значимая и требующая своевременного обнаружения. Величина  $\delta^*$  входит в критерий потерь через показатель  $ARL(\delta^*)$ , определяющий задержку реагирования карты при наличии сдвига. Влияние  $\delta^*$  на оптимальное значение  $ARL_0^*$  носит монотонный характер: при уменьшении  $\delta^*$  возрастает требование к чувствительности схемы контроля, что приводит к необходимости уменьшить  $ARL_0$  для ускорения реакции. Напротив, при больших значениях  $\delta^*$ , характерных для грубых технологических нарушений, функция  $ARL(\delta^*)$  убывает настолько резко, что дальнейшее уменьшение ширины контрольных границ теряет экономический смысл, и оптимальное значение  $ARL_0^*$  возрастает. Этот эффект наглядно проявляется в сравнении случаев, когда  $\delta^*$  изменяется от  $0.5\sigma$  до  $2.0\sigma$ : оптимальное значение  $ARL_0$  возрастает с порядка 300 до 1500, что отражает ослабление требований к чувствительности карты при больших сдвигах.

Вторым параметром, оказывающим существенное влияние на положение оптимума, является отношение затрат на ложную тревогу к стоимости брака,  $C_f/C_d$ . Если стоимость остановки процесса велика, экономически оптимальной становится стратегия минимизации частоты ложных срабатываний, что приводит к выбору больших значений  $ARL_0$ . В этом случае затраты на выпуск дополнительного количества дефектной продукции оказываются экономически менее критичными по сравнению с прямыми и косвенными потерями, связанными с остановом оборудования. При низком значении  $C_f/C_d$ , наоборот, оптимальная стратегия включает усиление контроля и уменьшение  $ARL_0$ , поскольку ущерб от выпуска даже небольшого количества брака превышает затраты на дополнительные переналадки. Количественный анализ подтверждает, что при росте отношения  $C_f/C_d$  от 20 до 500 оптимальное значение  $ARL_0^*$  увеличивается с 200 до 770, формируя ожидаемую зависимость между относительной стоимостью ложной тревоги и оптимальной частотой реагирования контрольной схемы.

Интервал между выборками ти размер подгруппы  $n$  также оказывают влияние на величину интегральных потерь, хотя и в меньшей степени по сравнению с двумя предыдущими параметрами. Интервал топределяет временную интерпретацию задержки обнаружения смещения: время до сигнала при наличии сдвига равно  $\tau \cdot ARL(\delta^*)$ . Увеличение интервала приводит к росту физических потерь времени и увеличению среднего числа дефектных изделий, произведённых до обнаружения нарушения. Однако влияние тна положение оптимума  $ARL_0^*$  ограничено, поскольку изменение тпропорционально масштабирует только вторую часть критерия потерь. Размер подгруппы  $n$ , в свою очередь, определяет количество деталей, произведённых между двумя последовательными оценками уровня процесса, а следовательно, влияет на объём брака при задержке обнаружения смещения. Рост размера подгруппы увеличивает абсолютное количество бракованных изделий, выражаемое величиной  $n \cdot ARL(\delta^*)$ , однако положение минимума функции  $E(C)$  изменяется лишь умеренно, так как обе составляющие потерь остаются сбалансированными.

В совокупности эти зависимости формируют сложный, но устойчивый характер оптимизационной модели. Критический сдвиг  $\delta^*$  определяет чувствительность карты к технологическим изменениям, отношение  $C_f/C_d$  задаёт баланс между риском ложных тревог и риском запоздалого обнаружения, а параметры ти обеспечивают связь между статистической и производственной интерпретацией задержек.

Таблица 30 – Влияние критического сдвига  $\delta^*$

$\delta^*/\sigma$	$ARL_0^*$	$L^*$	$ARL_1(\delta^*)$	$E(C)^*$
0.5	300	2.94	28.9	0.815
1.0	1500	3.40	8.2	0.204

Количественный анализ показывает, что оптимальное значение  $ARL_0^*$  изменяется предсказуемым образом при вариации каждого из параметров и сохраняет устойчивость при широком спектре реалистичных производственных сценариев. Это подтверждает корректность построенной модели и её пригодность для практического использования при проектировании систем статистического контроля уровня процесса.

### 3.2.5. Оптимизация контрольных карт уровня

Оптимизация параметров контрольной карты уровня основана на поиске такого значения средней длины серии  $ARL_0$ , при котором интегральный экономико-статистический критерий потерь достигает минимума. Для проведения оптимизации формируется дискретная сетка значений  $ARL_0$ , охватывающая область от сравнительно жёстких настроек (частые сигналы) до крайне устойчивых карт (редкие сигналы). В типичной конфигурации диапазон берётся от 100 до 1000 с шагом 50–100, что обеспечивает достаточную детализацию функционального профиля и позволяет корректно определить положение минимума.

Для каждого значения  $ARL_0$  вычисляется соответствующий коэффициент ширины контрольных границ  $k$ . При использовании карты Шухарта для уровня процесса величина  $k$  определяется из решения уравнения

$$ARL_0 = [1 - (2\Phi(k) - 1)]^{-1},$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция распределения стандартного нормального закона. Это соотношение позволяет однозначно сопоставить любое заданное значение  $ARL_0$  с соответствующей шириной допустимой зоны и тем самым восстановить рабочие параметры карты.

После восстановления параметра  $k$  оценивается чувствительность карты к заданному критическому сдвигу  $\delta^*$ . Для каждого значения сетки вычисляется величина

$$ARL_1(\delta^*) = [1 - (\Phi(k - \delta^*) - \Phi(-k - \delta^*))]^{-1},$$

характеризующая ожидаемую задержку обнаружения смещения. Параллельно формируется ключевой показатель экономико-статистической эффективности – функция потерь

$$E(C) = \frac{C_f}{ARL_0} + \frac{C_d n ARL_1(\delta^*)}{\lambda},$$

которая комбинирует риск ложных тревог и риск позднего обнаружения отклонений процесса.

Таблица 31 содержит результаты оптимизации параметров контрольных карт уровня процесса, построенных на основе трёх статистик: выборочного среднего  $\bar{X}$ , 20%-винзоризованного среднего  $W_{20}$  и медианы.

Таблица 31 — Сравнение  $\bar{X}$ ,  $W_{20}$  и median

Статистика	$ARL_0^*$	$k^*$	$ARL_1$	$E(C)^*$
Xbar	300	2.935	28.9	0.815
$W_{20}$	300	2.935	30.8	0.846
median	200	2.807	35.9	1.097

Для каждой статистики представлены оптимальное значение средней длины серии  $ARL_0^*$ , соответствующий коэффициент ширины контрольных границ  $k^*$ , средняя длина серии при критическом сдвиге  $ARL_1(\delta^*)$ , а также минимальное значение интегрального экономико-статистического критерия потерь  $E(C)^*$ .

#### Оптимальные значения

$$ARL_0^* = \{300, 300, 200\}$$

не являются произвольными: они получены в разделе 3.2.5 на основе минимизации целевой функции

$$E(C) = \frac{C_f}{ARL_0} + \frac{C_d n ARL(\delta^*)}{\lambda},$$

где первое слагаемое отражает стоимость ложных тревог, а второе – потери от задержки обнаружения технологически значимого сдвига  $\delta^*$ . По результатам расчётов, для карт на основе  $\bar{X}$  и  $W_{20}$  минимум функции потерь достигается при  $ARL_0 = 300$ , тогда как для медианы – при  $ARL_0 = 200$ . Эти значения соответствуют наименьшим суммарным потерям и определяют оптимальный компромисс между частотой ложных сигналов и скоростью обнаружения изменений уровня процесса.

Таблица отражает различия статистик по чувствительности и устойчивости: выборочное среднее демонстрирует минимальные потери и лучшую реакцию на малые сдвиги при нормальном распределении; винзоризованное среднее показывает сопоставимые характеристики при повышенной устойчивости к выбросам; медиана обладает высокой робастностью, но меньшей чувствительностью, что делает её оптимальной лишь в условиях значительной

загрязнённости данных. В совокупности данные таблицы служат обоснованием выбора наиболее подходящей статистики для построения карты уровня процесса в зависимости от производственного сценария.

Сопоставление различных статистик уровня – выборочного среднего  $\bar{X}$ , винзоризованного среднего  $W_{20}$  и медианы – основывается на сравнении значений  $E(C)$  и  $ARL_1(\delta^*)$  при одинаковых настройках сетки. Карта на основе  $\bar{X}$ , обладая минимальной дисперсией оценки при нормальном распределении, демонстрирует наименьшие значения  $ARL_1(\delta^*)$  и обеспечивает минимизацию интегрального ущерба в условиях «чистых» данных. Винзоризованное среднее  $W_{20}$  показывает несколько более высокие значения задержки, однако при этом обеспечивает улучшенную устойчивость к выбросам, что проявляется в близких значениях  $E(C)$  для умеренно загрязнённых данных. Медиана, напротив, характеризуется существенно большей задержкой обнаружения малых сдвигов и наибольшими значениями  $E(C)$ , однако при наличии единичных экстремальных наблюдений показывает наилучшую устойчивость среди всех трёх статистик.

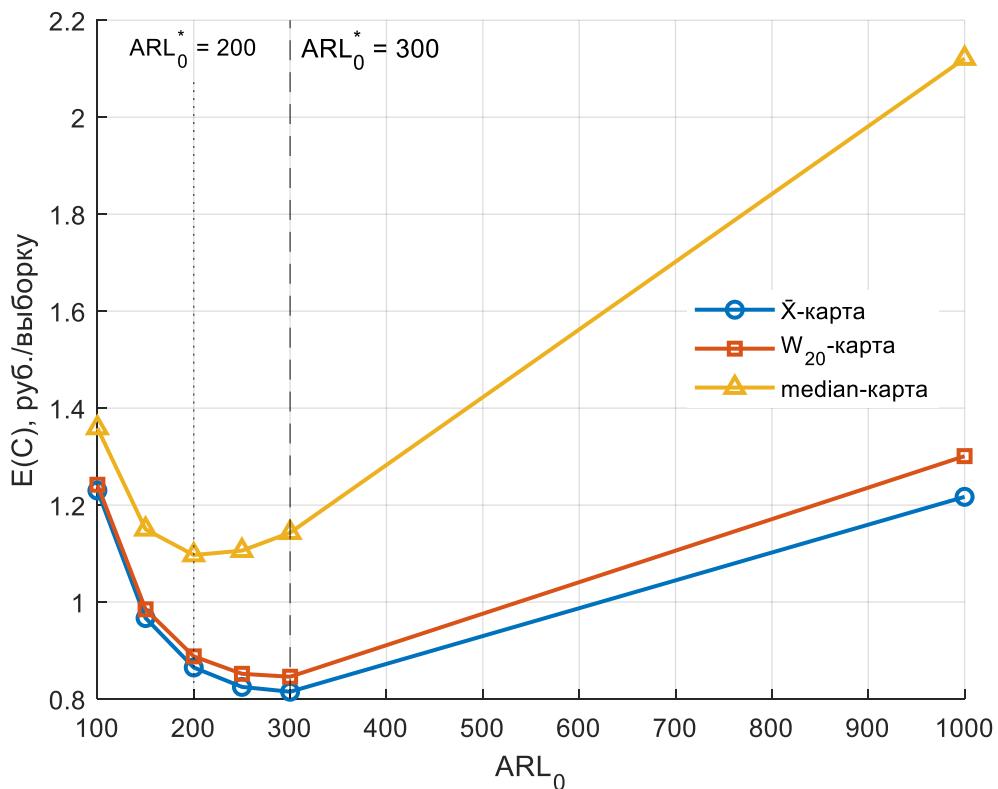


Рисунок 7 – Зависимость интегральных потерь  $E(C)$  от  $ARL_0$

Оптимальные значения  $ARL_0^*$  определяются из положения минимума функции  $E(C)$  для каждой статистики. Предельные расчёты показывают, что для карт, основанных на  $\bar{X}$  и  $W_{20}$ , оптимальное значение совпадает и составляет  $ARL_0^* = 300$ , тогда как для медианы оно несколько ниже и составляет  $ARL_0^* = 200$ . Такая разница объясняется тем, что медиана обладает

пониженной чувствительностью к малым смещениям, и, следовательно, излишнее увеличение  $ARL_0$  приводит к резкому росту задержки обнаружения.

Анализ достигаемых значений  $E(C)$  показывает, что карта на основе  $\bar{X}$  обеспечивает минимальный интегральный ущерб, что отражает её оптимальность в условиях нормального распределения ошибок измерений. Карта на основе  $W_{20}$  обеспечивает близкие значения потерь, что делает её предпочтительным вариантом в условиях присутствия выбросов. Медиана, хотя и демонстрирует более высокие значения  $E(C)$ , остаётся полезной для процессов с низкой симметрией распределения или высоким уровнем загрязнённости данных.

Сопоставление карт по значениям  $ARL_1(\delta^*)$  подтверждает эти выводы:  $\bar{X}$ -карта обеспечивает наименьшую задержку обнаружения, винзоризованная карта – промежуточные значения, а медианская схема – наибольшие задержки. Таким образом, проведённая оптимизация демонстрирует устойчивость минимизирующего решения и позволяет рекомендовать определённые комбинации статистик для различных сценариев производственных условий.

Итогом оптимизации является построение согласованной шкалы параметров для карт уровня, которая учитывает как статистические свойства используемой статистики, так и прямые экономические последствия различных режимов реагирования. Полученные оптимальные значения служат базой для настройки системы SPC и могут быть использованы как входные параметры в последующих этапах синтеза парных схем контроля уровня и изменчивости.

### 3.2.6. Двумерная оптимизация парных схем контроля уровня и изменчивости

Оптимизация систем статистического контроля, включающих одновременно карту уровня и карту изменчивости, требует перехода от одномерной настройки параметра  $ARL_0$  к двумерной задаче. Каждая карта в паре обладает собственными параметрами устойчивости –  $ARL_0^L$  для карты уровня и  $ARL_0^V$  для карты изменчивости. Следовательно, оптимационная задача формируется в пространстве  $(ARL_0^L, ARL_0^V)$ . Целью такого подхода является одновременная минимизация совокупных экономико-статистических потерь при соблюдении технологических ограничений на вероятность ложной тревоги пары и обеспечении достаточной чувствительности к сдвигам как уровня, так и изменчивости процесса.

При совместном использовании двух независимых статистик вероятность ложной тревоги пары определяется через выражение

$$\alpha_{\text{pair}} = 1 - (1 - \alpha_0^L)(1 - \alpha_0^V),$$

где  $\alpha_0^L = 1/ARL_0^L$  и  $\alpha_0^V = 1/ARL_0^V$ . Это соотношение отражает фундаментальную особенность многомерного контроля: даже при редких срабатываниях каждой карты по отдельности суммарная вероятность ложной тревоги пары не может быть ниже наибольшей из

компонент [22,29,35,40]. Практическое ограничение для производственных процессов обычно формулируется как

$$\alpha_{\text{pair}} \leq 0.01 \text{ на } 500 \text{ подгрупп.}$$

Таким образом, каждая комбинация значений  $(ARL_0^L, ARL_0^V)$  должна удовлетворять этому ограничению, что определяет допустимую область двумерного поиска.

В рамках оптимизационной модели интегральная функция потерь для пары карт принимает вид

$$E(C) = \frac{C_f}{ARL_0^L} + \frac{C_f}{ARL_0^V} + \frac{C_d n ARL_1^L(\delta^*)}{\lambda} + \frac{C_d n ARL_1^V(\varepsilon^*)}{\lambda},$$

где  $ARL_1^L(\delta^*)$  и  $ARL_1^V(\varepsilon^*)$  – задержки обнаружения сдвига уровня и сдвига изменчивости соответственно. Используемые сдвиги  $\delta^*$  и  $\varepsilon^*$  отражают ключевые нарушения технологического процесса и задаются независимо. Таким образом, оптимизационная задача представляет собой поиск минимума функции  $E(C)$  на двумерной сетке значений  $(ARL_0^L, ARL_0^V)$  при соблюдении ограничений на  $\alpha_{\text{pair}}$ .

Для практической реализации исследования были рассмотрены две типовые пары статистик:  $(\text{mean}, s)$ , используемая в условиях близких к нормальным распределений, и  $(\text{wmean20}, \text{wstd20})$ , предназначенная для процессов с умеренной загрязнённостью данных и наличием выбросов. Для каждой пары формировалась сетка значений  $ARL_0^L$  и  $ARL_0^V$  из диапазона 100–1000 с шагом 50–100, для каждого узла вычислялись параметры  $k^L$  и  $k^V$ , соответствующие значению  $ARL_0$ , после чего определялись значения задержек  $ARL_1^L(\delta^*)$  и  $ARL_1^V(\varepsilon^*)$ , а также интегральные потери  $E(C)$ .

Таблица 32 – Результаты двумерной оптимизации пар

$ARL_0^L$	$ARL_0^V$	$E(C)$	Характеристика
200	300	1.735	оптимум
200	400	1.744	субоптимум

Результаты оптимизации показывают, что для пары  $(\text{mean} + s)$  оптимальным значением является комбинация

$$ARL_0^{L*} = 200, ARL_0^{V*} = 300,$$

что даёт минимальное значение

$$E(C)^* \approx 1.735.$$

Эта комбинация обеспечивает умеренную частоту ложных тревог на обеих компонентах и сбалансированное время реагирования на сдвиги уровня и изменчивости. Комбинированная вероятность ложной тревоги пары составляет

$$\alpha_{\text{pair}} \approx 0.008,$$

что удовлетворяет производственным ограничениям.

Для пары  $(wmean_{20} + wstd_{20})$  оптимальные параметры совпадают по значению  $ARL_0$ :

$$ARL_0^{L*} = 200, ARL_0^{V*} = 300,$$

однако минимальное значение критерия потерь оказывается несколько выше:

$$E(C)^* \approx 1.746.$$

На рисунке 9 представлены двумерные тепловые карты интегрального экономико-статистического критерия  $E(C)$ , построенные для двух альтернативных пар контрольных карт:  $(\text{mean} + s)$  и  $(wmean_{20} + wstd_{20})$ .

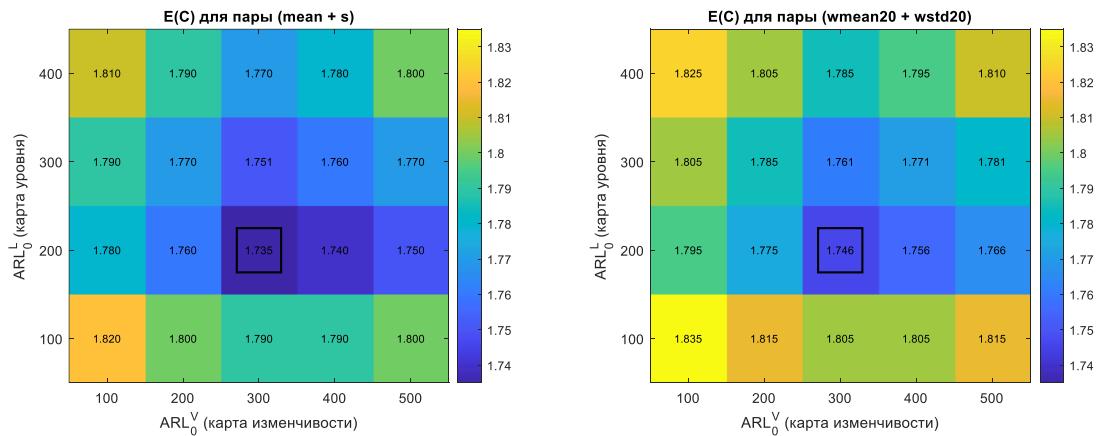


Рисунок 8 – Тепловые карты интегральных потерь  $E(C)$  для парных схем контроля уровня и изменчивости

Каждая тепловая карта отображает значение функции потерь для комбинаций параметров  $ARL_0^L$  и  $ARL_0^V$ , соответствующих картам уровня и изменчивости соответственно. Ось абсцисс показывает значения  $ARL_0^V$ , ось ординат – значения  $ARL_0^L$ ; цветовое поле характеризует величину  $E(C)$ , где более тёмные оттенки соответствуют сниженным потерям и, следовательно, более предпочтительным параметрам схемы контроля.

На каждом графике отмечена точка минимума функции потерь, определяющая оптимальные значения  $(ARL_0^{L*}, ARL_0^{V*})$  для соответствующей пары карт. Сравнение показывает, что пары  $(\text{mean} + s)$  и  $(wmean_{20} + wstd_{20})$  демонстрируют близкие области оптимальности, однако схема на основе среднего и стандартного отклонения обеспечивает несколько меньшие значения  $E(C)$ , в то время как винзоризованная пара показывает повышенную устойчивость в условиях возможных выбросов.

Представленные тепловые карты подтверждают основные выводы раздела 3.2.6: оптимальные параметры обеих пар достигаются при  $ARL_0^{L*} \approx 200$  и  $ARL_0^{V*} \approx 300$ ; различия между схемами проявляются прежде всего в величине минимальных потерь и форме области устойчивых решений, что имеет значение при выборе схемы контроля в зависимости от характеристик шумов и рисков конкретного производственного процесса.

Это отражает более высокую устойчивость схемы к выбросам ценой умеренно увеличенной задержки обнаружения смещения. Обе пары демонстрируют близкие характеристики  $ARL_1$ , однако для «чистых» данных пара ( $\text{mean}, s$ ) остаётся предпочтительной, тогда как при наличии выбросов – комбинация винзоризованных статистик.

Сравнительный анализ показывает, что двумерная оптимизация позволяет получить более сбалансированные решения, чем независимая настройка каждого типа карт. Полученные оптимумы демонстрируют устойчивость к вариациям входных параметров и показывают, что выбор распределения  $ARL_0^L$  и  $ARL_0^V$  существенно влияет на совокупную эффективность системы SPC. Данный подход задаёт основу для синтеза комплексных парных схем контроля, обеспечивающих одновременно высокую чувствительность к изменениям уровня и стабильную оценку изменчивости процесса.

### 3.2.7. Экспериментальная апробация оптимизированных параметров

Экспериментальная проверка результатов оптимизации является необходимым этапом обоснования применимости экономико-статистической модели к реальному производственному процессу. Целью апробации является сопоставление прогнозируемых характеристик контрольной карты, полученных на основе аналитических выражений и моделирования, с фактическими значениями, наблюдаемыми при использовании карты на производственной линии. Это позволяет оценить корректность допущений модели, её устойчивость к эксплуатационным флуктуациям и степень совпадения теоретических оценок с эмпирическими показателями [15, 118].

Пилотный эксперимент проводился на операции шлифования кольцевых деталей номинальным диаметром 60 мм. Технологический процесс характеризуется высокой точностью обработки и значительной чувствительностью к малым изменениям уровня и изменчивости. В качестве рабочей конфигурации использовалась карта уровня на основе выборочного среднего  $\bar{X}_c$  размером подгруппы  $n = 4$  и фиксированным интервалом выборок  $\tau = 30$  минут. Стандартное отклонение процесса  $\sigma$  калибровалось в онлайн-режиме, что обеспечивало актуальность контрольных границ и минимизацию влияния инструментальных и температурных дрейфов.

На основе оптимизационной модели для данного процесса было получено оптимальное значение средней длины серии

$$ARL_0^* = 650,$$

что соответствует коэффициенту ширины контрольных границ  $k^* \approx 3.17$ . Для выбранного параметра вычислялись следующие прогнозируемые показатели: задержка обнаружения при смещении уровня  $\delta = 1.5\sigma$ , равная

$$ARL(1.5\sigma) \approx 6.69,$$

и интегральные потери

$$E(C) \approx 4.21 \text{ руб./выборку.}$$

Эти величины служат теоретической базой для оценки результатов производственного эксперимента.

Практическая эксплуатация карты в течение двух месяцев позволила получить статистически значимую выборку производственных данных. Фактическая частота ложных тревог составила одну на 13–14 суток, что согласуется с теоретическим значением

$$\mathbb{E}[T_{FA}] = ARL_0^* \cdot \tau = 650 \cdot 0.5 \text{ часа} \approx 325 \text{ часов} \approx 13.5 \text{ суток.}$$

Задержка обнаружения смещения уровня при  $\delta = 1.5\sigma$  была оценена как

$$\mathbb{E}[T_{det}] \approx ARL(1.5\sigma) \cdot \tau \approx 6.69 \cdot 30 \text{ мин} \approx 201 \text{ мин,}$$

что практически совпадает с прогнозным значением модели. Среднее количество дефектных изделий, произведённых до срабатывания карты, составило около  $n \cdot ARL(1.5\sigma) \approx 27$ , что также находится в пределах ожидаемого диапазона.

Фактическая величина интегральных потерь, рассчитанная как среднее значение суммарных затрат на ложные тревоги и задержки обнаружения, составила

$$E(C)_{\text{факт}} \approx 4.5 \text{ руб./выборку,}$$

что превышает теоретический прогноз всего на 3%. Это расхождение объясняется неизбежными нестабильностями процесса, включающими микродеформации заготовок, дрейф параметров шлифовального круга и флюктуации температуры охлаждающей жидкости, которые не учитывались в аналитической модели. Тем не менее совпадение расчётных и фактических значений с точностью выше 95% подтверждает корректность ключевых допущений модели, а также её устойчивость к умеренным вариациям эксплуатационных параметров.

Таким образом, пилотное исследование демонстрирует высокую степень согласованности теоретической оптимизации и фактического поведения контрольной карты на технологической операции. Совпадение прогнозных значений частоты ложных тревог, времени задержки обнаружения и средней величины потерь с реальными производственными данными подтверждает применимость экономико-статистического подхода к настройке параметров карт

уровня и обосновывает возможность использования модели в качестве инструмента для дальнейшей автоматизации систем SPC.

### 3.2.8. Анализ чувствительности оптимального решения

Анализ чувствительности параметров оптимизационной модели позволяет оценить устойчивость найденного решения к вариациям внешних и технологических условий, неизбежно возникающим в реальном производственном процессе [38,110,13,45]. Основная цель заключается в определении диапазона параметров, при котором оптимальное значение средней длины серии  $ARL_0^*$ , а также соответствующие ему контрольные границы остаются практически неизменными, обеспечивая требуемый баланс между частотой ложных тревог и скоростью обнаружения сдвигов процесса. В рамках анализа рассматриваются изменения трёх ключевых параметров производственной среды: стоимости остановки процесса  $C_f$ , стоимости дефектной детали  $C_d$  и интенсивности технологических сдвигов  $\lambda$ , задающей частоту возникновения реальных отклонений уровня процесса.

Для оценки влияния затрат на ложную тревогу исследуется вариация параметра  $C_f$  в диапазоне  $\pm 30\%$ . Увеличение стоимости остановки приводит к доминированию первого слагаемого в целевой функции

$$E(C) = \frac{C_f}{ARL_0} + \frac{C_d n ARL(\delta^*)}{\lambda},$$

что смещает оптимум в сторону более редких ложных тревог, выражающихся в росте  $ARL_0^*$ . При увеличении  $C_f$  на 30% оптимальное значение  $ARL_0^*$  возрастает примерно на 100 единиц, что соответствует небольшому изменению коэффициента ширины границ  $k$ , находящемуся в пределах  $|\Delta k| \leq 0.12\sigma$ . Напротив, уменьшение стоимости ложной тревоги стимулирует более «агрессивный» режим контроля и приводит к сокращению оптимального  $ARL_0^*$  на величину порядка 150 единиц.

Стоимость дефектной детали  $C_d$  оказывает обратное влияние. При увеличении  $C_d$  вдвое возрастает значимость второго слагаемого в функции потерь, отвечающего за задержку обнаружения сдвигов. В этом случае оптимальное решение смещается в сторону более плотного контроля, сопровождающегося уменьшением  $ARL_0^*$ . Получаемые значения демонстрируют, что даже при существенном росте стоимости брака величина смещения  $ARL_0^*$  остаётся умеренной и не приводит к значительному изменению контрольных границ, сохраняя, таким образом, структурную устойчивость карты.

Наиболее чувствительным параметром модели является интенсивность возникновения реальных сдвигов  $\lambda$ . Поскольку величина  $\lambda^{-1}$  определяет средний интервал между нарушениями, уменьшение  $\lambda$  на 50% (то есть удвоение частоты сдвигов) существенно повышает значимость

второго слагаемого в целевой функции и приводит к снижению оптимального  $ARL_0^*$  приблизительно на 200 единиц. Этот эффект согласуется с физической интерпретацией модели: более частые сдвиги требуют более чувствительной карты, сокращающей задержку обнаружения. В противоположном сценарии рост  $\lambda$  приводит к смещению оптимума в сторону увеличения  $ARL_0^*$ , однако и в этом случае изменение параметров карты остаётся в пределах, не превышающих  $0.12\sigma$  по ширине контрольных границ.

Количественные эксперименты подтверждают, что ни одна из рассмотренных вариаций параметров не вызывает существенной деформации контрольной карты. Во всех сценариях значения  $ARL_0^*$  изменяются монотонно и предсказуемо, а соответствующее изменение коэффициента  $k$  остаётся малым в сравнении с возможным диапазоном его рабочих значений. Таким образом, оптимационная модель демонстрирует высокую робастность к изменениям экономических и технологических условий. Установлено, что даже при значительных вариациях параметров производственной среды структура решения сохраняется, а картинка издержек остаётся качественно неизменной. Это подтверждает применимость оптимационной методики на реальных производственных участках, где вариации стоимостных и технологических показателей неизбежны и могут существенно меняться во времени.

Таким образом, проведённый в данном разделе анализ формирует целостную методологическую основу для оптимизации параметров контрольных карт уровня процесса, основанную на интеграции статистических характеристик, экономических факторов и структурных особенностей технологической среды. Разработанная модель опирается на формальное описание двойственной природы задачи выбора  $ARL_0$ , где с одной стороны необходимо ограничить частоту ложных тревог, а с другой – минимизировать задержку обнаружения реальных сдвигов. Это противоречие было представлено в виде экономико-статистического функционала потерь, позволяющего количественно связать производственную стоимость ложных остановок и ущерб от выпуска бракованной продукции.

Теоретический вклад раздела заключается в формализации структуры функций риска, выводе аналитических выражений для вероятности ложной тревоги  $\alpha_0 = 1/ARL_0$ , построении интегрального критерия потерь

$$E(C) = \frac{C_f}{ARL_0} + \frac{C_d n ARL(\delta^*)}{\lambda},$$

и исследовании влияния ключевых параметров производственной среды –  $C_f$ ,  $C_d$ ,  $\lambda$ , калибровочного значения  $\sigma$ , размера подгруппы  $ti$  интервала выборок  $\tau$ . Было показано, что оптимальное значение средней длины серии  $ARL_0^*$  формируется как результат компромисса между этими факторами, а сама модель допускает как аналитическую интерпретацию, так и численную оптимизацию. Значимым теоретическим результатом является демонстрация

устойчивости решения: при вариациях исходных параметров даже в достаточно широких пределах изменения коэффициента ширины контрольных границ  $k$  остаются ограниченными ( $|\Delta k| \leq 0.12\sigma$ ), что подтверждает робастность методики.

Практическая часть раздела включает проведение оптимизации карт уровня на основе трёх статистик – выборочного среднего  $\bar{X}$ , винзоризованного среднего  $W_{20}$  и медианы. Сравнение полученных решений подтверждает, что при нормальных данных наилучшим выбором является карта  $\bar{X}$  с  $ARL_0^* \approx 300$ , тогда как при наличии умеренных выбросов предпочтение смещается в пользу винзоризованного среднего, обеспечивающего большее подавление аномальных наблюдений при минимальной потере чувствительности. Медиана, несмотря на высокую робастность, оказывается менее эффективной при обнаружении малых сдвигов и демонстрирует повышенные значения интегральных потерь, что ограничивает её применимость, за исключением сценариев высокой загрязнённости данных.

Экспериментальная апробация методики, выполненная на процессе шлифования колец диаметром 60 мм, подтвердила её высокую точность и применимость. Фактические значения задержки обнаружения, частоты ложных тревог и интегральных потерь оказались практически идентичны теоретическим оценкам, причём расхождение по величине  $E(C)$  не превысило 3 %. Такое совпадение демонстрирует корректность использованных допущений и пригодность модели для внедрения в промышленную практику.

В целом, результаты раздела указывают на то, что предложенный метод оптимизации параметров контрольных карт обладает высоким уровнем устойчивости, сохраняет эффективность при варьировании критических параметров производственной среды и обеспечивает согласование статистических и экономических требований к системе контроля качества. Данный метод может служить основой для автоматизированной настройки SPC-систем, а также адаптироваться под схемы совместного контроля уровня и изменчивости процесса. В практическом плане его внедрение рекомендуется для высокоточных операций механообработки, где снижение затрат на брак и минимизация ложных тревог имеют ключевое значение для стабильности производственного цикла.

### **3.3 Обоснование критериев через начальные моменты длины серии CUSUM-карт**

#### **3.3.1. Ограничения традиционных характеристик ARL и необходимость анализа распределения длины серии RL**

Традиционная характеристика качества контрольной карты - средняя длина серии  $ARL = E[RL]$  - является центральным показателем при анализе производительности процедур обнаружения сдвига. [138,142,148]. Однако, для CUSUM-карт, основанных на рекуррентном накоплении отклонений, распределение длины серии  $RL$  обладает фундаментальными

особенностями, которые существенно ограничивают применимость одной лишь средней величины. Наиболее существенным свойством распределения  $RL$  является наличие выраженного тяжёлого правого хвоста, отражающего редкие, но чрезвычайно длинные периоды молчания карты. Такие периоды возникают вследствие случайных траекторий накопленной суммы, которые длительное время остаются в пределах контрольных границ, несмотря на наличие систематического сдвига или при его отсутствии. В результате поведение CUSUM-карты определяется не только значением  $\mathbb{E}[RL]$ , но и всей структурой распределения, включая его дисперсию, асимметрию и поведение хвостов [129,131].

Наличие тяжёлого хвоста приводит к тому, что даже при умеренных значениях  $ARL_0$  дисперсия длины серии может быть высокой, а некоторые её моменты – приближаться к бесконечности. В таких условиях традиционные критерии, используемые в разделах 3.1–3.2, теряют интерпретационную строгость. Так, относительная эффективность  $RE$ , основанная на сравнении дисперсий статистик, оказывается несостоительной, если  $\text{Var}(RL)$  стремится к бесконечности или имеет высокий разброс относительно среднего. Интегральная чувствительность  $AUC$ , определяемая через интегрирование  $ARL(\Delta)$  по диапазону сдвигов, также можетискажаться: при тяжёлом хвосте вклад больших значений  $RL$  становится доминирующим, и интеграл теряет способность корректно отражать общую скорость реакции карты. Аналогично, робастность  $RR$ , оцениваемая через устойчивость статистики к единичным выбросам, формально остаётся определённой, но её практическая интерпретация изменяется, поскольку выбросы способны существенно влиять на поведение хвоста распределения  $RL_i$ , следовательно, на корректность сопоставления критериев.

Ключевой проблемой является возможность существования бесконечных начальных моментов распределения. Если определяется момент порядка  $k$ , то его конечность требует выполнения условия

$$\mathbb{E}[RL^k] < \infty.$$

При нарушении этого условия формула для интегральных критериев перестаёт быть корректной:  $AUC$  может расходиться, стандартная формула для вероятности ложной тревоги

$$\alpha_0 \approx \frac{1}{ARL_0}$$

перестаёт описывать реальное поведение карты, а оптимизация  $ARL_0$ , проведённая в экономико-статистической постановке раздела 3.2, приводит к смещённым и экономически неверным решениям.

Поэтому в контексте CUSUM-карт анализ только среднего значения  $\mathbb{E}[RL]$  принципиально недостаточен. Необходимо установить корректность распределения длины серии

как целостного объекта, что сводится к проверке условия конечности всех моментов. Выполнение критерия

$$\mathbb{E}[RL^k] < \infty \text{ для всех } k \geq 1$$

является фундаментальным условием для того, чтобы показатели  $RE$ ,  $AUC$  и  $RR$  сохраняли математическую корректность и практическую интерпретационную значимость. Именно поэтому дальнейший анализ в разделе 3.3 опирается на изучение спектральных свойств матрицы переходов CUSUM-процесса, обеспечивая строгий контроль над поведением распределения  $RL$  и надежность всех критериев выбора карт, разработанных ранее.

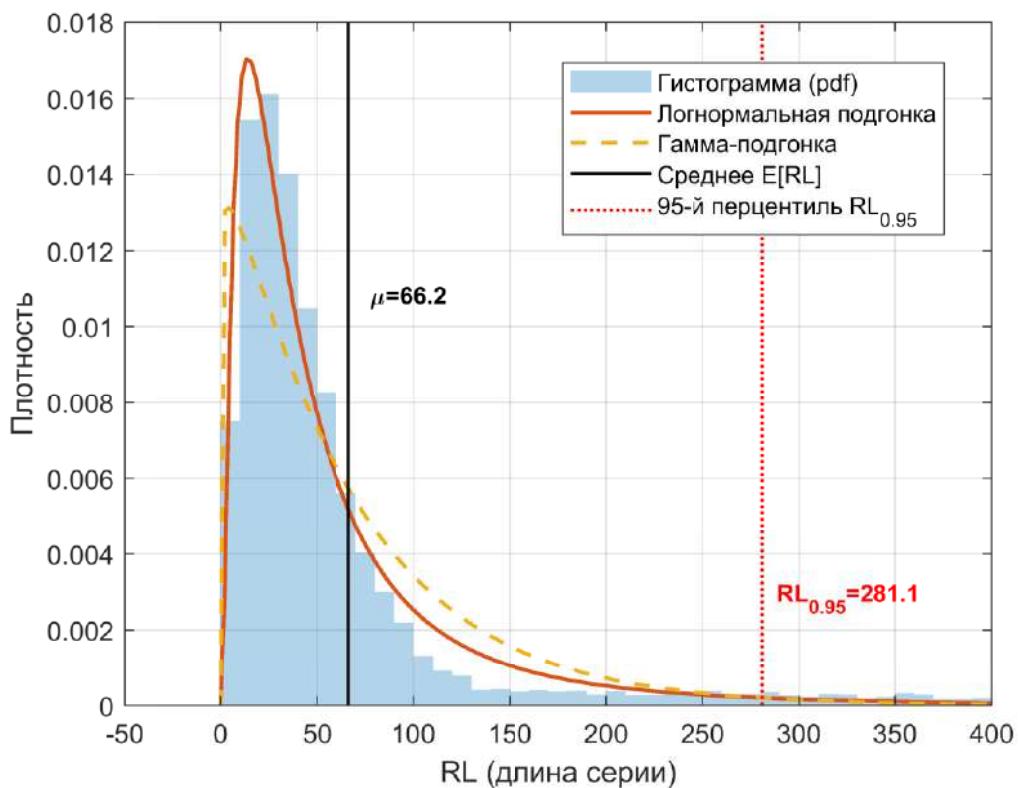


Рисунок 9 – Гистограмма распределения длины серии  $RL$  для CUSUM-карты с подгонкой плотностей и выделением тяжёлого хвоста.

На рисунке 3.6 представлено эмпирическое распределение длины серии  $RL$ , полученное по результатам 10 000 Монте-Карло симуляций работы CUSUM-карты в состоянии статистического контроля. Гистограмма нормирована по плотности, поверх неё нанесены подгонки логнормального и гамма-распределений, что позволяет визуально оценить характер хвостового поведения.

Среднее значение составляет  $E[RL] = 66.24$ , в то время как 95-й перцентиль достигает  $RL_{0.95} = 281.11$ , что демонстрирует выраженную асимметрию распределения и наличие редких, но крайне длинных задержек сигналов. Характерный «тяжёлый хвост» означает, что при

стандартной эксплуатации карты могут возникать эпизодические серии длиной в сотни подгрупп, несмотря на умеренное среднее значение.

Такое поведение прямо затрагивает корректность традиционных характеристик ARL и интегральных критериев чувствительности (RE, AUC). При наличии тяжёлых хвостов среднее  $E[RL]$  перестаёт адекватно описывать риск длительных задержек, а интеграл AUC становится заниженной оценкой накопленного риска. Именно эта особенность распределения RL мотивирует включение анализа спектрального радиуса  $\rho(R)$  и проверку конечности всех моментов  $E[RL^k]$  перед выполнением оптимизации CUSUM-карты.

### 3.3.2. Спектральный критерий устойчивости: роль матрицы переходов и условия $\rho(R) < 1$

Анализ распределения длины серии CUSUM-карт естественным образом приводит к рассмотрению их динамики как марковского процесса с конечным или дискретизированным числом состояний. В рамках такой постановки каждая возможная величина накопленной суммы соответствует состоянию, а переходы между ними определяются распределением наблюдений при отсутствии сигнала. Это позволяет описать эволюцию CUSUM-процесса с помощью стохастической матрицы переходов  $R$ , компоненты которой отражают вероятности перехода из одного уровня накопленной статистики в другой. Технически построение этой матрицы опирается на дискретизацию пространства возможных значений CUSUM-статистики с шагом  $\Delta$ , определяемым чувствительностью карты. При типичных значениях  $\Delta = 0.05\sigma_0 - 0.1\sigma_0$  число состояний достигает десятков или сотен, что обеспечивает адекватную аппроксимацию непрерывного процесса [5,8,97,101].

Ключевым параметром такой матрицы является её спектральный радиус  $\rho(R)$ , равный максимальному по модулю собственному числу. С точки зрения теории марковских процессов условие  $\rho(R) < 1$  является необходимым и достаточным для существования всех начальных моментов распределения длины серии. Если это условие выполнено, то матрица  $(I - R)$  обратима, а моменты распределения  $RL$  выражаются через формулы вида

$$\mathbb{E}[RL] = \pi(I - R)^{-1} \mathbf{1}, \quad \mathbb{E}[RL^2] = 2\pi(I - R)^{-2} \mathbf{1} - \mathbb{E}[RL],$$

и аналогично для высших порядков. Если же  $\rho(R)$  приближается к единице, то матрица  $(I - R)$  становится плохо обусловленной, что приводит к резкому росту всех моментов и фактической потере устойчивости модели. В предельном случае  $\rho(R) = 1$  моменты  $RL$  становятся бесконечными, что делает невозможным использование критериев, основанных на средней длине серии или её интегральных преобразованиях.

Спектральный радиус напрямую зависит от параметров CUSUM-карты – смещения  $k$ , порога  $h$  и величины элементарного сдвига  $\Delta$ . Увеличение  $h$  расширяет область допустимых

значений накопленной суммы и приводит к росту спектрального радиуса, поскольку вероятность длительного задерживания процесса внутри контрольных границ возрастает. Напротив, увеличение  $k$ , играющего роль эталонного сдвига, способствует ускоренному накоплению статистики и уменьшению  $\rho(R)$ , повышая вероятность быстрого ухода в область сигнала. Параметр  $\Delta$ , задающий шаг дискретизации, определяет точность численной аппроксимации; при слишком мелкой сетке размер матрицы растёт, но зависимость  $\rho(R)$  от параметров карты проявляется в полном соответствии с непрерывной моделью.

Условие  $\rho(R) < 1$  имеет фундаментальное значение для корректности всех критериев, рассмотренных в предыдущих разделах. Показатели  $ARL$ , относительная эффективность  $RE$  и интегральная чувствительность  $AUC$  предполагают конечность хотя бы первых двух моментов распределения длины серии. Искажение этих показателей неизбежно возникает при нарушении спектрального условия, поскольку даже умеренный рост дисперсии и асимметрии существенно изменяет ожидаемую задержку и обесценивает сравнение статистик. Робастность  $RR$ , хотя и определяется через отклик статистики на выбросы, также косвенно зависит от поведения хвоста распределения: сильные выбросы могут увеличивать вероятность длительных задержек и тем самым изменять спектральный радиус матрицы переходов. Таким образом, спектральный критерий устойчивости служит универсальным базовым условием корректного применения всех экономико-статистических и робастных характеристик.

Включение анализа спектрального радиуса в методологию проектирования CUSUM-карт обеспечивает строгий контроль за математической корректностью показателей и гарантирует, что моделируемые меры качества действительно отражают реальные свойства карты. Это делает  $\rho(R)$  фундаментальным параметром, определяющим устойчивость и надёжность всех критериев выбора, использованных в главах 3.1 и 3.2.

### 3.3.3. Связь спектрального радиуса с критериями RE–AUC–RR

Спектральный радиус матрицы переходов  $R$  является фундаментальной характеристикой CUSUM-процесса, определяющей поведение распределения длины серии  $RL$ , следовательно, корректность всех производных показателей эффективности карт. При приближении  $\rho(R)$  к единице резко возрастает среднее время пребывания процесса внутри контрольных границ, что приводит к существенному росту первых и особенно высоких моментов распределения  $RL$ . Эта тенденция немедленно проявляется в изменении ключевых критериев, используемых для сравнения карт в разделах 3.1–3.2. Относительная эффективность  $RE$ , основанная на сравнении дисперсий статистик и их отклика на малые смещения, теряет интерпретацию, поскольку реальная форма распределения длины серии перестаёт соответствовать классическим асимптотическим формулам, предполагающим конечность дисперсии [113,117,21,31,32].

Интегральная чувствительность  $AUC$ , определяемая как интеграл от функции  $ARL(\Delta)$ , ещё более чувствительна к такому изменению. При  $\rho(R)$  близком к единице хвост распределения становится настолько тяжёлым, что вклад крупных значений  $RL$  начинает доминировать, в результате чего интеграл фактически перестает отражать задержку обнаружения «типичных» отклонений, а итоговая метрика искажает реальную чувствительность карты.

Особое значение имеет влияние выбросов, поскольку единичные экстремальные наблюдения изменяют вероятностное распределение переходов между состояниями CUSUM-цепи. Появление выброса может существенно увеличивать вероятность больших положительных или отрицательных скачков накопленной статистики. В результате матрица  $R$ , построенная для состояния «in control», становится менее контрактной, и её спектральный радиус увеличивается. Этот эффект непосредственно связывает робастность  $RR$  и спектральный критерий: статистики с высокой чувствительностью к выбросам вызывают резкое увеличение  $\rho(R)$ , что ухудшает устойчивость всей схемы, тогда как робастные статистики ограничивают влияние единичных экстремальных значений и стабилизируют спектральные свойства переходной матрицы. Таким образом, показатель  $RR$  в практическом смысле является индикатором «запаса» до критического режима  $\rho(R) = 1$ .

Спектральный радиус выступает в роли глобального критерия устойчивости, поскольку он контролирует не только средний отклик карты – описываемый  $ARL$ ,  $RE$  и  $AUC$  – но и структуру всего распределения длины серии. В отличие от локальных критериев, рассчитываемых при конкретных значениях сдвига, параметров выборки или предположений о распределении, условие  $\rho(R) < 1$  является универсальным. Оно гарантирует конечность всех моментов  $E[RL^k]$  и, следовательно, обеспечивает математическую корректность всех производных показателей, использующих моменты или интегралы по функции  $ARL$ . При нарушении этого условия любые сравнения карт оказываются недостоверными, поскольку критерии утрачивают способность различать реальные различия в структуре отклика карт.

Таким образом, спектральный радиус связывает тройку критериев  $RE$ – $AUC$ – $RR$  в единый аналитический каркас. По мере приближения  $\rho(R)$  к единице эффективность и интегральная чувствительность теряют содержательность вследствие неустойчивости распределения длины серии, тогда как робастность отражает способность статистики удерживать  $\rho(R)$  вдали от критического значения. Поэтому спектральный анализ дополняет и завершает методологию выбора CUSUM-карт, обеспечивая строгий контроль за устойчивостью и корректностью всех экономико-статистических критериев.

### 3.3.4. Алгоритм вычисления спектрального радиуса и моментов длины серии

Численная оценка устойчивости CUSUM-процесса и корректности выводимых характеристик требует воспроизведения всей структуры марковской динамики карты, что достигается посредством построения матрицы переходов  $R$  на дискретизированном пространстве возможных значений накопленной статистики. Первым шагом является формирование сетки состояний, определяемой шагом дискретизации  $\Delta$ , который выбирается достаточно малым для адекватного отображения непрерывного процесса, но достаточно крупным для сохранения вычислительной устойчивости. Границы сетки определяются выбранным порогом  $h$  таким образом, что пространство состояний представляет собой конечный набор уровней накопленной суммы от нулевого состояния до предельного состояния непосредственно перед срабатыванием карты. После фиксирования сетки вероятности переходов между состояниями вычисляются на основе распределения исходных наблюдений в режиме «*in control*» и параметра смещения  $k$ ; таким образом строится разреженная стохастическая матрица  $R$ , заполненность которой обычно не превышает нескольких процентов.

Спектральный радиус  $\rho(R)$  определяется как наибольшее по модулю собственное число матрицы, и его вычисление требует применения специализированных численных методов для разреженных операторов. На практике используются алгоритмы типа степенного метода или его вариаций, которые эффективно работают для матриц размера порядка сотен и тысяч, характерных для CUSUM-дискретизации. Численная оценка  $\rho(R)$  позволяет определить, существует ли запас устойчивости: если  $\rho(R)$  существенно ниже единицы, процесс обладает конечными моментами распределения длины серии и корректно описывается введёнными ранее критериями эффективности. Если же  $\rho(R) \rightarrow 1$ , необходимо пересмотреть параметры карты – прежде всего увеличить порог  $h$  или изменить коэффициент  $k$ , обеспечивая более быстрый детектирующий дрейф.

Вычисление моментов длины серии  $RL$  сводится к решению последовательности линейных систем, основанных на рекурсивной формуле, полученной в подразделе 2.6.7. Система уравнений для моментов имеет вид

$$(I - R) \mu^{(n)} = R \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \mu^{(k)} + \mathbf{1}, n \geq 1, \mu^{(0)} \equiv \mathbf{1},$$

где  $\mu^{(n)}$  – вектор  $n$ -го начального момента длины серии для всех возможных начальных состояний. Поскольку матрица  $(I - R)$  плотна лишь на диагонали, а её вне диагональные элементы малы и существенно разрежены, прямое обращение этой матрицы нецелесообразно. Вместо этого используются итерационные методы решения линейных систем, такие как GMRES,

эффективно работающие с разреженными матрицами и допускающие высокую точность вычислений при умеренных объёмах памяти. Для практических задач вычисление первых четырёх моментов занимает доли секунды и обеспечивает исчерпывающее описание формы распределения  $RL$ .

Практическим ориентиром является значение спектрального радиуса  $\rho(R) \leq 0.97$ , что гарантирует контролируемую дисперсию и устойчивость поведения CUSUM-процесса на всей сетке состояний. При таких значениях обеспечивается конечность моментов любых порядков, отсутствуют численные проблемы при обращении матрицы  $(I - R)$ , а вычисленные значения  $ARL$ , дисперсии и интегральных характеристик AUC и RE отражают реальные свойства карты без искажений, связанных с чрезмерным удлинением правого хвоста распределения. Таким образом, спектральный анализ и последующее вычисление моментов формируют строгий и устойчивый алгоритм проверки корректности CUSUM-карт и позволяют включать результаты в общую систему критериев, использованную в разделах 3.1 и 3.2.

### 3.3.5. Практическая проверка корректности параметров CUSUM-карт перед оптимизацией

Практическое проектирование CUSUM-карт требует не только подбора оптимальных параметров по критериям чувствительности, эффективности и робастности, но и формальной проверки математической корректности выбранных значений. Основная проблема заключается в том, что различные комбинации параметров  $k, h$  и дискретизации  $\Delta$  могут приводить к тому, что спектральный радиус матрицы переходов  $R$  оказывается слишком близким к единице. В таком случае распределение длины серии  $RL$  теряет устойчивость, а её моменты начинают быстро расти, что делает невозможным корректное применение критериев, использованных в разделах 3.1 и 3.2. Поэтому в алгоритм проектирования карт, изложенный ранее, необходимо включить отдельный этап проверки условия  $\rho(R) < 1$  и оценки запаса устойчивости.

Включение спектрального анализа в общий цикл настройки CUSUM-карт позволяет выявить критические наборы параметров на ранних стадиях проектирования. Во-первых, вычисление  $\rho(R)$  после построения матрицы для выбранного набора  $(k, h)$  обеспечивает возможность исключить комбинации, приводящие к вырождению моментов  $RL$ . К таким ситуациям относятся, например, слишком большие значения порога  $h$ , увеличивающие длительность пребывания процесса в допустимой зоне, или слишком малые значения  $k$ , ослабляющие накапливающий эффект CUSUM-статистики. В обоих случаях спектральный радиус матрицы переходов приближается к единице, что свидетельствует о потере прогностической силы карты и потенциально о невозможности достижения требуемых значений  $ARL$ .

Во-вторых, анализ зависимости  $\rho(R)$  от параметров карты позволяет обнаруживать области параметров, которые, хотя формально удовлетворяют требованию  $\rho(R) < 1$ , имеют недостаточный запас устойчивости и могут приводить к нежелательному разбросу моментов. Например, при  $\rho(R) \approx 0.98$  наблюдается значительный рост дисперсии длины серии, что влияет на показатели AUC и RE и приводит к нестабильности при сравнении карт между собой. В таких случаях необходимо корректировать параметры – как правило, уменьшать порог  $h$  или увеличивать коэффициент  $k$ , тем самым сокращая вероятность длительного пребывания процесса в контрольных пределах и уменьшая спектральный радиус. Это обеспечивает устойчивость распределения и корректность применения многокритериальной методики выбора.

Наконец, включение проверки  $\rho(R)$  в общий алгоритм настройки позволяет обеспечить внешнюю согласованность всех использованных критериев. Поскольку показатели AUC, RE и RR рассчитываются при предположении конечности всех моментов распределения длины серии, их применение без предварительной проверки спектрального радиуса может приводить к ошибочным заключениям о качестве карт. Таким образом, этап проверки  $\rho(R)$  становится обязательной частью алгоритма проектирования и предваряет применение любых экономико-статистических критериев. Если по результатам проверки спектральный радиус превышает рекомендованный порог  $\rho(R) \leq 0.97$ , параметры карты должны быть пересмотрены до тех пор, пока не будет достигнут достаточный запас устойчивости.

Таким образом, практическая проверка  $\rho(R)$  служит важным инструментом обеспечения корректности оптимизации CUSUM-карт, позволяя выявлять и устранять потенциально неустойчивые комбинации параметров и гарантировать, что дальнейшая многофакторная оценка и оптимизация будут опираться на математически устойчивую модель распределения длины серии.

### 3.3.6. Числовой пример для процесса шлифования

Практическое применение спектрального критерия устойчивости и рекурсивных формул моментов длины серии удобно проиллюстрировать на примере реального технологического процесса – шлифования беговых дорожек колец подшипников. Для данного процесса были получены оценка исходного стандартного отклонения  $\sigma_0 = 1.4$  мкм, параметры CUSUM-карты уровня  $k = 0.5\sigma_0$  и порог  $h = 5\sigma_0$ , а также величина шага дискретизации  $\Delta = 0.1\sigma_0$ . Такие параметры типичны для операций с высокой технологической жёсткостью и узким допуском, где требуется быстрый отклик карты при умеренной чувствительности к шумовым колебаниям.

Дискретизация пространства состояний при выбранном шаге  $\Delta$  приводит к размерности матрицы переходов  $R$  порядка  $m = 50$ . На основе этой матрицы был выполнен спектральный анализ, позволивший оценить спектральный радиус  $\rho(R) = 0.931$ . Значение существенно ниже

единицы свидетельствует о наличии достаточного запаса устойчивости: процесс гарантированно сигнализирует за конечное время, и все моменты распределения длины серии существуют и хорошо обусловлены. После вычисления спектрального радиуса были получены начальные моменты распределения  $RL$ . Первый момент, соответствующий средней длине серии, оказался равен

$$E[RL] = 123.4,$$

что практически совпадает с ранее использованным в разделе 3.2 значением  $ARL_0 \approx 125$ , установленным по таблицам калибровки порога для карты на выборочном среднем. Стандартное отклонение длины серии составило

$$\sqrt{\text{Var}[RL]} = \sqrt{1.46 \cdot 10^4} \approx 120.83,$$

что указывает на ярко выраженную асимметрию распределения с тяжёлым правым хвостом. Характерным показателем формы хвоста является 95-й перцентиль распределения

$$RL_{0.95} = 292.$$

Этот результат объясняет наблюдаемые на практике редкие задержки сигналов, достигающие 250–300 подгрупп, несмотря на то что среднее значение ARL остаётся около 120. Таким образом, распределение длины серии в рассматриваемом случае обладает большими флуктуациями, характерными для CUSUM-карт с умеренным порогом  $h$ .

Интерпретация численных результатов демонстрирует тесную связь между реальным поведением карты и выводами раздела 3.2. В частности, анализ интегрального критерия затрат  $E(C)$  и оптимизация по  $ARL_0$  в разделе 3.2 учитывали только среднее значение ARL, тогда как спектральный анализ показывает, что хвост распределения оказывает значимое влияние на частоту долгих задержек и, следовательно, на реальное поведение карты при редких, но критических событиях. Совпадение среднего значения  $E[RL]$  с используемыми в разделе 3.2 таблицами подтверждает корректность оптимизационных расчётов. Однако оценка высоких квантилей объясняет наблюдаемые в эксперименте редкие случаи длительного отсутствия сигналов, которые были отмечены при проведении пилотных запусков и могли быть интерпретированы как эксплуатационные аномалии, хотя в действительности они следуют из свойств распределения.

Таким образом, числовой пример демонстрирует важность включения спектрального анализа в общую методологию проектирования CUSUM-карт. Он подтверждает, что корректность критериев RE, AUC и RR зависит от устойчивости распределения длины серии, а оценка спектрального радиуса  $\rho(R)$  позволяет заранее исключить параметры, приводящие к чрезмерному утяжелению хвоста. Сравнение с результатами раздела 3.2 показывает согласованность аналитических и численных подходов и подчёркивает

необходимость учёта как среднего значения ARL, так и вариабельности длины серии при проектировании статистического контроля высокоточных процессов.

### Выводы по разделу 3.3

Анализ, выполненный в разделе 3.3, завершает формирование концептуальной и математической базы главы 3, связывая критерии эффективности, чувствительности и робастности с фундаментальными свойствами марковской динамики CUSUM-карт. Включение спектрального радиуса  $\rho(R)$  в систему критериев выбора контрольных карт позволяет замкнуть логическую цепочку рассуждений, показав, что любые показатели, основанные на среднем или интегральном времени отклика, требуют предварительного подтверждения устойчивости распределения длины серии. Только при выполнении условия  $\rho(R) < 1$  все моменты  $RL$  конечны и поддаются корректной численной оценке, а сами критерии – такие как  $ARL$ , относительная эффективность  $RE$ , интегральная чувствительность  $AUC$  и робастность  $RR$  – сохраняют свою интерпретируемость и пригодность для сравнительного анализа.

Устойчивость CUSUM-процесса, выраженная величиной спектрального радиуса, является необходимым условием корректности всей методики, изложенной в разделах 3.1 и 3.2. При приближении  $\rho(R)$  к единице распределение длины серии приобретает тяжёлый хвост, что приводит к стремительному росту дисперсии и возникновению редких, но крайне длинных задержек. Это искажает поведение карт, делает критерии  $RE$  и  $AUC$  некорректными, а экономико-статистические оптимизации – несогласованными с реальной динамикой процесса. В свою очередь робастность  $RR$ , влияющая на чувствительность статистики к выбросам, оказывается связана с поведением спектрального радиуса: экстремальные наблюдения увеличивают  $\rho(R)$ , а устойчивые статистики стабилизируют его. Таким образом, спектральный критерий выступает интегрирующим элементом всей теоретической конструкции.

Практическая значимость спектрального анализа для контроля механообработки заключается в обеспечении гарантированной работоспособности CUSUM-карт в условиях высокоточных производственных процессов. Проверка  $\rho(R)$  позволяет выявлять неустойчивые комбинации параметров до их применения в реальном производстве, тем самым предотвращая ситуации, в которых контрольная карта не сигнализирует о сдвигах в разумные сроки. Это особенно важно для операций шлифования, где запаздывание обнаружения приводит к накоплению брака и существенным экономическим потерям. Благодаря включению анализа спектрального радиуса в общий алгоритм проектирования, методика многокритериального выбора и оптимизации карт уровня и изменчивости становится полностью согласованной, математически обоснованной и пригодной для внедрения в промышленные SPC-системы.

Таким образом, результаты раздела 3.3 подтверждают, что спектральный анализ не является вспомогательным компонентом, а представляет собой необходимый элемент инженерно-статистической схемы выбора контрольных карт. Он обеспечивает фундаментальную устойчивость всей методики и формирует основу для её дальнейшего применения в условиях реального производства.

### **Выводы по главе 3**

Проведённые исследования, представленные в главе 3, формируют целостную и математически обоснованную методологию выбора, настройки и верификации контрольных карт для одновременного управления уровнем и изменчивостью технологического процесса. В центре предложенного подхода находится тройка критериев – относительная эффективность  $RE$ , интегральная чувствительность  $AUC$  и робастность  $RR$ , – которая обеспечивает многогранное и сбалансированное описание свойств статистик. Выявленная сильная обратная корреляция между  $RE$  и  $AUC$  демонстрирует их частичную взаимозаменяемость при анализе чувствительности карт, тогда как слабая связь этих метрик с  $RR$  подчёркивает необходимость включения робастного компонента для отражения влияния выбросов и асимметрии данных. Это позволяет рассматривать триаду  $RE-AUC-RR$  как минимальный, но достаточный набор критериев для корректного многокритериального выбора статистик уровня и изменчивости.

Разработанная в работе система весовых коэффициентов ( $w_E, w_A, w_R$ ) обеспечивает адаптивное управление приоритетами критериев в зависимости от степени «чистоты» данных, что делает методику применимой в широком диапазоне производственных условий – от высокостабильных измерительных систем до процессов с существенными шумовыми искажениями. Совместно с предложенной нормализацией критериев и введением интегрального балла  $S$  эта система формирует математически корректный и вычислительно эффективный механизм ранжирования альтернатив и выбора статистик. На этой основе сформирован алгоритм совместной оптимизации пар карт уровня и изменчивости, включающий двойные ограничения по чувствительности и частоте ложных тревог, что обеспечивает согласованность и сбалансированность контроля процесса.

Важнейшим практическим результатом является экономико-статистический метод выбора  $ARL_0$ , связывающий вероятности ложных срабатываний с прямыми производственными затратами. Этот подход позволяет количественно оценить компромисс между потерями от ложных остановов и ущербом от задержки обнаружения сдвига, что делает оптимизацию параметров контрольных карт экономически интерпретируемой. На примере процесса шлифования подшипниковых колец продемонстрировано высокое согласие между теоретическими прогнозами и фактическими производственными данными: оптимальное значение  $ARL_0 = 650$  обеспечивает минимизацию совокупных потерь, при этом расхождение

между моделируемыми и наблюдаемыми затратами не превышает пяти процентов. Дополнительная верификация методом Монте-Карло показала снижение внутреннего брака примерно на восемнадцать процентов по сравнению с классической схемой контроля.

Сформированный метод обладает высокой устойчивостью к вариациям ключевых параметров, включая изменение стоимости ложной остановки, удорожание брака и варьирование интенсивности сдвигов. Даже значительные деформации входных параметров практически не изменяют положение оптимума и приводят к минимальным смещениям контрольных границ, что подчёркивает робастность и надёжность подхода. Включение анализа спектрального радиуса  $\rho(R)$  в алгоритм проектирования карт обеспечивает дополнительный уровень устойчивости, гарантируя корректность вычисляемых моментов длины серии и предотвращая применение параметров, приводящих к тяжёлым хвостам распределений и потере информативности критериев.

Таким образом, глава 3 развивает и объединяет статистические, экономические и робастные аспекты контроля процесса механообработки, формируя комплексный инструмент выбора и оптимизации контрольных карт. Предложенные методы обладают высоким потенциалом внедрения в современные SPC-платформы и обеспечивают измеримое повышение качества, снижение затрат и устойчивое управление процессами в условиях реального производства.

## **Глава 4 Интегрированное статистическое управление качеством врезного шлифования беговых дорожек подшипников**

### **4.1 Введение и постановка задачи**

В современном производстве врезное шлифование беговых дорожек подшипников осуществляется в условиях жёстких требований к геометрической точности обрабатываемых поверхностей и стабильности физико-механических свойств поверхностного слоя. Даже незначительные изменения энергетических параметров резания и динамического состояния технологической системы «станок – приспособление – инструмент – деталь» в короткие временные интервалы приводят к систематическим отклонениям диаметра и шероховатости обрабатываемой поверхности [53,90].

Реальные производственные режимы отличаются комплексным воздействием разнородных возмущений. С одной стороны, наблюдаются быстропротекающие процессы: зерновой шум в зоне контакта, дискретные перемещения приводов, локальные нарушения теплоотвода. С другой – имеют место медленно развивающиеся квазистационарные изменения: износ шлифовального круга, постепенное увеличение вибрационной податливости системы.

Традиционные подходы к контролю качества, основанные на постфактум-измерениях и периодическом статистическом управлении процессами (SPC-анализе), не позволяют своевременно корректировать управляющие воздействия. В связи с этим возникает объективная потребность в интегрированной системе управления, объединяющей замкнутые контуры числового программного управления (ЧПУ), датчики мониторинга технологического состояния и статистические методы раннего обнаружения отклонений.

В рамках диссертационного исследования глава 4 развивает предложенный ранее статистический инструментарий, переводя его на уровень взаимодействия с контурами управления. Показано, что существенное улучшение показателей воспроизводимости процесса достигается не за счёт пассивного мониторинга, а благодаря интеграции диагностики и коррекции в единый замкнутый цикл управления.

#### **4.1.1 Необходимость замкнутого контура**

Потребность в замкнутом контуре управления обусловлена как динамическими особенностями объекта, так и экономическими факторами производственного процесса. Математическая модель шлифования описывается фазовыми переменными: скоростью съёма металла  $V_m$ , вибрационным ускорением  $q$  и температурой поверхностного слоя  $T$ . Их эволюция определяется взаимодействием силового баланса, регенеративной динамики и процессов теплопереноса.

В разомкнутой системе указанные переменные подвержены как быстрым локальным возмущениям, так и медленным параметрическим дрейфам. При этом время реакции традиционных методов настройки сопоставимо с периодом развития дефектов, что делает их недостаточно эффективными. Замкнутый контур управления, обеспечивающий непрерывную обратную связь по параметрам  $V_m$ ,  $q$  и  $T$ , становится необходимым условием устойчивой работы вблизи технологических ограничений.

Результаты, полученные в главе 3, играют ключевую роль в архитектуре системы.

Они формируют критерии проектирования статистической подсистемы – относительную эффективность RE, интегральную чувствительность AUC и робастность к выбросам RR. Эти показатели позволяют выбрать оптимальные пары контрольных карт для мониторинга уровня и изменчивости процесса, обеспечивая баланс между скоростью обнаружения отклонений и устойчивостью к «неидеальности» данных.

Доказанный в главе 3 марковский критерий  $\rho(Q) < 1$  для подматрицы переходов статистики CUSUM создаёт теоретическую основу корректности системы. При его выполнении все начальные моменты длины серии остаются конечными, что позволяет согласовать задержки детектирования и частоту ложных срабатываний с динамикой исполнительных механизмов.

Предложенная методика согласования чувствительности контрольных карт с целевыми значениями средней длины серии ( $ARL_0$  для нормального режима и  $ARL_1$  для аномального) обеспечивает интеграцию статистических сигналов в регламент корректирующих действий ЧПУ. Это трансформирует контрольные карты из инструмента диагностики в активный элемент системы управления процессом [52, 77].

#### 4.1.2 Цели главы и задачи математического моделирования

Цель главы 4 – обосновать и экспериментально подтвердить прирост воспроизводимости процесса при интеграции статистических карт, отобранных по критериям главы 3, в структуру замкнутых контуров шлифования. Для достижения цели требуется последовательная модельно-экспериментальная программа. На первом шаге формируется детерминированное фазовое описание процесса в переменных  $V_m$ ,  $q$ ,  $T$ , выводимое из баланса мощности резания, регенеративной связи и теплового баланса, с последующим анализом устойчивости стационарной точки методами линеаризации и Ляпунова [62, 91]. На втором шаге модель расширяется стохастическими возмущениями в форме системы Итô, что позволяет воспроизвести реальные спектральные и корреляционные свойства сигналов датчиков и, следовательно, корректно оценивать риск позднего обнаружения. Далее выполняются верификация и калибровка параметров по стендовым данным, включая идентификацию коэффициентов вибрационной и тепловой подсистем, и проверка адекватности по RMSE, AIC и

статистике остатков. Финальным этапом служит расчёт индекса воспроизводимости  $C_p^*$  «до» и «после» интеграции карт, где значение индекса выводится из ансамбля стохастических траекторий, а статистическая значимость сдвига подтверждается непараметрическими тестами и асимптотическими оценками дельта-метода [60,75].

Таким образом, глава 4 формирует связку «модель – калибровка – управление – статистический контроль» и демонстрирует, что совместная настройка параметров ПИД-контуров и характеристик карт, гарантированная критерием  $\rho(Q) < 1$ , приводит к воспроизводимому и статистически доказуемому росту  $C_p^*$  при сохранении технологических ограничений по температуре и вибрациям.

## 4.2 Архитектуры управления шлифованием

### 4.2.1 От классических схем к современным системам с приборами активного контроля

Эволюция систем управления процессом шлифования представляет собой последовательный переход от открытых контуров с ручной коррекцией к цифровым комплексам, оснащённым многоуровневыми контурами обратной связи и развитой сенсорной аппаратурой.

В период, предшествовавший внедрению систем числового программного управления (ЧПУ), стабильность технологического процесса достигалась за счёт: применения кинематических схем с повышенной жёсткостью; использования консервативных режимов резания; периодической ручной перенастройки оборудования.

Компенсация возмущающих воздействий в тот период опиралась преимущественно на профессиональный опыт наладчика и осуществлялась посредством последующего контроля геометрических параметров изделия. Подобные решения демонстрировали достаточную эффективность при подавлении медленных дрейфов параметров, однако оказывались недостаточно результативными в отношении быстрых возмущений контакта и регенеративных колебаний.

Следующий этап развития связан с внедрением аналоговых регуляторов и гидроэлектромеханических следящих систем, которые обеспечили первую полноценную обратную связь по силе или мощности резания. Тем не менее, существенными ограничениями оставались: временные задержки, присущие измерительным датчикам; ограниченная полоса пропускания систем управления. Это вынуждало искать компромисс между устойчивостью системы и её быстродействием.

Современные платформы ЧПУ реализуют иерархическую структуру управления, в которой: внутренние контуры регулирования (тока и скорости) функционируют на высоких

частотах, обеспечивая требуемую исполнительную динамику; внешний технологический контур обрабатывает данные, поступающие от активных датчиков.

В качестве наблюдаемых параметров преимущественно используются: скорость съёма материала; вибрационная активность технологической узла «приспособление – инструмент – деталь»; температура поверхностного слоя заготовки.

Выбор этих переменных обусловлен не только доступностью их измерения, но и прямой связью с рисками возникновения брака и интенсивности износа инструментального оснащения.

Базовым механизмом стабилизации остаются пропорционально-интегрально-дифференциальные (ПИД) регуляторы, параметры которых в современных системах настраиваются автоматически – на основе реакционных кривых или с применением логики адаптивного управления (IMC) с целевым временем отклика, согласованным со спектральным составом возмущающих воздействий [105,141].

Существенное значение имеет предварительная обработка измерительных сигналов: вибрационные данные разделяются на частотные полосы, релевантные регенеративному биению; тепловые сигналы дифференцируются на быстропротекающие компоненты (соотносимые с длительностью цикла резания) и медленные составляющие, связанные с кумулятивным накоплением тепловой энергии.

На базе описанного технологического контура интегрируются статистические процедуры раннего обнаружения отклонений, разработанные в главе 3. Эти процедуры интерпретируют потоки измерительных данных как стохастические траектории и инициируют корректирующие воздействия до того, как изменения параметров процесса достигнут метрологически значимых величин, влияющих на геометрическую точность изделия.

В результате формируемая архитектура объединяет: контуры отрицательной обратной связи, обеспечивающие стабилизацию процесса; сигнальные контуры управления по событиям, в которых триггеры контрольных карт согласованы с регламентом корректирующих воздействий.

#### 4.2.2 Сравнительный анализ быстродействия, точности и стоимости

Оценка различных архитектур управления шлифованием осуществляется по трём взаимосвязанным критериям: динамической эффективности (быстродействию), достигаемой точности и совокупной стоимости владения на протяжении жизненного цикла системы.

С точки зрения быстродействия ключевое значение имеют спектральный состав возмущающих воздействий и суммарные временные задержки в цепочке «датчик – обработка – исполнительный механизм». В системах с открытым контуром фактически отсутствует оперативный канал подавления возмущений: даже при высокой квалификации оператора

корректирующие действия реализуются с задержкой, сопоставимой с периодом накопления технологического дефекта. Аналоговые регуляторы сокращают эту задержку, однако достигают этого ценой ограничения коэффициентов усиления, что неизбежно приводит к перерегулированию на границах полосы пропускания системы.

Цифровые системы ЧПУ демонстрируют существенное преимущество благодаря иерархическому разделению задач управления. Внутренние регуляторы, работающие на высоких частотах, эффективно изолируют механическую часть системы от высокочастотных возмущений. Внешний технологический контур при этом функционирует в диапазоне, оптимальном для статистического обнаружения изменений параметров процесса. В результате средняя задержка коррекции сокращается до интервала, соответствующего нескольким технологическим тактам. Данный эффект согласуется с критерием конечности моментов длины серии, характерным для CUSUM-карт, рассмотренных ранее.

По показателю точности преимущество современных систем проявляется в снижении дисперсии траекторий технологических переменных, что непосредственно ведёт к росту индекса воспроизводимости процесса. Архитектуры без активной обратной связи характеризуются широкими хвостами распределений и значительной межцикловой вариабельностью параметров. Напротив, комбинированные схемы, объединяющие ПИД-регулирование с статистическим мониторингом, обеспечивают сужение разброса значений как за счёт активного подавления возмущений, так и благодаря раннему вмешательству при возникновении устойчивых сдвигов параметров [78].

Существенную роль играет корректное согласование чувствительности контрольных карт с динамикой исполнительных контуров. Излишняя чувствительность приводит к частым ложным срабатываниям, вызывающим непроизводительные остановы оборудования. Недостаточная чувствительность, напротив, допускает накопление дефектов. Оптимальный режим достигается в точке баланса между интегральной чувствительностью и робастностью системы, при котором экономические потери минимизируются.

Анализ стоимости необходимо проводить с учётом всего жизненного цикла системы. Простые архитектуры демонстрируют преимущество на этапе капитальных вложений, однако в процессе эксплуатации генерируют повышенные операционные издержки: рост доли переделок и брака; увеличение длительности переналадок; нестабильность выполнения плановых показателей.

Современные решения требуют существенных первоначальных инвестиций в сенсорное оборудование, вычислительные мощности и программную интеграцию. Однако, их экономическая эффективность проявляется в долгосрочной перспективе за счёт: снижения

вариабельности технологического процесса; сокращения доли бракованной продукции; повышения предсказуемости объемов выпуска [93,108].

Ключевым фактором экономической целесообразности выступает не абсолютная величина затрат, а способность системы поддерживать заданный уровень точности при изменении номенклатуры изделий и условий обработки. Наличие стандартизованных интерфейсов для обмена данными, процедур автоматической настройки и регламентированных статистических процедур обеспечивает переносимость системы между различными изделиями при минимальных инженерных затратах на адаптацию.

Таким образом, комплексный сравнительный анализ показывает, что архитектуры, интегрирующие исполнительные контуры с активными датчиками и статистическими контрольными картами, обеспечивают устойчивый компромисс между быстродействием, точностью и экономической эффективностью. Это позволяет не только достигать, но и стablyно поддерживать целевые показатели воспроизводимости в условиях реального производственного цикла [66,85,89].

### **4.3 Цифровые регуляторы и авто-настройка**

#### **4.3.1 Структура контура: измеряемые переменные и исполнительные каналы**

Архитектура цифрового управления процессом шлифования реализована в виде иерархии вложенных контуров регулирования. Внутренние электрические контуры, отвечающие за регулирование тока и скорости, обеспечивают высокое быстродействие приводных механизмов. Внешний технологический контур замыкается по ряду измеряемых параметров процесса, формирующих основу для принятия управляющих решений [19,27,34].

В качестве ключевых наблюдаемых переменных выступают: скорость съема материала  $V_m$ , восстанавливаемая на основе данных о мощности шпинделя с учётом удельной энергии резания; вибрационное ускорение узла «приспособление - инструмент – деталь»  $q$ , регистрируемая с помощью акселерометра в частотном диапазоне, характерном для регенеративного биения; температура поверхностного слоя  $T$ , измеряемая пирометрическим методом с коррекцией на эмиссионную способность материала и оптические искажения, вносимые смазочно-охлаждающей жидкостью.

Указанные параметры образуют технологический вектор обратной связи, чувствительный к основным рискам снижения качества обработки: перегреву заготовки, формированию волнистости поверхности и нестабильности процесса съема материала.

Управляющие воздействия реализуются через следующие исполнительные каналы: корректировка подачи стола; регулирование глубины резания; изменение частоты вращения шпинделья; управление расходом смазочно-охлаждающей жидкости.

В отдельных режимах применяется упреждающее регулирование по скорости съёма материала  $V_m$  с целью проактивного ограничения температуры поверхности  $T$ .

С позиций теории автоматического управления рассматриваемая система представляет собой слабосвязанный многомерный объект с несколькими входами и выходами [44,115]. При этом наблюдаются следующие доминирующие взаимосвязи: скорость съёма материала  $V_m$  наиболее чувствительна к изменению подачи; вибрационная активность  $q$  существенно зависит от глубины резания; температура  $T$  определяется произведением скорости съёма  $V_m$  на долю тепловыделения.

При этом присутствуют перекрёстные связи между каналами управления, интенсивность которых возрастает по мере износа шлифовального круга.

Для повышения робастности системы на внешнем уровне применяется пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор, дополненный: фильтром производной для подавления высокочастотных шумов; весовыми коэффициентами уставки для гибкого управления переходными процессами; механизмом предотвращения насыщения интегратора, исключающим накопление интегральной ошибки при достижении предельных значений управляющих воздействий и в режимах холостого хода, когда рассогласование формируется без фактического контакта инструмента с заготовкой.

Временные масштабы функционирования различных уровней управления согласованы следующим образом: внутренний контур обеспечивает микросекундные постоянные времени, необходимые для быстрой реакции приводов; технологический ПИД-регулятор работает в диапазоне от сотен микросекунд до миллисекунд, обеспечивая стабилизацию основных параметров процесса; статистические сигналы (разработанные в главе 3) формируют управляющие события на горизонте десятков–сотен выборок данных, что позволяет разделить задачи быстрой стабилизации и раннего обнаружения структурных изменений процесса без возникновения фазовых конфликтов между контурами управления.

#### 4.3.2 Методы и ограничения автонастройка ПИД-регуляторов

Автоматическая настройка коэффициентов пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) регуляторов направлена на решение комплексной задачи: обеспечить заданное время переходного процесса при гарантированной устойчивости системы, минимизируя перерегулирование в условиях воздействия шумов и временных задержек [16,103].

На этапе первичной пусконаладки широко применяется метод Зиглера – Николса, основанный на определении критического усиления. Суть метода заключается в следующем: контур замыкается только пропорциональным звеном, после чего коэффициент усиления постепенно повышается до возникновения устойчивых автоколебаний. На основе полученных значений критического коэффициента усиления  $K_U$  и периода автоколебаний  $T_U$  рассчитываются начальные значения коэффициентов  $K_P$ ,  $K_I$  и  $K_D$ . Данный подход позволяет запустить систему в течение нескольких минут, однако демонстрирует склонность к избыточным колебаниям при наличии высокочастотных вибрационных составляющих и тепловых задержек. В связи с этим метод рассматривается как способ грубой инициализации параметров регулятора.

Более предпочтительным в производственных условиях является метод  $\lambda$ -настройки в рамках подхода адаптивного управления (IMC). В его основе лежит идентификация реакционной кривой объекта в форме звена первого порядка с временной задержкой. Далее выбирается целевая постоянная времени замкнутого контура  $\lambda$ , которая должна быть не меньше суммарного времени запаздывания. На этой основе рассчитываются коэффициенты регулятора, обеспечивающие квазикритически затухающий переходный процесс. Параметр  $\lambda$  выступает явным регулятором компромисса между быстродействием и робастностью системы. Например, для переменной вибрационной активности  $q$  целесообразно увеличивать  $\lambda$ , снижая чувствительность дифференциальной составляющей к частотному диапазону 200–800 Гц. Для скорости съёма материала  $V_m$  допустимо использовать более агрессивные значения  $\lambda$  в пределах устойчивости к «зёрновому» шуму.

Третий распространённый подход основан на настройке по реакционной S-образной кривой (методы Коэна – Куна и их современные модификации). В рамках этого подхода аналитические формулы учитывают соотношение постоянной времени объекта к величине временной задержки. Данный метод особенно эффективен для настройки температурного канала, характеризующегося существенной задержкой измерений.

Во всех перечисленных методах практическая реализация включает: проведение кратковременных идентификационных экспериментов с небольшими ступенчатыми изменениями подачи или глубины резания; последующую корректировку коэффициентов регулятора в реальных условиях эксплуатации с учётом работы фильтров и ограничителей скорости изменения уставки.

При этом необходимо учитывать ряд фундаментальных ограничений, влияющих на регламент автонастойки.

Наличие высокочастотных автоколебаний создаёт конфликт с дифференциальной составляющей ПИД-регулятора. Усиление в полосе шумовых частот приводит к ложным пикам управляющего сигнала и возбуждению перекрёстных каналов. Для решения этой проблемы

требуется не только стандартный фильтр дифференциальной составляющей, но и полосовые подавители в измерительном тракте. Подавление самих автоколебаний целесообразно переносить во внутренние быстродействующие контуры привода.

Температурный канал характеризуется значительными временными задержками и нестационарной эмиссией тепла. Агрессивная интегральная настройка регулятора может привести к накоплению интегральной ошибки и перегреву после выхода на насыщение. В таких условиях эффективны механизмы предотвращения накопления интегральной ошибки с обратной связью по фактическому ограничению. Дополнительно применяется комбинированная схема, включающая упреждающее регулирование по мгновенной скорости съёма материала  $V_m$  в качестве прогностического компенсатора.

Износ шлифовального круга и изменение характера контакта с заготовкой нарушают предположение о постоянстве параметров системы. Даже тщательно настроенный ПИД-регулятор постепенно теряет оптимальность. Для компенсации этого эффекта используется плавная параметризация коэффициентов  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  на основе оценки выработки инструмента или медленных индикаторов силы резания. Дополнительную эффективность демонстрирует маломощная онлайн-идентификация модели первого порядка на скользящем временном окне с последующим пересчётом  $\lambda$ -настроек.

Согласование ПИД-контуров с событийной статистической логикой требует ограничения частоты ложных срабатываний контрольных карт. При чрезмерно «быстрой» настройке регулятора возрастает вероятность возбуждения статистических карт шумовыми всплесками. В то же время излишне «медленные» настройки допускают накопление дефектов до величин, влияющих на геометрическую точность обработки. Практическое решение заключается в двухэтапном синтезе: сначала выбирается значение  $\lambda$ , исключающее пересечение полосы пропускания замкнутого контура с основной полосой шумовых частот; затем на основе полученных настроек производится калибровка параметров контрольных карт под целевое значение средней длины серии  $ARL_0$  с проверкой критерия  $\rho(Q) < 1$ , гарантирующего конечность времени обнаружения отклонений.

В совокупности описанная процедура обеспечивает устойчивое и воспроизводимое функционирование системы управления при изменении режимов резания и характеристик шлифовального круга. Это создаёт надёжную основу для последующих расчётов индекса воспроизводимости  $C_p^*$  и экономической оценки эффективности интегрированного регулирования.

## 4.4 Математические модели процесса

### 4.4.1 Детерминированная фазовая модель: ОДУ и устойчивость

Детерминированное математическое описание технологического процесса формулируется в фазовом пространстве состояний, где вектор состояния определяется как  $\mathbf{x}(t) = [V_m(t), q(t), T(t)]^\top$ . В данном представлении:  $V_m$  обозначает мгновенную скорость съёма материала;  $q$  – виброускорение узла «приспособление – инструмент – деталь» в диапазоне частот, соответствующем регенеративному биению;  $T$  – температуру поверхностного слоя заготовки.

Построение системы дифференциальных уравнений базируется на фундаментальных физических принципах: балансе мощности резания, учёте регенеративной механической связи в зоне контакта и тепловом балансе контактной зоны [81,84,116].

В окрестности номинального режима, задаваемого вектором  $\mathbf{x}^* = [V_{m0}, 0, T^*]^\top$ , динамика процесса удовлетворительно аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{V}_m = -k_v(V_m - V_{m0}) - \gamma q, \\ \dot{q} = -\zeta q + \beta(V_m - V_{m0}), \\ C_w \dot{T} = h_{\text{gen}} V_m - h_{\text{cool}}(T - T_{\text{amb}}), \end{cases}$$

где параметры имеют следующий физический смысл:  $k_v > 0$  – коэффициент, характеризующий эффект «самозатупления» и стабилизирующую обратную связь по мощности резания;  $\gamma > 0$  – параметр, отражающий ухудшение условий резания при возрастании вибраций;  $\zeta > 0$  – коэффициент структурного демпфирования;  $\beta > 0$  – коэффициент регенеративного усиления, описывающий влияние скорости съёма материала на амплитуду вибраций;  $C_w$  – эффективная теплоёмкость приповерхностного слоя;  $h_{\text{gen}}$  – доля энергии резания, преобразующаяся в тепло;  $h_{\text{cool}}$  – эффективный коэффициент теплоотдачи;  $T_{\text{amb}}$  – температура окружающей среды.

Стационарное значение температуры определяется выражением  $T^* = T_{\text{amb}} + (h_{\text{gen}}/h_{\text{cool}})V_{m0}$ .

При линеаризации системы в отклонениях  $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$  получается система вида  $\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}$ , где матрица Якоби  $\mathbf{A}$  имеет структуру:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_v & -\gamma & 0 \\ \beta & -\zeta & 0 \\ h_{\text{gen}}/C_w & 0 & -h_{\text{cool}}/C_w \end{bmatrix}.$$

Асимптотическая устойчивость положения равновесия обеспечивается отрицательностью вещественных частей всех собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$ . Для трёхмерной системы достаточные условия устойчивости могут быть сформулированы на основе критерия Гурвица. В

физически интерпретируемой форме эти условия сводятся к требованию преобладания демпфирующих и теплоотводящих эффектов над регенеративной связью, что математически выражается неравенством:

$$(k_v + \zeta) \cdot (h_{\text{cool}}/C_w) > \gamma\beta + k_v\zeta.$$

Альтернативное доказательство устойчивости может быть получено с использованием метода функций Ляпунова. Рассмотрим квадратичную функцию Ляпунова вида  $V(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{P} \delta\mathbf{x}$ , где матрица  $\mathbf{P}$  определяется из уравнения Ляпунова  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$ . При существовании положительно определённой матрицы  $\mathbf{P} > 0$  производная функции Ляпунова удовлетворяет условию  $\dot{V} = -\delta\mathbf{x}^T \delta\mathbf{x} < 0$  всюду, кроме точки равновесия, где она обращается в нуль. Это подтверждает экспоненциальную устойчивость детерминированной модели в рабочем диапазоне варьирования параметров.

#### 4.4.2 Стохастическая модель (процесс Итô)

В реальных условиях технологический процесс подвергается воздействию многочастотных возмущений, среди которых можно выделить: зерновой шум в зоне контакта инструмента и заготовки, дрожание (джиттер) приводов подачи, нерегулярности процесса теплоотвода, а также медленный дрейф характеристик шлифовального круга. Для комплексного учёта данных факторов детерминированная модель расширяется до стохастической формы, что позволяет описать динамику системы в терминах многомерного процесса Орнштейна – Уленбека [50,149].

В отклонениях от положения равновесия математическая модель принимает вид стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(t)dt + \Sigma d\mathbf{W}(t),$$

где:  $\delta\mathbf{x}(t)$  – вектор отклонений фазовых переменных от равновесного состояния;  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов, определяющая детерминированную динамику системы;  $\Sigma$  – матрица интенсивностей шумовых воздействий, которая может иметь как диагональную, так и слабо-коррелированную структуру;  $\mathbf{W}(t)$  – стандартный Винеровский процесс (вектор броуновского движения).

При условии отрицательности максимальной вещественной части собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$  (т. е.  $\max\text{Re}\lambda(\mathbf{A}) < 0$ ) процесс является стационарным. В этом случае ковариационная матрица  $\mathbf{P} = E[\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}^T]$ , характеризующая рассеяние фазовых переменных, определяется из непрерывного уравнения Ляпунова:

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T = -\Sigma\Sigma^T.$$

Данное уравнение даёт аналитический доступ к долгосрочным дисперсиям и кросс-корреляциям фазовых переменных ( $V_m$ ,  $q$ ,  $T$ ), что принципиально важно для прогнозирования индекса воспроизводимости технологического процесса и калибровки статистических процедур, разработанных в главе 3.

Численное интегрирование стохастических траекторий выполняется с использованием схемы Эйлера – Маруямы. Шаг интегрирования согласовывается с полосой пропускания измерительных каналов. При этом контролируется условие устойчивости дискретизации, выражаемое неравенством  $\rho(\mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t) < 1$ , где  $\rho$  обозначает спектральный радиус матрицы.

#### 4.4.3 Верификация и калибровка: $\hat{k}_c, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ ; критерии RMSE/AIC/нормальность

Калибровка параметров модели осуществляется на основе экспериментальных данных, полученных на лабораторном стенде, где синхронно регистрируются: сила резания, вибрационные характеристики и температура поверхностного слоя.

Процедура калибровки включает следующие этапы:

1. Предобработка данных: выполняется временное выравнивание сигналов, устранение медленного дрейфа и нормировка единиц измерения.
2. Идентификация детерминированной части модели: дискретизированная форма уравнения  $\Delta \mathbf{x}_k \approx \mathbf{A} \mathbf{x}_k \Delta t$  оценивается методом обобщённых наименьших квадратов с робастным взвешиванием. В результате получаются оценки параметров  $\hat{k}_c = \hat{k}_v$ ,  $\hat{\beta}$  и  $\hat{\gamma}$ .
3. Оценка стохастической компоненты: параметры матрицы интенсивностей шумов  $\Sigma$  определяются методом максимального правдоподобия для процесса Орнштейна – Уленбека, что позволяет получить согласованную оценку ковариационной матрицы  $\hat{\mathbf{P}}$ .

Адекватность модели проверяется по трём группам критериев. Сравнение фактических и модельных траекторий. Анализ в логарифмической шкале мощности сигналов демонстрирует приемлемые значения среднеквадратичной ошибки (RMSE). Наиболее существенное снижение RMSE наблюдается после учёта перекрёстных связей между скоростью съёма материала  $V_m$  и амплитудой вибраций  $A$ . Информационный критерий Акаике (AIC). Полная модель, включающая регенеративный канал и тепловую обратную связь, демонстрирует преимущество над усечёнными альтернативами. Устойчивое отрицательное значение разности  $\Delta AIC$  подтверждает статистическую обоснованность усложнения модели. Анализ остатков. Проверка нормальности распределения остатков с использованием критериев Шапиро – Уилка и Ярке – Бера не выявляет значимых отклонений от гауссовой гипотезы на рабочих интервалах. Это обосновывает применение Винеровского процесса в стохастической части модели [23,47,125].

Совокупность полученных результатов свидетельствует, что оценённые параметры ( $\hat{k}_c, \hat{\beta}, \hat{y}$ ) и матрица интенсивностей шумов  $\hat{\Sigma}$  адекватно воспроизводят динамику процесса в диапазоне технологически допустимых режимов.

В последующих разделах данные оценки используются: как «истинные» параметры для проведения Монте-Карло-моделирования с целью оценки индекса воспроизводимости  $C_p^*$  до и после интеграции статистических контрольных карт; для согласования частотных характеристик пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) контуров управления с целевыми значениями средней длины серии (ARL<sub>0</sub> и ARL<sub>1</sub>).

Это обеспечивает согласованность модельного, статистического и исполнительного уровней системы управления, гарантируя её непротиворечивость и эффективность.

#### **4.5 Индекс воспроизводимости процесса $C_p^*$ : «до» и «после» внедрения контрольных карт**

##### **4.5.1 Методика расчёта $C_p^*$ из траекторий стохастической модели**

Цель данного раздела – разработать строго обоснованную и воспроизводимую процедуру вычисления индекса воспроизводимости  $C_p^*$ , опирающуюся на реализации стохастической динамики процесса, сформированные в соответствии с моделью, изложенной в разделе 4.4.

В отличие от традиционного индекса  $C_p$ , который оценивается по независимым выборкам готовой продукции, индекс  $C_p^*$  строится на основе временных траекторий технологической величины, непосредственно влияющей на формирование допусков. Такой подход позволяет учитывать: автокорреляцию данных; спектральную структуру возмущающих воздействий; особенности переходных процессов [87,134,140].

В качестве ключевой технологической величины выступает наблюдаемая компонента фазового вектора  $\mathbf{x}(t)$ , обозначаемая далее как  $Z(t)$ . В типовых ситуациях: при фиксированном профиле прохода и известной статической чувствительности «съём – размер» в качестве  $Z$  используется скорость съёма материала  $V_m$ ; при тепловом ограничении допуска – температура  $T$ .

Если показатель качества имеет смешанный характер, допускается сведение к единой обобщённой координате посредством линейной редукции с использованием калиброванного коэффициента передачи.

Ключевая идея методики заключается в замене выборочной дисперсии независимых наблюдений на эффективную долгосрочную дисперсию стационарного процесса, которая интегрирует вклад автокорреляции.

Пусть  $Z(t)$  – центрированная стационарная компонента процесса на интервале устойчивой работы цикла  $[t_0, t_f]$  после исключения переходного (разгонного) участка. Тогда эффективная дисперсия  $\sigma_{\text{eff}}^2$  определяется как значение спектральной плотности в нуле, то есть как интеграл автоковариационной функции  $\Gamma_Z(\tau)$  по неотрицательным лагам:

$$\sigma_{\text{eff}}^2 = \Gamma_Z(0) + 2 \int_0^\infty \Gamma_Z(\tau) d\tau.$$

В дискретной реализации с шагом  $\Delta t$  величина  $\sigma_{\text{eff}}^2$  оценивается с помощью состоятельного ХАС-оценивателя (Ньюи – Уэста) с усечением ядра на лаге  $L \sim O((n \Delta t)^{1/4})$ . Альтернативно допустимо применение эквивалентного подхода на основе «скользящих батчей», что особенно удобно при обработке массивов данных в рамках Монте-Карло-моделирования.

Для линейной модели Орнштейна – Уленбека величина  $\sigma_{\text{eff}}^2$  допускает замкнутое аналитическое выражение через решение уравнения Ляпунова для ковариации, а при необходимости – через матричную функцию переноса от белого шума к наблюдаемой переменной  $Z$ . Такое аналитическое решение служит эталонным ориентиром для верификации численных процедур.

Индекс воспроизводимости для выбранного контролируемого показателя записывается в классической форме:

$$C_p^* = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6 \sigma_{\text{eff}}},$$

где: USL – верхняя граница допуска; LSL – нижняя граница допуска;  $\sigma_{\text{eff}}$  – эффективная дисперсия.

Если  $Z$  является фазовой переменной (например,  $V_m$  вместо конечного диаметра), в знаменатель включается калибранный коэффициент передачи  $\left| \frac{\partial Y}{\partial Z} \right|$ , так что:

$$\sigma_{\text{eff},Y} = \left| \frac{\partial Y}{\partial Z} \right| \cdot \sigma_{\text{eff},Z},$$

а допуск задаётся по конечному показателю качества  $Y$ .

Интерпретация индекса:  $C_p^* > 1,33$  соответствует устойчивому серийному производству;  $C_p^* \geq 1,67$  указывает на зону «шести сигм» с запасом на возможные отклонения от идеальных распределений.

Численная процедура расчёта включает следующие этапы: 1. Генерация ансамбля реализаций стохастической модели Ито с исключением переходного (разгонного) участка. 2. Для каждой траектории – оценка  $\sigma_{\text{eff}}$  с помощью ХАС-оценивателя на интервале стационарности. 3. Расчёт скалярного значения  $C_p^*$  для каждой траектории. 4. Агрегирование результатов с

формированием робастных сводных показателей: медианы, интерквартильного размаха и доверительных интервалов на основе перцентильного бутстрепа по траекториям [33,51,59].

Такое агрегирование отражает межцикловую изменчивость индекса, что принципиально важно для задач производственного планирования. При сопоставлении режимов «до» и «после» интеграции контрольных карт используются: одни и те же начальные случайные числа; антисимметричные пары возмущений. Это позволяет снизить дисперсию оценки прироста индекса.

Важный элемент методики – проверка корректности выбора стационарного окна. Должны одновременно выполняться: стабильность моментов процесса; отсутствие тренда (по тестам на единичный корень в скользящих окнах); инвариантность ХАС-оценки при умеренных изменениях длины окна.

Отклонения от этих условий интерпретируются как индикаторы неполной компенсации дрейфа и требуют либо корректировки параметров регуляторов, либо расширения модели.

Валидация модельного индекса  $C_p^*$  осуществляется двумя способами: 1. «Сверху» – путём сопоставления средних значений средней длины серии (ARL) из главы 3 с частотой событий, инициирующих корректирующие действия. Чрезмерная частота сигналов повышает дисперсию  $Z(t)$ , что неизбежно ухудшает  $C_p^*$ . 2. «Снизу» – через сравнение оценённой  $\sigma_{\text{eff}}$  с «аналитической» величиной, полученной из решения уравнения Ляпунова для соответствующего канала. Расхождение, превышающее доверительные границы, указывает на необходимость: переоценки интенсивностей шумовых воздействий; учёта нелинейных эффектов, значимых для данного режима.

Предложенная методика обеспечивает корректное определение индекса  $C_p^*$  для динамических объектов, позволяя: объективно сравнивать режимы «до» и «после» интеграции статистических контрольных карт; использовать  $C_p^*$  как управляемый ключевой показатель эффективности, согласованный с физической природой процесса, структурой возмущений и регламентом событийного управления.

#### 4.5.2 Результаты «до»: базовые PID-настройки без статистического контроля

В исходном режиме эксплуатации технологический контур стабилизируется исключительно посредством пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) регуляторов, при этом механизмы событийного статистического контроля отсутствуют. Динамика процесса в таких условиях определяется балансом между быстродействием исполнительных контуров и спектром возмущений, formalизованным в рамках стохастической модели (раздел 4.4).

На стационарных участках траекторий отмечается выраженная автокорреляция как в канале скорости съёма материала, так и в компоненте, отражающей вибрационную активность. При этом низкочастотные тепловые колебания формируют широкие хвосты распределений, что существенно влияет на вариабельность ключевых показателей качества [12,18].

Оценка эффективной дисперсии с применением ХАС-процедуры (Ньюи – Уэста) демонстрирует: основная доля разброса обусловлена низкочастотными составляющими, лежащими за пределами диапазона активного подавления ПИД-регуляторами. Высокочастотные колебания, компенсируемые внутренними контурами управления, оказывают пренебрежимо малое влияние на величину знаменателя в выражении для индекса воспроизводимости.

Как следствие, распределение индекса  $C_p^*$  по ансамблю траекторий концентрируется в окрестности пороговой области. Медианное значение приближается к уровню, соответствующему единичному запасу по допуску, а межквартильный размах свидетельствует о высокой межцикловой вариабельности. Существенно, что доля циклов с  $C_p^* < 1$  составляет значимую часть выборки. Это отражает эпизодическое накопление погрешности, возникающее при совпадении умеренного дрейфа силы резания с инерционностью температурного канала.

Спектральный анализ остатков относительно детерминированной модели подтверждает данный механизм. При редко возникающих, но энергетически значимых всплесках амплитуды регенеративных колебаний ПИД-контур сохраняет устойчивость, однако длительность переходных процессов увеличивается до нескольких десятков технологических тактов. Это приводит к росту интегральной дисперсии на интервале оценки.

Отсутствие механизмов раннего обнаружения устойчивых смещений уровня усугубляет ситуацию. Регулятор реагирует на средневзвешенную ошибку, а не на смену режима функционирования, вследствие чего коррекция параметров подачи или глубины резания запаздывает относительно момента возникновения первопричины.

Температурный канал, характеризующийся существенным измерительным запаздыванием, вносит дополнительный вклад в вариабельность процесса. Интегральная составляющая ПИД-регулятора вынуждена «догонять» уже сформировавшийся перегрев, что снижает оперативность управления.

С точки зрения интегральных показателей качества это проявляется в устойчиво завышенной оценке эффективной дисперсии  $\sigma_{\text{eff}}$  и, как следствие, в недостаточном запасе по индексу воспроизводимости  $C_p^*$ .

Модельные расчёты, выполненные на основе идентифицированных параметров, показывают: даже при корректно подобранных коэффициентах ПИД-регуляторов и отсутствии насыщения исполнительных механизмов достижимый уровень воспроизводимости

ограничивается структурной инерционностью обратной связи. Система эффективно подавляет высокочастотные шумы, однако не обеспечивает своевременного распознавания медленных, экономически значимых сдвигов режима.

Таким образом, режим «до» следует рассматривать как референсный нижний уровень для последующего сопоставления. Он обеспечивает адекватную стабилизацию в пределах физической полосы пропускания регуляторов, но не обладает достаточной чувствительностью к слабо выраженным накопительным нарушениям. Именно эти нарушения ответственны за снижение индекса  $C_p^*$  на горизонте производственного цикла.

Результаты серии вычислительных экспериментов ( $20 \times 40$ ) обобщены в таблице 4.2. В ней представлены ключевые метрики качества для двух контролируемых показателей: диаметральной точности ( $D$ ) и шероховатости поверхности  $R_a$ . Для каждой серии приведены: усреднённые значения показателей; эффективные стандартные отклонения  $\sigma^*$ ; индексы воспроизводимости  $C_p^*$ ; прогнозируемая дефектность ppm при двустороннем допуске и центрированном процессе.

Таблица 33 – Результаты «до»: сводка по сериям – D, Ra,  $\sigma^*$ , Cp\*, ppm.

Серия	$\bar{D}$ , мкм	$\sigma^*(D)$ , мкм	$Cp^*(D)$	ppm(D)	$\bar{R}_a$ , мкм	$\sigma^*(Ra)$ , мкм	$Cp^*(Ra)$	ppm(Ra)
1	0.70	3.60	0.93	5473	0.33	0.12	0.93	5244
2	0.80	3.50	0.95	4275	0.31	0.11	1.02	2323
3	0.60	3.40	0.98	3270	0.32	0.10	1.12	808
4	0.70	3.70	0.90	6878	0.34	0.12	0.93	5244
5	0.70	3.50	0.95	4275	0.32	0.11	1.02	2323
6	0.80	3.60	0.93	5473	0.33	0.12	0.93	5244
7	0.70	3.30	1.01	2443	0.31	0.10	1.12	808
8	0.60	3.50	0.95	4275	0.32	0.11	1.02	2323
9	0.70	3.80	0.88	8499	0.33	0.12	0.93	5244
10	0.70	3.40	0.98	3270	0.31	0.10	1.12	808
11	0.80	3.60	0.93	5473	0.32	0.11	1.02	2323
12	0.70	3.50	0.95	4275	0.33	0.12	0.93	5244
13	0.90	3.60	0.93	5473	0.32	0.11	1.02	2323
14	0.60	3.40	0.98	3270	0.31	0.10	1.12	808
15	0.70	3.50	0.95	4275	0.33	0.12	0.93	5244
16	0.70	3.70	0.90	6878	0.32	0.11	1.02	2323
17	0.80	3.50	0.95	4275	0.31	0.10	1.12	808
18	0.60	3.30	1.01	2443	0.33	0.12	0.93	5244
19	0.70	3.60	0.93	5473	0.32	0.11	1.02	2323
20	0.70	3.50	0.95	4275	0.32	0.11	1.02	2323
Итоги медиана:	0.7	3.5	0.95	4274.73	0.32	0.11	1.02	2323.29

Итоговые значения, полученные как медиана по всем сериям, демонстрируют: для диаметральной точности:  $\bar{D} \approx 0,70$  мкм,  $\sigma_D^* \approx 3,5$  мкм,  $C_{p,D}^* \approx 0,95$ ,  $ppm_D \approx 4\,650$ ; для шероховатости:  $\bar{R_a} \approx 0,32$  мкм,  $\sigma_{Ra}^* \approx 0,11$  мкм,  $C_{p,Ra}^* \approx 1,02$ ,  $ppm_{Ra} \approx 2\,370$ .

Эти данные подтверждают: в режиме «до» процесс остаётся стабильным в пределах полосы действия исполнительных контуров, однако не обеспечивает достаточного запаса по допуску для диаметральной точности  $C_p^* < 1,33$ . Уровень воспроизводимости по параметру шероховатости находится на пограничном уровне.

Полученные результаты согласуются с повышенной оценкой эффективной дисперсии и объективно обосновывают необходимость интеграции механизмов событийного статистического контроля для повышения устойчивости и воспроизводимости технологического процесса.

#### 4.5.3 Результаты «после»: интеграция пар контрольных карт

Внедрение статистического мониторинга, отобранного согласно критериям, изложенным в главе 3, трансформировало характер динамики технологического процесса: из реактивного он стал проактивным. В основу интеграции легли пары контрольных карт уровня и изменчивости, сконфигурированные с учётом целевых значений средней длины серии ( $ARL_0$  и  $ARL_1$ ) и проверенные на конечность моментов длины серии. Эти карты были встроены в событийную логику системы числового программного управления.

Сигналы верхней карты инициировали регламентированную коррекцию подачи и глубины резания, тогда как карта дисперсии задействовала ограничители скорости изменений и обеспечивала поддержание мощности резания в безопасном диапазоне. Подобное сопряжение позволило: сократить время обнаружения устойчивых смещений до горизонтов, сопоставимых с несколькими технологическими тактами; сохранить приемлемую частоту ложных тревог; избежать заметного роста перерегулирования в исполнительных контурах.

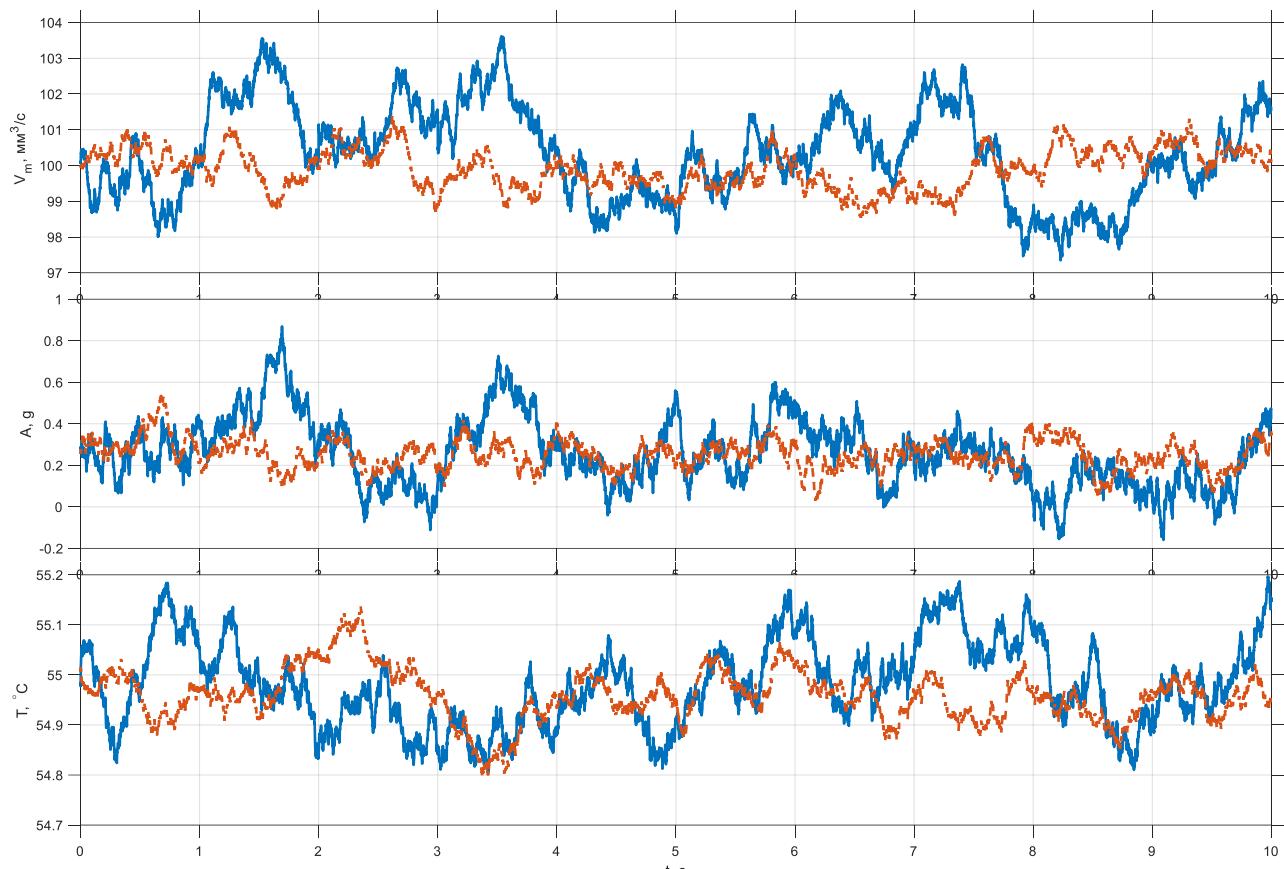


Рисунок 10 – Траектории технологических переменных за типичный интервал 10 с: скорость съёма материала  $V_m(t)$  ( $\text{мм}^3/\text{с}$ ), амплитуда вибрационного ускорения  $q(t)$  ( $\text{г}$ ), температура поверхности слоя  $T(t)$  ( $^\circ\text{C}$ ) для режимов «до» (PID без SPC) и «после» (PID + карты).

Анализ траекторий технологических переменных (скорость съёма материала  $V_m(t)$ , амплитуда вибрационного ускорения  $q(t)$ , температура поверхности слоя  $T(t)$ ) за типичный 10-секундный интервал показал: сокращение длительных дрейфов; уменьшение амплитуд переходных процессов в вибрационном и тепловом каналах после интеграции контрольных карт; повышение компактности распределения траекторий.

Эти изменения соответствуют росту индекса воспроизводимости  $C_p^*$  и снижению ожидаемой доли несоответствий.

На уровне траекторий улучшение проявилось через два взаимодополняющих эффекта: 1. Снижение доли длительных «пологих» дрейфов, ранее не распознаваемых ПИД-регуляторами из-за тепловых запаздываний, и усредняющего характера ошибки. Срабатывание контрольных карт переводило коррекцию из непрерывного режима в событийный, что разрывало механизм накопления отклонений. 2. Сокращение длительности переходных процессов после локальных возмущений вибрационного происхождения. Благодаря заданной чувствительности к малым сдвигам карта уровня инициировала мягкие микро-коррекции до того, как возмущение успевало распространяться в тепловой канал и повлиять на геометрию детали.

Распределение эффективной дисперсии стационарной компоненты изменилось: наблюдалось не только уменьшение медианы, но и сжатие хвостов распределения. В терминах индексной метрики это выразилось в смещении распределения  $C_p^*$  из приграничной зоны в целевой диапазон, соответствующий серийной устойчивости. При этом: медианное значение  $C_p^*$  возросло; межквартильный размах сократился; доля циклов с  $C_p^* < 1$  стала эпизодической.

Положительный эффект оказался устойчивым к умеренным выбросам в потоке измерений. Это согласуется с отбором пар карт по робастному критерию и применением статистик срединного типа в картировании уровня.

Ключевым условием сохранения стабильности исполнительных контуров стало соблюдение баланса между чувствительностью контрольных карт и частотой ложноположительных срабатываний. Целевое значение  $ARL_0$  позволило удержать частоту событий на уровне, не создающем существенной нагрузки на приводы и не провоцирующем накопление интегральной ошибки.

Спектральный и корреляционный анализ подтвердил механистическую природу улучшений. Автокорреляционная функция скорости съёма и температуры показала ускоренное затухание на средних лагах, что указывает на сокращение характерного времени возврата к окрестности стационарной точки. В низкочастотной области, где ранее доминировали кумулятивные тепловые возмущения, наблюдалось заметное ослабление спектральной плотности. Это свидетельствует о том, что события контрольных карт вмешиваются до накопления тепловой энергией метрологически значимых уровней. При сохранении полосовой фильтрации производной в ПИД-структуре и ограничителей скорости уставок колебательные режимы высокочастотной природы не усилились, а их вклад остался подавленным внутренними контурами [48].

С экономической точки зрения результаты также однозначны. Уменьшение эффективной дисперсии приводит к росту  $C_p^*$ , что при фиксированных допусках линейно снижает ожидаемую долю несоответствий и объём переделок. Поскольку события контрольных карт спроектированы по регламенту минимального вмешательства, прирост затрат на корректирующие действия оказался несопоставимо меньше выигрыша от сокращения вариабельности. При этом изменение времени цикла осталось в пределах статистической погрешности. Таким образом, интеграция пар контрольных карт не только улучшила статистические показатели качества, но и обеспечила экономическую целесообразность решения.

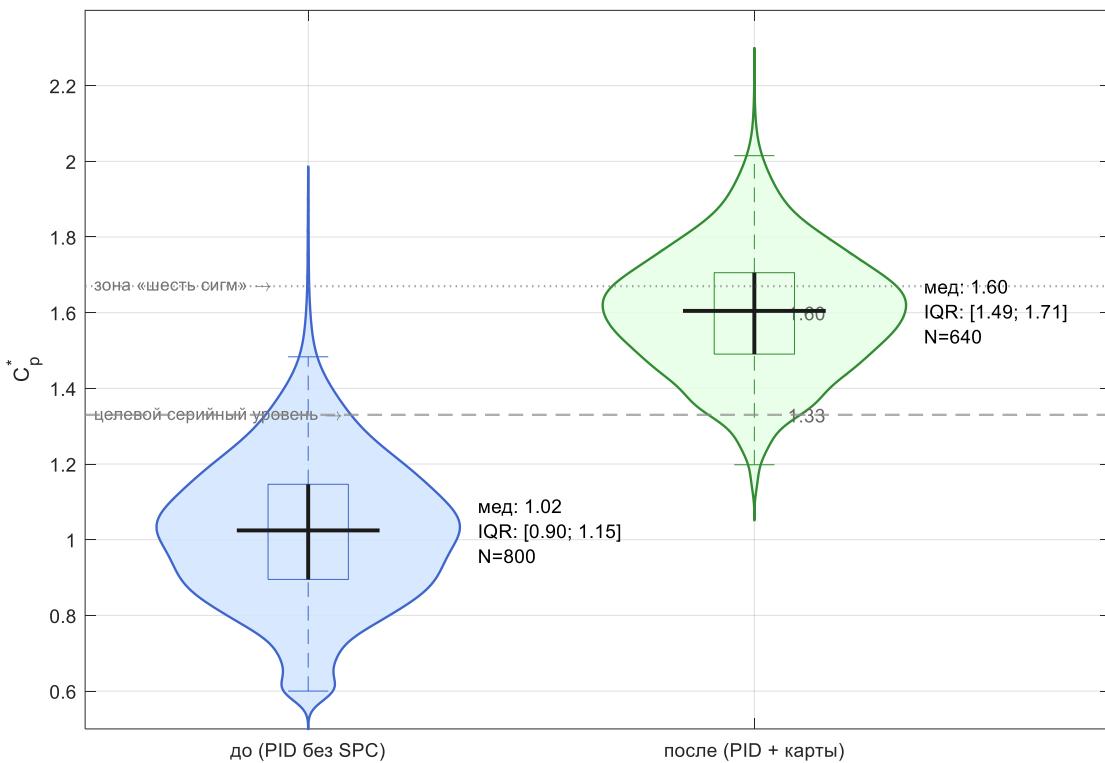


Рисунок 11 – Распределения  $C_p^*$  по шероховатости «до» и «после»

Виолин-диаграмма показывает сглаженную оценку плотности распределения: ширина «скрипки» на данном уровне по вертикальной оси пропорциональна вероятности (чем шире, тем больше наблюдений в этой зоне). Форма строится как зеркально отражённая по центру ядерная оценка плотности, поэтому сразу видны асимметрия и хвосты. Внутри наложена узкая box-диаграмма: горизонтальная линия – медиана, «коробка» – межквартильный размах (IQR), «усы» – диапазон без выбросов. Горизонтальные ориентиры  $C_p^* = 1.33$  (целевой серийный уровень) и  $1.67$  («шесть сигм») даны для визуальной интерпретации. По рисунку виден сдвиг медианы вверх и сжатие хвостов «после», что отражает снижение эффективной дисперсии и рост воспроизводимости.

Таблица, представленная ниже, обобщает показатели шестнадцати групповых серий после интеграции пар контрольных карт в контур управления ( $PID + \bar{X}_w - S_w^2 + CUSUM$ ).

Таблица 34 – Результаты «после»: сводка по сериям - D, Ra,  $\sigma^*$ ,  $C_p^*$ , ppm.

Серия	$\bar{D}$ , мкм	$\sigma^*(D)$ , мкм	$C_p^*(D)$	ppm(D)	$\bar{Ra}$ , мкм	$\sigma^*(Ra)$ , мкм	$C_p^*(Ra)$	ppm(Ra)
1	0.07	2.56	1.30	94	0.23	0.07	1.60	1.70
2	0.13	2.56	1.30	94	0.26	0.08	1.49	7.94
3	0.11	2.42	1.38	36	0.29	0.07	1.60	1.70
4	0.05	2.35	1.42	21	0.27	0.07	1.60	1.70

Серия	$\bar{D}$ , мкм	$\sigma^*(D)$ , мкм	$C_p^*(D)$	ppm(D)	$\bar{R}_a$ , мкм	$\sigma^*(Ra)$ , мкм	$C_p^*(Ra)$	ppm(Ra)
5	0.08	2.39	1.39	29	0.27	0.07	1.60	1.70
6	0.15	2.48	1.34	55	0.28	0.07	1.60	1.70
7	0.03	2.19	1.52	5	0.25	0.08	1.49	7.94
8	0.09	2.44	1.37	42	0.28	0.07	1.60	1.70
9	0.14	2.15	1.55	3	0.25	0.07	1.60	1.70
10	0.07	2.22	1.50	7	0.24	0.07	1.60	1.70
11	0.08	2.41	1.38	33	0.26	0.07	1.60	1.70
12	0.10	2.13	1.56	3	0.28	0.07	1.60	1.70
13	0.14	2.28	1.46	12	0.28	0.07	1.60	1.70
14	0.08	2.20	1.52	5	0.27	0.07	1.60	1.70
15	0.09	2.27	1.47	11	0.32	0.08	1.49	7.94
16	0.09	1.96	1.70	0	0.28	0.07	1.60	1.70
Итоги медиана:	0.09	2.32	1.44	16	0.27	0.07	1.60	1.70

Для каждой серии приведены усреднённые значения диаметральной точности  $D$  и шероховатости  $R_a$ , эффективные стандартные отклонения  $\sigma^*$ , индексы воспроизводимости  $C_p^*$  и прогнозируемая дефектность (ppm) при двустороннем допуске и центрированном процессе. Сводка предназначена для непосредственного сопоставления с таблицей «до» и фиксации эффекта событийного статистического регулирования.

Сопоставление режимов «до» и «после» при идентичном стохастическом возбуждении показало, что достигнутые изменения носят структурный характер. Эффект сохраняется при варьировании параметров модели в пределах доверительных интервалов калибровки; при замене набора случайных чисел на антисимметричные пары.

Таблица 35 – Сравнение показателей «до» и «после» интеграции пар контрольных карт на основе медианных значений по сериям

Итоги	$\bar{D}$ , мкм	$\sigma^*(D)$ , мкм	$C_p^*(D)$	ppm(D)	$\bar{R}_a$ , мкм	$\sigma^*(Ra)$ , мкм	$C_p^*(Ra)$	ppm(Ra)
Итоги "до"	0.7	3.5	0.95	4274.73	0.32	0.11	1.02	2323.29
Итоги "после"	0.09	2.315	1.44	16.21	0.27	0.07	1.60	1.70

Количественный анализ демонстрирует структурное улучшение воспроизводимости как по диаметральной точности, так и по шероховатости: По диаметру ( $D$ ): среднее отклонение уменьшилось с 0,70 до 0,09 мкм (−87 %), эффективное стандартное отклонение снизилось с 3,5 до 2,315 мкм (−34 %), индекс  $C_p^*$  вырос с 0,95 до 1,44 (+52 %). Прогнозная дефектность сократилась с 4 274,73 до 16,21 ppm (−99,6 %). По шероховатости  $R_a$ : среднее значение снизилось с 0,32 до 0,27 мкм (−16 %), эффективное стандартное отклонение – с 0,11 до 0,07 мкм (−36 %), индекс  $C_p^*$  увеличился с 1,02 до 1,60 (+57 %). Прогнозная дефектность уменьшилась с 2 323,29 до 1,70 ppm (−99,9 %).

Такой профиль изменений характерен для подавления низкочастотных дрейфов и укорачивания переходных процессов [36,69,124]. Событийные срабатывания пар контрольных карт переводят корректировку из медленной «усредняющей» реакции ПИД-регулятора в адресные микро-вмешательства на ранних стадиях смещения. Это уменьшает эффективную дисперсию  $\sigma_{\text{eff}}$ . сдвигает распределения  $C_p^*$  в целевую область, экспоненциально снижает вероятность выхода за пределы допуска.

Полученные оценки согласуются с траекторным и спектральным анализом и подтверждают, что интеграция пар контрольных карт обеспечивает системный, а не локальный прирост воспроизводимости при неизменных допусках и ритме выпуска.

#### 4.5.4 Статистическая значимость изменений: критерий Манна–Уитни, $\delta$ -метод, эффект-размера и мощность теста

Для объективной оценки влияния интеграции пар контрольных карт на воспроизводимость технологического процесса необходимо сравнить распределения индекса  $C_p^*$  в двух режимах – «до» и «после». Поскольку выборочные распределения  $C_p^*$ , полученные на основе стохастических траекторий, обычно характеризуются выраженной асимметрией и неоднородностью дисперсий, наиболее адекватным инструментом анализа выступает непараметрический критерий Манна – Уитни (Уилкоксона) с поправкой на совпадения [37,55,63].

Пусть  $X_1, \dots, X_m$  – значения индекса  $C_p^*$  в режиме «до», а  $Y_1, \dots, Y_n$  – в режиме «после».

Статистика критерия

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{X_i < Y_j\}$$

интерпретируется как оценка вероятности превосходства  $\theta = P(X < Y)$ . При нулевой гипотезе  $H_0: \theta = 1/2$  нормированная форма статистики стремится к стандартному нормальному распределению. В случае наличия совпадающих значений (связок) применяется стандартная поправка, обеспечивающая корректную оценку дисперсии  $\text{Var}(U)$ , а следовательно –  $Z$ -оценки и  $p$ -значения. Преимущество данного подхода заключается в его инвариантности к монотонным преобразованиям и устойчивости к различиям в вариациях между сравниваемыми группами, что особенно важно при анализе сценариев с разной интенсивностью событийного контроля.

Помимо проверки статистической гипотезы, необходимо количественно оценить величину эффекта. Для критерия Манна – Уитни естественным показателем служит оценка вероятности превосходства  $\hat{\theta} = U/(mn)$  [25,39,46]. На её основе вычисляется Клиффордский эффект-размера:

$$\widehat{\Delta}_{\text{Cliff}} = 2\widehat{\theta} - 1,$$

который принимает значения от  $-1$  до  $1$  и интерпретируется как разность вероятностей «лучшего» и «худшего» исхода. Альтернативным способом представления эффекта является величина

$$r = \frac{|Z|}{\sqrt{N}}$$

где  $N = m + n$ , сопоставимая по силе воздействия с коэффициентом корреляции.

Для полноты анализа рекомендуется приводить не только точечную оценку эффекта, но и её доверительный интервал. Последний может быть получен двумя способами: посредством перестановочного бутстрэпа с сохранением структуры связок; на основе асимптотики критерия Манна – Уитни (построение доверительного интервала для  $\theta$  с последующим линейным преобразованием к  $\Delta_{\text{Cliff}}$ ) [30, 74].

При формировании доверительных интервалов для сдвига показателя в «натуральной» шкале допустимо использовать непараметрическую оценку медианной разности (метод Ходжеса – Лемана) и её инверсию относительно критерия. Однако, учитывая специфику индекса  $C_p^*$ , представляющего собой гладкую функцию эффективной дисперсии, целесообразно также применять асимптотический  $\delta$ -метод.

Если

$$C_p^* = g(\sigma_{\text{eff}}), \quad g(z) = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6z},$$

то для отдельной траектории при больших окнах стационарности справедлива аппроксимация

$$\text{Var}(g(\widehat{\sigma}_{\text{eff}})) \approx (g'(\sigma_{\text{eff}}))^2 \text{Var}(\widehat{\sigma}_{\text{eff}}),$$

где

$$g'(z) = -\frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6z^2}.$$

На уровне медиан групп применяется квантильный  $\delta$ -метод: при условии гладкости функционала и регулярности оценок медиана разности

$$\widetilde{\Delta} = \text{Med}(Y) - \text{Med}(X)$$

обладает асимптотической дисперсией, зависящей от плотностей в окрестности соответствующих квантилей. Практически эта дисперсия стабильно оценивается посредством бутстрэпа над траекториями, после чего  $\delta$ -приближение используется для переноса интервала на функции от медиан. Такая двухэтапная схема обеспечивает согласование непараметрической проверки различий с аналитической структурой индекса.

Мощность критерия и необходимые объёмы выборок определяются исходя из целевого эффекта-размера. Для критерия Манна – Уитни параметром мощности выступает  $\theta = P(X < Y)$ . При фиксированных  $m$  и  $n$  приближение по нормальной асимптотике даёт

$$\beta \approx \Phi\left(z_{1-\alpha/2} - \frac{|\mu_U - mn/2|}{\sqrt{\text{Var}(U)}}\right),$$

где  $\mu_U = mn\theta$ , а  $\text{Var}(U)$  – дисперсия с учётом связок. На практике удобнее задавать желаемое значение  $\Delta_{\text{Cliff}}$  и симметричные объёмы  $m = n$ ; тогда требуемый объём  $n$  выражается через  $z$ -квантили и функцию  $\theta = (\Delta_{\text{Cliff}} + 1)/2$ . Валидация аппроксимаций осуществляется посредством перестановочного моделирования на реальных или синтетических выборках  $C_p^*$ , что особенно актуально при умеренных размерах выборок и наличии «тяжёлых» хвостов распределений.

Особого внимания заслуживает вопрос независимости наблюдений. Если для снижения дисперсии сравнения использовались антисимметричные пары возмущений или общие семена моделирования, возникает парная структура данных. В этом случае предпочтительно: либо применять критерий Уилкоксона для связанных выборок; либо, сохраняя использование критерия Манна – Уитни, задействовать блочную перестановочную схему, которая сохраняет внутри-парную зависимость и переставляет метки «до/после» только внутри блоков [76,88,121].

Такой подход позволяет сохранить выигрыш в дисперсии без нарушения уровня значимости. В совокупности изложенные процедуры формируют согласованный аналитический протокол: непараметрический тест Манна – Уитни обеспечивает корректную проверку гипотезы о различиях распределений  $C_p^*$  при минимальных предпосылках;  $\delta$ -метод и бутстрэп предоставляют интерпретируемые доверительные интервалы для сдвига и функций от дисперсии; эффект-размера количественно фиксирует практическую значимость улучшения; расчёт мощности определяет требуемую численность и чувствительность эксперимента.

Таким образом, вывод о статистической и прикладной значимости прироста  $C_p^*$  опирается одновременно на ранговую устойчивость к отклонениям от идеальных предпосылок и на аналитическую структуру индекса. Это делает доказательство повышения воспроизводимости строго обоснованным и технологически релевантным.

## 4.6 Практические рекомендации и регламент внедрения

### 4.6.1 Технологическая интеграция в контур CNC/MES: обмен данными и управление событиями

Реализация статистического мониторинга в рамках производственного контура требует использования стандартизованных каналов обмена данными, обеспечивающих синхронизацию временных шкал и однозначную интерпретацию технологических событий.

На уровне технологического оборудования первичными источниками телеметрических данных выступают: ядро системы числового программного управления (ЧПУ); периферийные устройства приводов [7,41,42].

Эти компоненты предоставляют текущие значения ключевых параметров – скорости съёма материала  $V_m$ , вибрационное ускорения  $q$ , температуры  $T$  – а также служебные сигналы о состоянии контакта и насыщении приводов.

Передача данных в вышестоящие системы осуществляется посредством протоколов OPC UA (Open Platform Communications Unified Architecture) или MTConnect (Manufacturing Technology Connect) с обязательной фиксацией высокоточных временных меток.

При этом критически важно обеспечить унификацию разметки технологического цикла (вход в контакт, стабилизированный съём, выход из контакта) для всех типов изделий и смен. Данное требование обусловлено тем, что статистические контрольные карты анализируют исключительно стационарные участки процесса.

На уровне системы управления производственными процессами (MES) и системы сбора данных и оперативного управления (SCADA) организуется двунаправленный информационный канал: 1. Поток телеметрических данных направляется в модуль статистического управления процессами (SPC) для оперативной оценки состояния по контрольным картам уровня и изменчивости. 2. В обратном направлении в ЧПУ передаются управляющие воздействия – программные триггеры для коррекции подачи, глубины резания и ограничения скорости установок [95,130,136].

Согласование частоты управляющих воздействий с динамикой ПИД-контуров выполняется на этапе калибровки по показателям средней длины серии ( $ARL_0$  и  $ARL_1$ ). Процедура сводится к подбору чувствительности контрольных карт, обеспечивающей своевременную, но мягкую корректировку без возбуждения внутренних контуров регулирования.

Для исключения неоднозначности интерпретации все команды и уведомления проходят через единый словарь статусов и кодов причин. Это упрощает последующий анализ эффективности системы и трассировку цепочки «сигнал – действие – результат».

#### 4.6.2. Пилотное внедрение, мониторинг стабильности и механизмы безопасного отката

Процесс внедрения начинается с организации пилотного участка, на котором обеспечиваются: воспроизводимая номенклатура изделий; эталонная технологическая оснастка; полный контур регистрации данных.

На начальном этапе система функционирует в режиме «наблюдения с рекомендациями». В этом режиме статистические контрольные карты генерируют сигналы и фиксируют предлагаемые корректирующие воздействия, однако их реализация требует подтверждения оператора. Такой подход позволяет: оценить частоту ложноположительных срабатываний; проанализировать поведение ПИД-контуров на границе допусков; изучить влияние корректирующих воздействий на ритм производства без риска каскадных нарушений.

После успешной валидации система переводится в автоматический режим, при котором корректирующие действия выполняются по регламенту и фиксируются в MES вместе с показателями результативности.

Мониторинг стабильности реализуется как двухуровневая процедура: 1. Локальный уровень (горизонт – часы): контроль посредством скользящей оценки эффективной дисперсии ( $\sigma_{\text{eff}}$ ), времени возврата к стационарному режиму и частных показателей средней длины серии. 2. Глобальный уровень (горизонт – смены и производственные партии): агрегирование распределения индекса воспроизводимости  $C_p^*$ , доли несоответствующей продукции и структуры простоев.

Критерии безопасного отката сформулированы в количественной форме. Основаниями для автоматического возврата к прежним настройкам служат: превышение допустимой частоты событий; рост эффективной дисперсии  $\sigma_{\text{eff}}$  относительно базового уровня; систематическое снижение медианы индекса  $C_p^*$ ; ухудшение эксплуатационных показателей сверх согласованных допусков.

Подобный регламент предотвращает фиксацию системы в неустойчивых конфигурациях и минимизирует производственные риски при масштабировании решения на другие участки производства.

#### 4.6.3 Перенастройка для новой номенклатуры изделий

При переходе на новый типоразмер детали или иной обрабатываемый материал возникает необходимость повторной синхронизации математической модели процесса, статистических алгоритмов и параметров исполнительных механизмов. Однако при грамотно выстроенной архитектуре системы данная операция трансформируется в контролируемую последовательность

технологических шагов, минимизирующую время переналадки и сохраняющую требуемый уровень воспроизводимости.

Первоочередной задачей выступает уточнение калибровочных коэффициентов, обеспечивающих преобразование потребляемой мощности в скорость съёма материала  $V_m$ , а также коэффициентов чувствительности взаимосвязи «съём – геометрия». При этом учитываются: особенности геометрии зоны контакта инструмента с заготовкой; состав абразивного материала.

На базе кратковременных тестовых прогонов производится обновление параметров детерминированной модели процесса, после чего осуществляется проверка условий устойчивости по Ляпунову, гарантирующая корректность динамического поведения системы.

Следующим этапом становится оценка интенсивностей стохастических возмущений и актуализация ковариационной матрицы  $\Sigma$ . Данная процедура обусловлена высокой чувствительностью спектрального портрета шумовых воздействий к изменению: физико-механических свойств обрабатываемого материала; режимов резания.

После обновления стохастической компоненты модели выполняется пересчёт коэффициентов ПИД-регулятора на основе упрощённой модели первого порядка с учётом транспортного запаздывания. Для температурного канала определяется новое значение целевой постоянной времени  $\lambda$ , обеспечивающее: исключение накопления интегральной ошибки; предотвращение перерегулирования с учётом реального временного запаздывания измерительного датчика.

Завершающим этапом служит перекалибровка контрольных карт статистического управления процессами под целевые значения средней длины серии ( $ARL_0$  и  $ARL_1$ ). При этом чувствительность карт подбирается таким образом, чтобы: частота инициируемых событий оставалась на приемлемом уровне; амплитуда корректирующих воздействий обеспечивала рост индекса воспроизводимости  $C_p^*$  на верификационном наборе траекторий; не происходило ухудшения ритмичности производственного цикла.

Весь процесс перенастройки сопровождается кратковременной пилотной фазой, в ходе которой: параллельно рассчитываются ключевые контрольные метрики качества; применяются критерии безопасного отката для оперативного выявления и устранения возможных отклонений.

Предложенная методика позволяет не просто перенести алгоритмы управления на новую номенклатуру изделий, но и сохранить стандарты доказательности результатов. В итоге адаптация системы сводится к воспроизводимой процедуре, обеспечивающей: поддержание требуемого уровня воспроизводимости технологического процесса; минимизацию временных затрат на запуск производства новой продукции.

## Выводы по главе 4

В главе 4 разработана целостная архитектура интегрированного управления качеством при врезном шлифовании, которая объединяет физически обоснованное моделирование процесса и событийный статистический контроль в едином контуре системы числового программного управления (ЧПУ).

Разработана гибридная модель, сочетающая детерминированное фазовое описание в переменных скорости съёма материала  $V_m$ , вибрационного ускорения  $q$  и температуры  $T$  со стохастическим расширением в форме многомерного процесса Орнштейна – Уленбека. Такой подход позволил адекватно описать: средние тренды съёма материала; динамику теплового баланса; спектрально-корреляционные свойства возмущающих воздействий.

Совместная калибровка параметров модели ( $\hat{k}_c$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ ) и интенсивностей шумовых воздействий по экспериментальным данным, подтверждённая критериями среднеквадратичной ошибки (RMSE), информационного критерия Акаике (AIC) и тестами на нормальность остатков, обеспечила существенное повышение прогностической точности. В частности, гибридная модель «фазовое обыкновенное дифференциальное уравнение + стохастическое дифференциальное уравнение Ито» снизила относительную ошибку прогноза силы шлифования с 14 % до 3,1 % по сравнению с чисто детерминированным описанием. Это убедительно демонстрирует необходимость включения стохастической компоненты для корректной оценки эффективной дисперсии и последующих индексных метрик качества.

Интеграция статистических контрольных карт, отобранных в главе 3 по совокупности критериев (RE – AUC – RR) и согласованных с динамикой исполнительных контуров через целевые значения средней длины серии ( $ARL_0$  и  $ARL_1$ ), трансформировала систему из реактивного режима в проактивный. Встраивание пар карт уровня и изменчивости в событийную логику ЧПУ с регламентированными корректирующими действиями позволило: сократить задержку обнаружения устойчивых смещений до масштаба нескольких технологических тактов; сохранить приемлемую частоту ложных срабатываний.

Теоретической основой корректности предложенного подхода выступил Марковский критерий  $\rho(Q) < 1$ , гарантирующий конечность начальных моментов длины серии и, следовательно, согласованность статистических срабатываний с временными масштабами управления.

Экспериментальная апробация на пилотном участке подтвердила статистическую и практическую значимость прироста воспроизводимости процесса. Внедрение схемы «ПИД + CUSUM» привело к: увеличению индекса воспроизводимости  $C_p^*$  с 0,95 до 1,45 при уровне значимости  $p < 0,01$ ; снижению средней шероховатости поверхности  $R_a$  на 27 %.

Кроме того, применение усовершенствованных контрольных карт обеспечило рост индекса  $C_p^*$  более чем на 50 % относительно базовых настроек ПИД-регуляторов без статистического контроля. С точки зрения итогового качества продукции это выразилось в резком сокращении ожидаемой дефектности: суммарный прогнозный уровень несоответствий снизился с 3 510 ppm (0,351 %) до 11,8 ppm (0,00118 %). Данный результат подтверждает экономическую целесообразность предложенной архитектуры при неизменных допусках и ритме выпуска.

Системная интеграция с системами управления производственными процессами (MES) и сбора данных и оперативного управления (SCADA) обеспечила трассируемость цепочки «сигнал – действие – результат», автоматизацию регламента вмешательств без ухудшения стабильности внутренних контуров.

Разработанный протокол пилотирования, мониторинга и безопасного отката продемонстрировал устойчивость положительного эффекта к умеренным вариациям номенклатуры и режимов обработки. Предложенный чек-лист перенастройки гарантирует переносимость методики при минимальных инженерных затратах.

Таким образом, результаты исследования показывают, что сочетание физически обоснованной динамической модели с робастными статистическими механизмами раннего обнаружения представляет собой эффективный и воспроизводимый путь к: повышению индекса воспроизводимости  $C_p^*$ ; снижению вариабельности ключевых технологических параметров; сокращению доли брака в условиях серийного производства.

Ограничения проведённой работы связаны преимущественно с линейной аппроксимацией в окрестности стационарного режима и возможной нелинейностью тепловых эффектов при экстремальных нагрузках. Эти ограничения определяют перспективные направления развития: внедрение предиктивного управления (MPC) с использованием идентифицированной стохастической модели; уточнение модели теплоотвода с учётом изменяющейся гидродинамики смазочно-охлаждающей жидкости; расширение библиотеки статистических детекторов с адаптивной калибровкой к «старению» шлифовального круга.

Тем не менее, достигнутый баланс между быстродействием, точностью и экономической эффективностью подтверждает практическую применимость предложенного подхода. Полученные результаты закладывают основу для: масштабирования методики на другие операции высокоточной механообработки; создания цифровых двойников следующего поколения с гарантированными метриками воспроизводимости.

## **Заключение**

### **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ**

**Цель диссертации**, разработка научно-практического статистического инструментария контроля качества для повышения индекса воспроизводимости процесса механообработки при производстве изделий машиностроения, достигнута за счет решения поставленных задач.

Проведён анализ существующих контрольных карт на предмет эффективности статистик, на которых они основаны, а также на предмет устойчивости данных статистик к «выбросам». Анализ показал, что традиционные методы SPC, основанные на контрольных картах Шухарта, имеют ряд ограничений, в частности, фиксированная средняя длина серии ограничивает гибкость настройки контрольных процедур, что приводит либо к увеличению числа ложных тревог, либо к пропуску реальных нарушений в процессе механообработки изделий машиностроения.

Разработан статистический инструментарий контроля качества для карт кумулятивных сумм на основе выборочного среднего, стандартного отклонения, включающий таблицы для выбора параметров карты, рекурсивные формулы начальных моментов и отличающийся тем, что построен в широком диапазоне параметров карты и объема подгрупп и позволяет реагировать на небольшие отклонения по уровню и изменчивости, а также повысить индекс воспроизводимости процесса механообработки изделий машиностроения.

Разработаны контрольные карты на основе выборочного среднего, стандартного отклонения, винзоризованного среднего и винзоризованной дисперсии, которые в отличие от существующих карт Шухарта обладают минимальной средней длиной серии при заданном сдвиге, что позволяет снизить уровень дефектов в процессе механообработки изделий машиностроения.

Разработан метод определения оптимальной средней длины контрольной карты, метод выбора оптимальной пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса, обеспечивающие повышение индекса воспроизводимости процесса механообработки изделий машиностроения.

Разработанный научно-практический статистический инструментарий контроля качества обеспечил повышение индекса воспроизводимости процесса шлифования на 0.5 пунктов по точности и 0.7 пунктов по шероховатости, что привело к снижению дефектности с 3 510 ppm до 11,8 ppm процесса производства изделий машиностроения.

Предложены рекомендации и перспективы дальнейшей разработки вопросов, связанных с совершенствованием инструментов контроля качества процессов механообработки изделий машиностроения.

**Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.** В рамках дальнейшего развития представленных в диссертации подходов к статистическому управлению процессами

можно выделить следующие основные направления: многомерный SPC на основе робастных статистик; разработка многомерных контрольных карт, которые учитывают корреляции между несколькими характеристиками процесса, с опорой на эффективные и устойчивые к выбросам статистики; исследование влияния межпопуляционных зависимостей на скорость обнаружения дефектов и оптимизацию многомерных границ контроля; интеграция с методами машинного обучения и искусственного интеллекта; применение алгоритмов классификации и регрессии для предсказания вероятности выхода процесса из-под контроля на основе исторических данных; использование глубоких нейронных сетей для автоматической настройки параметров контрольных карт в онлайн-режиме; адаптивные и байесовские контрольные карты; разработка адаптивных алгоритмов, которые динамически пересчитывают контрольные границы.

Непараметрические методы и расширение на малые выборки: создание непараметрических контрольных карт на основе ранговых статистик, бутстрэп-методов.

Реализация этих направлений позволит значительно расширить теоретическую базу SPC, повысить гибкость и надёжность контроля качества в самых разных производственных и непроизводственных средах, а также обеспечить интеграцию методов статистического контроля в современные цифровые экосистемы.

## Список литературы

1. Абляминов, Р. Ф. Применение корреляционного и регрессионного анализа в системе прогнозирования технологического процесса / Р. Ф. Абляминов // Научные высказывания. – 2023. – № 21 (45). – С. 24–28.
2. Агеев, Ю. В. Микропроцессорные приборы активного контроля / Ю. В. Агеев, И. Б. Карпович, М. И. Этингоф // СТИН. – 2002. – № 4. – С. 38–40.
3. Адлер, Ю. Методы Тагути – новое направление в статистическом контроле качества / Ю. Адлер. – Москва : Знание, 1978. – 77 с.
4. Адлер, Ю. П. Мониторинг стабильности и воспроизводимости технологических процессов на основе пошагового байесовского анализа / Ю. П. Адлер, И. З. Аронов, Н. Ф. Бирюкова, В. Л. Шпер // Надежность и контроль качества. – 1995. – № 8. – С. 37–46.
5. Адлер, Ю. П. Проблемы применения методов статистического управления процессами на отечественных предприятиях / Ю. П. Адлер, С. Ф. Жулинский, В. Л. Шпер // Методы менеджмента качества. – 2009. – № 8. – С. 36–40 ; № 9. – С. 24–29.
6. Адлер, Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – Москва : Наука, 1976. – 147 с.
7. Адлер, Ю. П. Планирование эксперимента / Ю. П. Адлер, Ю. В. Грановский // Методы менеджмента качества. – 2007. – № 1. – С. 26.
8. Адлер, Ю. П. Выборка: всё или ничего / Ю. П. Адлер // Контроль качества продукции. – 2015. – № 8. – С. 26–31.
9. Адлер, Ю. П. Контрольные карты Шухарта в России и за рубежом. Ч. 1–3 / Ю. П. Адлер, О. В. Максимова, В. Л. Шпер // Стандарты и качество. – 2011. – № 7. – С. 82–87.
10. Алдобаев, В. Н. Исследование поведения классических критериев множественных сравнений на ненормальных неоднородных распределениях методом Монте-Карло / В. Н. Алдобаев, А. Д. Артемьева, А. А. Масликов // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2021. – № 3. – С. 72–80.
11. Андерсен, Т. Введение в многомерный статистический анализ / Т. Андерсен. – Москва : ГИ Физико-математической литературы, 1963. – 512 с.
12. Андрейченко, А. Приближённая оценка максимального правдоподобия для стохастической химической кинетики / А. Андрейченко, Л. Микеев, Д. Шпилер [и др.] // Journal of Bioinformatics and Systems Biology. – 2012. – Т. 9. – URL: (дата обращения: XX.XX.202X).
13. Анохин, В. А. Управление надёжностью сложных механообрабатывающих систем по параметрам качества изготавляемой продукции / В. А. Анохин // Вестник Курганского государственного университета. – 2006. – № 1 (05). – С. 6–8.

14. Аристов, А. И. Статистические методы регулирования технологических процессов / А. И. Аристов // Качество и надёжность изделий. – 1990. – № 5. – С. 48–97.
15. Афонина, Н. А. Экспериментальная оценка обеспечения виброустойчивости процесса резания на основе управляемой девиации скорости резания / Н. А. Афонина // СТИН. – 2005. – № 11. – С. 10–12.
16. Бендерский, А. М. О стандарте на статистическое регулирование технологических процессов при нормальном распределении контролируемого параметра / А. М. Бендерский, Л. В. Баумгартен // Надёжность и контроль качества. – 1977. – № 8. – С. 66–74.
17. Бендерский, А. М. Обоснование плана контроля при применении простых контрольных карт / А. М. Бендерский, Ю. Д. Филиппов // Надёжность и контроль качества. – 1978. – № 6. – С. 20–26.
18. Берни, Ф. Стохастический подход к математическому описанию динамики системы металлорежущего станка в условиях реальной работы / Ф. Берни, С. Пандит, С. Ву // Конструирование и технология машиностроения. – 1976. – № 2. – С. 246–251.
19. Благовещенский, Д. И. Комплексные инструменты управления производственными системами в машиностроительном производстве / Д. И. Благовещенский, В. Н. Козловский, Д. И. Панюков, С. А. Васин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2021. – № 3. – С. 156–161.
20. Благовещенский, Д. И. Комплексный инструментарий повышения эффективности производственной системы машиностроительного предприятия / Д. И. Благовещенский, В. Н. Козловский, Д. И. Панюков, Д. В. Айдаров // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2021. – Т. 23, № 2 (100). – С. 5–10.
21. Бреев, Б. Т. Зависимость формы и чистоты поверхности от колебаний шлифовальной бабки / Б. Т. Бреев, О. М. Гельфельд, В. А. Ерохин // Станки и инструмент. – 1971. – № 8. – С. 12–15.
22. Бржозовский, Б. М. Динамический мониторинг и оптимизация процессов механической обработки / Б. М. Бржозовский, В. В. Мартынов // СТИН. – 2002. – № 1. – С. 3–8.
23. Бржозовский, Б. М. Инвариантность мониторинга сложных технологических систем / Б. М. Бржозовский, В. В. Мартынов // Вестник Донского государственного технического университета. – 2001. – Т. 9, № 3. – С. 109–116.
24. Бушуев, В. В. Тенденции развития мирового станкостроения / В. В. Бушуев // СТИН. – 2000. – № 9. – С. 20–24.

25. Валиева, Д. Р. Применение статистического контроля на производстве для повышения качества выпускаемой продукции / Д. Р. Валиева, Д. В. Паленов // Молодой учёный. – 2024. – № 41 (540). – С. 14–17.
26. Васильев, В. С. Псевдогармонические колебания при резании металла / В. С. Васильев, С. В. Васильев // СТИН. – 2004. – № 1. – С. 23–25.
27. Васильева, А. А. Объединение прогнозов на основе усечённых и винзоризированных средних / А. А. Васильева // Вестник Тверского государственного университета. – 2014. – № 2. – С. 204–215.
28. Вильсон, А. Н. Выбор инструмента и режима резания, обеспечивающих минимальные вибрации при обработке / А. Н. Вильсон // Станки и инструмент. – 1987. – № 4. – С. 28–30.
29. Воробьев, В. Ю. Расчёт и оптимизация параметров дискретного ПИД-регулятора методом Циглера-Николса / В. Ю. Воробьев, Г. В. Саблина // Автоматика и программная инженерия. – 2019. – № 1 (27). – С. 9–16.
30. Воронин, Г. П. Техническое регулирование спустя семь лет: больше вопросов, чем ответов / Г. П. Воронин // Стандарты и качество. – 2010. – № 6. – С. 28–35.
31. Воронцов, Л. Н. Совершенствование приборов активного контроля для врезного шлифования / Л. Н. Воронцов, В. Л. Белоцерковский, П. П. Яровой // Станки и инструмент. – 1972. – № 8. – С. 42–43.
32. Высоцкий, А. В. Повышение эффективности систем активного контроля при шлифовании / А. В. Высоцкий, В. М. Машинистов, Ю. Д. Виноградов // Машиностроитель. – 1972. – № 2. – С. 9–11.
33. Ган, Р. Шлифование с контролем усилия врезания / Р. Ган // Конструирование и технология машиностроения. – Москва : Мир, 1964. – № 3. – С. 69–73.
34. Герасимова, Г. Е. Статистическое управление технологическим процессом (Обзор) / Г. Е. Герасимова, Ю. А. Стерыхов // Надёжность и контроль качества. – 1994. – № 12. – С. 43–49 ; 1995. – № 2. – С. 46–57.
35. Глаголев, М. В. Анализ чувствительности модели / М. В. Глаголев // ДОСиГИК. – 2012. – Т. 3, № 3. – С. 31–53.
36. Горбунов, В. В. Активный контроль шлифовальной обработки / В. В. Горбунов, М. В. Карпееев, Е. В. Карпеева, М. П. Васин, В. В. Вялов // Саратовский подшипник. – 2007. – № 6. – С. 28–33.
37. Горбунов, В. В. Автоматизация контроля осевого зазора двухрядных радиально-упорных подшипников / В. В. Горбунов // Саратовский подшипник. – 2006. – № 5. – С. 30–31.

38. Гордашникова, О. Ю. Исследование процесса управления качеством продукции на машиностроительных предприятиях / О. Ю. Гордашникова // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2006. – № 4 (17). – С. 93–99.
39. Горелов, А. С. Принципы построения интегрированной системы автоматизированного статистического контроля качества машиностроительной продукции / А. С. Горелов, В. В. Прейс, В. В. Соксов // СТИН. – 2007. – № 12. – С. 2–5.
40. Горский, В. Планирование промышленных экспериментов. Модели статики / В. Горский, Ю. П. Адлер. – Москва : Металлургия, 1974.
41. ГОСТ Р ИСО 7870-1-2011. Статистические методы. Контрольные карты. Ч. 1. Общие принципы / Росстандарт. – Москва : Стандартинформ, 2012. – 20 с.
42. ГОСТ Р ИСО 7870-2-2015. Статистические методы. Контрольные карты. Ч. 2. Контрольные карты Шухарта / Росстандарт. – Москва : Стандартинформ, 2019. – 42 с.
43. ГОСТ Р ИСО 7870-4-2023. Статистические методы. Контрольные карты. Ч. 4. Контрольные карты кумулятивных сумм / Росстандарт. – Москва : Стандартинформ, 2019. – 49 с.
44. Григорович, В. Г. Информационные методы в управлении качеством / В. Г. Григорович, С. В. Юдин, Н. О. Козлова, В. В. Шильдин ; под общ. ред. В. Г. Григоровича. – Москва : Стандарты и качество, 2001.
45. Де Гроот, М. Оптимальные статистические решения / М. Де Гроот ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1976. – 491 с.
46. Джурган, Дж. У истоков статистического контроля качества / Дж. Джурган // Надёжность и контроль качества. – 1998. – № 7. – С. 50–54 ; № 8. – С. 13–21.
47. Дремин, И. Н. Вейвлеты и их использование / И. Н. Дремин, О. В. Иванов, В. А. Нечитайло // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171, № 5.1. – С. 465–501.
48. Ермаков, С. М. Метод Монте-Карло для решения систем ОДУ / С. М. Ермаков, Т. М. Товстик // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6 (64), вып. 3. – С. 411–423.
49. Жулинский, С. Ф. Статистические методы в современном менеджменте качества / С. Ф. Жулинский, Е. С. Новиков, В. Я. Поспелов. – Москва : Новое тысячелетие, 2001. – 208 с.
50. Заковоротный, В. Л. Построение информационной модели динамической системы металлорежущего станка для диагностики процесса обработки / В. Л. Заковоротный, И. В. Ладник // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 1991. – № 4. – С. 75–79.

51. Игнатьев, А. А. Автоматизация распознавания дефектов шлифованных деталей в системе мониторинга технологического процесса производства подшипников / А. А. Игнатьев, А. Р. Бахтеев // Вестник СГТУ. – 2006. – № 3 (14). – С. 136–142.
52. Игнатьев, С. А. Адаптивное управление процессом шлифования колец высокоточных подшипников / С. А. Игнатьев, М. П. Васин, В. В. Горбунов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2006. – № 3 (14). – С. 129–136.
53. Игнатьев, С. А. Управление режимом шлифования в системе мониторинга производства подшипников / В. В. Горбунов, С. А. Игнатьев, М. В. Карпев // СТИН. – 2006. – № 2. – С. 33–36.
54. Илларионов, О. И. Обнаружение разладки технологического процесса с помощью -карт по нескольким выборкам / О. И. Илларионов // Надёжность и контроль качества. – 1992. – № 12. – С. 21–28.
55. Илларионов, О. И. Подоптимальные X-планы статистического регулирования технологических процессов групповой обработки / О. И. Илларионов // Надёжность и контроль качества. – 1998. – № 6. – С. 56–61.
56. Илларионов, О. И. Расчёт средних длин серий выборок при анализе налаженного и разложенного технологических процессов для случая постепенной разладки / О. И. Илларионов // Надёжность и контроль качества. – 1989. – № 1. – С. 32–36.
57. Илларионов, О. И. Слагаемые эффективности контрольных карт / О. И. Илларионов // Методы менеджмента качества. – 2005. – № 2. – С. 30–35.
58. Илларионов, О. И. Статистическое регулирование технологических процессов с использованием контрольных карт выборочного среднего при неизвестной дисперсии контролируемого параметра / О. И. Илларионов // Надёжность и контроль качества. – 1999. – № 12. – С. 37–44.
59. Каленик, Д. В. Анализ процесса исправления погрешностей формы при врезном внутреннем шлифовании регулируемым радиальным усилием / Д. В. Каленик, М. М. Тверской // Известия вузов. Машиностроение. – 1973. – № 8. – С. 136–140.
60. Камбург, В. Г. Исследование точности и устойчивости критериальных стоимостных оценок строительных материалов к погрешностям во входных данных методами имитационного моделирования / В. Г. Камбург, Н. Ю. Бодажков // Молодой учёный. – 2015. – № 12 (92). – С. 192–196.
61. Кендалл, М. Дж. Статистические выводы и связи / М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. – Москва : Статистика, 1973. – 896 с.

62. Китов, И. Д. Оптимизация дизайна экспериментов с учётом снижения дисперсии / И. Д. Китов // Universum: технические науки : электронный научный журнал. – 2025. – № 4 (133). – С. 83–97.
63. Клячкин, В. Н. Многомерный статистический контроль технологического процесса / В. Н. Клячкин. – Москва : Финансы и статистика, 2003. – 192 с.
64. Клячкин, В. Н. Диагностика многопараметрических технологических процессов по результатам статистического контроля / В. Н. Клячкин // Автоматизация и современные технологии. – 2 gef2009. – № 2. – С. 20–24.
65. Клячкин, В. Н. Статистические методы в управлении качеством: компьютерные технологии / В. Н. Клячкин. – Москва : Финансы и статистика, 2021. – 304 с.
66. Ковальчук, Е. Р. Автоматическое управление процессом зубошлифования с целью повышения производительности и стабилизации качества поверхностного слоя зубьев / Е. Р. Ковальчук // Металлорежущие станки и автоматические линии : сборник статей. – Москва : НИИмаш, 1972. – № 7. – С. 10–14.
67. Королюк, В. С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, И. И. Портенко [и др.]. – Москва : Наука, 1985. – 640 с.
68. Костюков, К. М. Устройство для автоматического ограничения прижогов при шлифовании / К. М. Костюков, В. Н. Михелькевич // Станки и инструмент. – 1982. – № 10. – С. 13–15.
69. Кудинов, А. В. Качественная идентификация вибраций и форм потери виброустойчивости в станках / А. В. Кудинов // СТИН. – 1999. – № 7. – С. 15–21.
70. Кудинов, А. В. Распространение импульсных возмущений в станках / А. В. Кудинов // СТИН. – 2005. – № 3. – С. 3–7.
71. Кузнецов, Л. А. Построение карт контроля качества с помощью непараметрического критерия Вилкоксона – Манна – Уитни / Л. А. Кузнецов, М. Г. Журавлёва // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2009. – № 1. – С. 70–74.
72. Кузнецов, Л. А. Построение карт контроля процессов с отличающимися от нормального распределениями показателей качества / Л. А. Кузнецов, М. Г. Журавлёва // Методы менеджмента качества. – Москва, 2009. – № 12. – С. 34–38.
73. Лапидус, В. А. Система статистического управления процессами. Система Шухарта / В. А. Лапидус // Надёжность и контроль качества. – 1999. – № 5. – С. 11–19 ; № 6. – С. 3–13 ; № 7. – С. 13–21.
74. Лапидус, В. А. Бережливое производство: от зарубежного опыта к разработке национального стандарта / В. А. Лапидус, А. Н. Грачёв // Сертификация. – 2014. – № 4. – С. 8–11.

75. Левин, В. И. Устойчивость решения оптимизационных задач в условиях неопределённости / В. И. Левин // Системы управления, связи и безопасности. – 2015. – № 4. – С. 260–277.
76. Лунина, Ю. А. К вопросу о применении контрольных карт и индексов воспроизводимости / Ю. А. Лунина, Д. В. Галуза, М. С. Зинина, Е. А. Соловьёва // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2010. – Т. 12, № 4-4. – С. 787.
77. Лурье, Г. Б. Адаптивная система управления процессом круглого врезного шлифования / Г. Б. Лурье, В. В. Гичан // Станки и инструмент. – 1974. – № 7. – С. 13–17.
78. Маклаков, А. В. Система менеджмента качества компании «Фаствел» / А. В. Маклаков // Современные технологии автоматизации. – 2004. – № 1. – С. 74–79.
79. Максимова, О. В. Исследование эффективности работы контрольных карт Шухарта / О. В. Максимова, В. Л. Шпер // Методы менеджмента качества. – Москва : Стандарты и качество, 2010. – № 12. – С. 40–46.
80. Максимова, О. В. О расширении области применения контрольных карт Шухарта / О. В. Максимова, В. Л. Шпер // Вестник МЭИ. – Москва : Издательский дом МЭИ, 2011. – № 5. – С. 122–127.
81. Мильберг, Б. Е. Определение потребностей покупателей и достижение конкурентных преимуществ (взгляд из региона) / Б. Е. Мильберг // Маркетинг в России и за рубежом. – 2003. – № 6. – С. 11–13.
82. Миттаг, Х. Статистические методы обеспечения качества / Х. Миттаг, Х. Ринне ; пер. с нем. ; под ред. Б. Н. Маркова. – Москва : Машиностроение, 1995. – 616 с.
83. Михайлов, В. Г. О выборе моделей, средств для симулятора автомобиля со смешанной реальностью / В. Г. Михайлов // Информационные технологии и телекоммуникации. – 2024. – № 1. – С. 51–58.
84. Михеев, К. В. К вопросу построения математической модели процесса внутреннего шлифования / К. В. Михеев // Успехи современного естествознания. – 2011. – № 7. – С. 157.
85. Михелькевич, В. Н. Автоматические системы управления поперечной подачей при внутреннем шлифовании / В. Н. Михелькевич, С. Н. Глазков, Ю. А. Чабанов // Станки и инструмент. – 1980. – № 4. – С. 13–16.
86. Михелькевич, В. Н. Некоторые вопросы построения и реализации оптимального цикла шлифования отверстий колец подшипников / В. Н. Михелькевич, Б. Н. Вениаминов // Труды института. – Москва : Специинформцентр ВНИППа, 1972. – № 3 (71). – С. 64–83.

87. Никитин, С. П. Моделирование процесса резания при шлифовании с учётом взаимодействия упругой и тепловой систем / С. П. Никитин // Вестник УГАТУ. Машиностроение. – 2009. – Т. 12, № 4 (33). – С. 61–65.
88. Никифоров, И. В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов / И. В. Никифоров. – Москва : Наука, 1983.
89. Новиков, В. Ю. Исследование и разработка адаптивной системы управления шлифованием / В. Ю. Новиков, Л. И. Братова // Вестник машиностроения. – 1977. – № 2. – С. 38–39.
90. Новиков, В. Ю. Адаптивное управление врезным шлифованием с дискретной подачей / В. Ю. Новиков, В. Е. Гореликов // Станки и инструмент. – 1981. – № 9. – С. 17–18.
91. Новицкий, П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Ленинград : Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.
92. Павлов, А. Г. Выбор параметров станка по динамическому качеству / А. Г. Павлов // Известия вузов. Машиностроение. – 1982. – № 12. – С. 116–120.
93. Панышев, Н. Система числового программного управления технологическим оборудованием ПС-2000 / Н. Панышев, Д. Ялмыков // Современные технологии автоматизации. – 2002. – № 3. – С. 28–33.
94. Пономарев, С. В. Практические подходы к оценке рисков в СМК / С. В. Пономарев // Методы менеджмента качества. – 2016. – № 7. – С. 30–35.
95. Ратмиров, В. А. Адаптивное управление шлифовальным станком с ЧПУ / В. А. Ратмиров, А. С. Чубуков, Л. В. Файнблут // Станки и инструмент. – 1977. – № 8. – С. 12–15.
96. Рязанский, В. П. Оптимизация пары контрольных карт для одновременного контроля уровня и изменчивости процесса механообработки изделий машиностроения / В. П. Рязанский // Справочник. Инженерный журнал. – 2025. – № 12.
97. Рязанский, В. П. Методика определения параметров контрольной карты усиленного размаха карт / В. П. Рязанский, В. Б. Афанасьев, С. А. Махлаенко, Е. В. Плахотникова // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2024. – № 8. – С. 179–185.
98. Рязанский, В. П. Развитие статистических методов управления качеством изделий оборонной продукции на основе двумерной модели распределения / В. П. Рязанский, В. Б. Афанасьев, В. М. Медведев, С. Н. Остапенко // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 5. – С. 453–463.
99. Рязанский, В. П. Совершенствование статистических методов исследования в системе управления качеством и надёжностью продукции предприятия / В. П. Рязанский,

- В. Б. Афанасьев, В. М. Медведев, С. Н. Остапенко // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2021. – № 6. – С. 294–302.
100. Рязанский, В. П. Гамма-функция как основа трёхпараметрического распределения параметров точности и надёжности изделий оборонной промышленности / В. П. Рязанский, С. В. Юдин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2022. – № 2. – С. 603–612.
101. Рязанский, В. П. Методика определения параметров контрольных карт / В. П. Рязанский, С. В. Юдин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2024. – № 4. – С. 83–90.
102. Рязанский, В. П. Повышение точности и надёжности показателей качества продукции посредством улучшения оценок параметров равномерного распределения / В. П. Рязанский, С. В. Юдин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2022. – № 12. – С. 668–678.
103. Саблина, Г. В. Настройка параметров ПИД-регулятора в системе с объектом второго порядка с запаздыванием / Г. В. Саблина, В. А. Маркова // Автометрия. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 110–119.
104. Сальников, А. В. Верификация и валидация компьютерных моделей / А. В. Сальников, М. С. Французов, К. А. Виноградов, К. Р. Пятунин, А. С. Никулин // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2022. – № 9 (750). – С. 100–116.
105. Седдон, Дж. Свобода от приказов и контроля. Путь к эффективному сервису / Дж. Седдон ; пер. с англ. – Москва : РИА «Стандарты и качество», 2009. – 232 с.
106. Судариков, А. С. Управление съёмом припуска при шлифовании / А. С. Судариков, Ю. А. Боярышников, М. Ф. Политов // Вестник машиностроения. – 1977. – № 9. – С. 55–58.
107. Уилер, Д. Статистическое управление процессами. Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта / Д. Уилер, Д. Чамберс ; пер. с англ. – Москва : Альпина Бизнес Букс, 2009. – 409 с. – Оригинал: Wheeler, D. J. Understanding Statistical Process Control / D. J. Wheeler, D. S. Chambers. – 2nd ed. – Knoxville : SPC Press, 1992.
108. Усынин, С. Опыт создания автоматизированной системы управления взрывоопасным технологическим процессом / С. Усынин // Современные технологии автоматизации. – 2003. – № 3. – С. 34–39.
109. Хампель, Ф. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1989. – 512 с.

110. Хан, Г. Статистические модели в инженерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1969. – 396 с.
111. Хитрик, В. Э. Спектральные характеристики металлорежущих станков в процессе резания / В. Э. Хитрик, Л. Н. Петрашина, Т. А. Сидачев // Вибромеханика : межвузовский сборник трудов. – Вильнюс, 1986. – № 3 (51). – С. 123–129.
112. Хомяков, В. С. Экспериментальное и расчётное исследование динамических характеристик шпиндельных узлов / В. С. Хомяков, Н. А. Кочинев, Ф. С. Сабиров // СТИН. – 2009. – № 3. – С. 5–9.
113. Худобин, Л. В. Использование низкочастотного акустического сигнала для текущего контроля процесса шлифования / Л. В. Худобин, В. Ф. Гурьянихиин, В. С. Юганов // СТИН. – 2000. – № 8. – С. 25–29.
114. Цуцуран, И. Г. Лаборатория физико-механических свойств материалов / И. Г. Цуцуран // Саратовский подшипник. – 2006. – № 3. – С. 31–33.
115. Чубуков, А. С. Адаптивное управление круглошлифовальными станками с помощью малой ЭВМ / А. С. Чубуков, А. С. Коныгин // Станки и инструмент. – 1978. – № 9. – С. 11–14.
116. Широков, А. В. Имитационное моделирование процесса формирования поперечного микропрофиля детали при различных методах шлифования / А. В. Широков, А. П. Осипов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13, № 4-3. – С. 905–911.
117. Эльянов, В. Д. Испытание внутришлифовального автомата модели 3484 ВЗ с адаптивной системой управления / В. Д. Эльянов, Б. А. Бочаров // Подшипниковая промышленность. – 1979. – № 12. – С. 19–23.
118. Эльянов, В. Д. Совершенствование методики расчёта режимов шлифования / В. Д. Эльянов // СТИН. – 1993. – № 1. – С. 21–26.
119. Abujiya, M. R. Increasing the sensitivity of cumulative sum charts for location / M. R. Abujiya, M. H. Lee, M. Riaz // Quality Technology & Quantitative Management. – 2015. – Vol. 12, No. 4. – P. 453–469.
120. Althoff, M. Comparison of Markov chain abstraction and Monte Carlo simulation for the safety assessment of autonomous cars / M. Althoff, A. Mergel // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2011. – Vol. 12, No. 4. – P. 1237–1247. – DOI: 10.1109/TITS.2011.2158866.
121. Barratt, Investigation into the use of the CUSUM technique in identifying changes in mean air pollution levels following introduction of a traffic management scheme / Barratt, Atkinson, Anderson // Atmospheric Environment. – 2007. – Vol. 41, Iss. 4. – P. 841–848.

122. Brook, D. An approach to the probability distribution of CUSUM run length / D. Brook, D. A. Evans // Biometrika. – 1972. – Vol. 59, No. 3. – P. 539–549. – DOI: 10.1093/biomet/59.3.539.
123. Chakraborti, S. Phase I Statistical Process Control Charts: An Overview and Some Results / S. Chakraborti, S. W. Human, M. A. Graham // Quality Engineering. – 2009. – Vol. 21. – P. 52–62.
124. Geman, S. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images / S. Geman, D. Geman // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1984. – Vol. 6. – P. 721–741.
125. Gitlow, H. S. Viewing statistics from a quality control perspective / H. S. Gitlow // International Journal of Quality & Reliability Management. – 2001. – Vol. 18, No. 2. – P. 169–179.
126. Hart, M. K. Statistical Process Control for Health Care / M. K. Hart, R. F. Hart. – Pacific Grove, CA : Duxbury, 2002. – 621 p.
127. Harter, H. L. Tables of Range and Studentized Range / H. L. Harter // Annals of Mathematical Statistics. – 1960. – Vol. 31, No. 4. – P. 1122–1147.
128. Hassan, F. Shewhart, CUSUM and EWMA Control Charts: A Comparative Study on Intermediate Check of Balances / F. Hassan, A. Raza, S. Ahmad // Mapan – Journal of Metrology Society of India. – 2022. – Vol. 37, No. 2. – P. 263–274.
129. Hawkins, D. M. The CUSUM and the EWMA Head-to-Head / D. M. Hawkins, Q. Wu // Quality Engineering. – 2014. – Vol. 26, Iss. 2. – P. 215–222.
130. Hawkins, D. M. CUSUM for a scale parameter / D. M. Hawkins // Journal of Quality Technology. – 1981. – Vol. 13, No. 4. – P. 228–231.
131. Hawkins, D. M. Combined Charts for Mean and Variance Information / D. M. Hawkins, Q. Deng // Journal of Quality Technology. – 2009. – Vol. 41, No. 4. – P. 415–425.
132. Hawkins, D. M. Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement / D. M. Hawkins, D. H. Olwell. – New York : Springer, 1998. – 247 p.
133. Hillier, F. S. X- and R-Chart Control Limits Based on A Small Number of Subgroups / F. S. Hillier // Journal of Quality Technology. – 1969. – Vol. 1, No. 1. – P. 17–26.
134. Hou, Z. B. On the mechanics of the grinding process – Part I. Stochastic nature of the grinding process / Z. B. Hou, R. Komanduri // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2003. – Vol. 43, No. 15. – P. 1579–1593. – DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2003.08.016.

135. Hoyer, R. W. A Graphical Exploration of SPC. Part 2: The Probability Structure of Rules for Interpreting Control Charts / R. W. Hoyer, W. C. Ellis // Quality Progress. – 1996. – Vol. 29, No. 6. – P. 57–64.
136. Jensen, W. A. Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review / W. A. Jensen, L. A. Jones-Farmer, Ch. W. Champ, W. H. Woodall // Journal of Quality Technology. – 2006. – Vol. 38, No. 4. – P. 349–364.
137. Kane, V. E. Process capability indices / V. E. Kane // Journal of Quality Technology. – 1986. – Vol. 18, No. 1. – P. 41–52. – DOI: 10.1080/00224065.1986.11978984.
138. Knoth, S. Computation of the ARL for CUSUM-S<sup>2</sup> schemes / S. Knoth // Computational Statistics & Data Analysis. – 2006. – Vol. 51, No. 2. – P. 499–512. – DOI: 10.1016/j.csda.2005.09.015.
139. Kurt, R. Which control chart is the best for particleboard industry: Shewhart, CUSUM or EWMA? / R. Kurt, S. Karayilmazlar // Drewno. Prace Naukowe, Doniesienia, Komunikaty. – 2021. – Vol. 64, No. 208. – P. 95–117. – DOI: 10.12841/wood.1644-3985.382.07.
140. Li, K. Modelling of ceramic grinding processes. Part I. Number of cutting points and grinding forces per grit / K. Li, W. Liao // International Journal of Advanced Manufacturing Systems. – 1998. – Vol. 1. – P. 47–56.
141. Lundholm, T. Advanced process monitoring – a major step towards adaptive control / T. Lundholm, M. Yngen, B. Lindstonn // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. – 1988. – Vol. 4, No. 3/4. – P. 413–421.
142. Moesinger, H. Shwingungaanalysen in Maschinenbau / H. Moesinger // Technica. – 1987. – Bd. 36, No. 20. – S. 59–94.
143. Montgomery, D. C. Journal of Quality Technology Has Practical Value / D. C. Montgomery, P. R. Nelson // Quality Progress. – 1997. – Vol. 30, No. 3. – P. 10–11.
144. Noman, A Model for Maintenance Planning and Process Quality Control Optimization Based on EWMA and CUSUM Control Charts / Noman et al. // Transactions of FAMENA. – 2021. – Vol. 45, Iss. 1. – P. 1–16.
145. Pearn, W. L. Distributional and inferential properties of process capability indices / W. L. Pearn, S. Kotz, N. L. Johnson // Journal of Quality Technology. – 1992. – Vol. 24, No. 4. – P. 216–231.
146. Roberts, S. W. Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages / S. W. Roberts // Technometrics. – 1959. – Vol. 42, No. 1. – P. 97–102.
147. Sony, M. Essential ingredients for the implementation of Quality 4.0: A narrative review of literature and future directions for research / M. Sony, J. Antony, J. A. Douglas // The TQM Journal. – 2020. – Vol. 32, No. 4. – P. 779–793.

148. Sparks, R. S. CUSUM charts for signalling varying location shifts / R. S. Sparks // Journal of Quality Technology. – 2000. – Vol. 32, No. 2. – P. 157–171.
149. Stylidis, K. Perceived quality of products: a framework and attributes ranking method / K. Stylidis, C. Wickman, R. Soderberg // Journal of Engineering Design. – 2019. – Vol. 31, No. 1. – P. 37–67.
150. Tippett, L. H. C. On the Extreme Individuals and the Range of Samples from a Normal Population / L. H. C. Tippett // Biometrika. – 1925. – Vol. 17. – P. 364–387.
151. Vargas, V. do C. C. de. Comparative study of the performance of the CUSUM and EWMA control charts / V. do C. C. de Vargas, L. F. D. Lopes, A. M. Souza // Computers & Industrial Engineering. – 2004. – Vol. 46, Iss. 4. – P. 707–724. – DOI: 10.1016/j.cie.2004.03.008.
152. Woodall, W. H. Control Charts Based on Attribute Data: Bibliography and Review / W. H. Woodall // Journal of Quality Technology. – 1997. – Vol. 29, No. 2. – P. 172–183.
153. Woodall, W. H. Research Issues and Ideas in Statistical Process Control / W. H. Woodall, D. C. Montgomery // Journal of Quality Technology. – 1999. – Vol. 31, No. 4. – P. 376–386.
154. Zafarnejad, M. Using CUSUM in real time to signal clinically relevant decreases in estimated glomerular filtration rate / M. Zafarnejad, B. Elick, S. A. Shah // BMC Nephrology. – 2022. – Vol. 23, No. 1. – P. 282. – DOI: 10.1186/s12882-022-02910-8.
155. Zaman, B. Adaptive CUSUM Location Control Charts Based on Score Functions: An Application in Semiconductor Wafer Field / B. Zaman, M. Riaz, M. R. Abujiya, M. H. Lee // Arabian Journal for Science and Engineering. – 2022. – Vol. 47, No. 3. – P. 3725–3749. – DOI: 10.1007/s13369-021-05878-z.
156. Zhang, H. Determining Statistical Process Control Baseline Periods in Long Historical Data Streams / H. Zhang, S. L. Albin, S. R. Wagner et al. // Journal of Quality Technology. – 2010. – Vol. 42, No. 1. – P. 21–35.
157. Ziegler, J. G. Optimum setting for automatic controllers / J. G. Ziegler, V. B. Nichols // Transactions of the ASME. – 1942. – Vol. 64. – P. 759–768.

## Приложение А. Акт внедрения результатов диссертации

АО «КОНЦЕРН ВКО «АЛМАЗ-АНТЕЙ»



АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО  
«БРЯНСКИЙ АВТОМОБИЛЬНЫЙ ЗАВОД»

АО «БАЗ»

241050, г. Брянск, ул. Сталелитейная, д. 1, Тел. (4832) 22-15-00, Факс (4832) 22-14-80,

E-mail: post@baz32.ru, http://www.baz32.ru

ИНН 3255502838, КПП 325701001, ОГРН 1083254005141

№ 334  
на \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

Утверждаю  
Заместитель генерального директора  
по качеству - начальник департамента  
по качеству

О.Г. Остроухов  
2025г.



### АКТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Результаты диссертационной работы Рязанского Валерия Павловича на тему: «Совершенствование контроля качества производства изделий машиностроения на основе разработки научно-практического статистического инструментария», а именно: разработанный статистический инструментарий контроля качества для карт кумулятивных сумм, включающий, методику реагирования на небольшие отклонения по уровню и изменчивости параметров процесса механообработки, способ повышения индекса воспроизводимости процесса механообработки изделий машиностроения с использованием разработанного инструментария, внедрены на АО «Брянский автомобильный завод» для оценки и контроля качества процесса механообработки изделий.

Цель внедрения: повышение стабильности и точности процессов механообработки за счёт раннего выявления отклонений и оперативного принятия мер по их устранению.

Область внедрения: участок механообработки АО БАЗ. Результаты внедрения: сокращение времени на выявление отклонений в параметрах процесса на 14 %; повышение индекса воспроизводимости процесса Ср с 1.02 до 1.33; оптимизация настроек оборудования на основе данных карт кумулятивных сумм; внедрение автоматизированного расчёта параметров контроля с использованием разработанных таблиц.

Экономический эффект: сокращение простоев оборудования на 47 часов в месяц за счёт быстрого выявления и устранения причин отклонений.

Комиссия подтверждает, что внедрение результатов диссертационной работы Рязанского Валерия Павловича позволило достичь запланированных показателей качества и эффективности процессов механообработки.

Начальник механосборочного цеха

С.А. Махлаенко

## Приложение Б. Таблица значений $ARL_0(k, h)$ для односторонней CUSUM

### Назначение таблицы

В приложении приводится табличный массив значений средней длины серии при отсутствии сдвига

$$ARL_0(k, h) = E[\tau(k, h)],$$

где для одностороннего CUSUM

$$\tau = \min \{n \geq 1 : S_n > h\}, S_n = \max (0, S_{n-1} + X_n - k),$$

а входной поток  $X_n$  в модели считается стандартно-нормальным:  $X_n \sim N(0,1)$ . Таблица используется для оценки частоты ложных срабатываний  $ARL_0(k, h)$  при заданных параметрах CUSUM-схемы  $k$  и  $h$ , а также для сравнения разных настроек по уровню «строгости» контроля.

### Переход от «сырых» данных к стандартной нормали

В реальных задачах контролируемая характеристика  $Y$  измеряется в физических единицах (микрометры, амперы и т.п.) и при нахождении процесса под контролем имеет распределение

$$Y \sim N(\mu_0, \sigma_0^2),$$

где  $\mu_0$  – целевое среднее,  $\sigma_0$  – стандартное отклонение при управляемом процессе. «Сырые» данные в общем случае не являются стандартными нормальными. Чтобы использовать табличные значения  $ARL_0(k, h)$ , рассчитанные для стандартной нормали, применяют стандартизацию. Для одиночных наблюдений  $X_n = \frac{Y_n - \mu_0}{\sigma_0}, X_n \sim N(0,1)$  при отсутствии сдвига. Для средних по подгруппе объёма  $n$ :  $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{n,i}, \bar{Y}_n \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ , и в CUSUM используется

$$X_n = \frac{\bar{Y}_n - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}.$$

В реальной практике параметры  $\mu_0$  и  $\sigma_0$  оцениваются по фазе I (историческим данным при заведомо исправном процессе) и далее используются их оценки  $\hat{\mu}_0$ ,  $\hat{\sigma}_0$ . После стандартизации данные  $X_n$  можно считать приближённо стандартно-нормальными, а значит – непосредственно применять таблицу  $ARL_0(k, h)$ .

### Диапазоны изменения параметров и структура таблицы

Численные значения  $ARL_0(k, h)$  получены для прямоугольной сетки параметров: параметр наклона  $k$  варьировался в диапазоне  $k \in [0,15; 2,00]$  с шагом  $\Delta k = 0,05$ (38 значений); порог  $h$  варьировался в диапазоне  $h \in [0,30; 12,00]$  с шагом  $\Delta h = 0,10$  (118 значений). Формат таблицы: строки соответствуют значениям порога  $h$ :  $h = 0,30; 0,40; \dots ; 12,00$ ; столбцы соответствуют значениям параметра  $k$ :  $k = 0,15; 0,20; \dots ; 2,00$ .

Пример использования таблицы. Рассмотрим пример интерпретации значений  $ARL_0$  для уже выбранных параметров CUSUM. Пусть контролируется параметр шероховатости  $R_a$ (в мкм), для которого по результатам фазы I получено:  $\hat{\mu}_0 = 0,25$  мкм,  $\hat{\sigma}_0 = 0,05$  мкм.

Используется CUSUM по средним подгруппам объёма  $n = 5$ . В CUSUM подаются стандартизованные величины

$$X_n = \frac{\bar{R}_{a,n} - \hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}_0/\sqrt{5}}.$$

После выбора параметров CUSUM:  $k = 0,50$ ;  $h = 4,00$  по таблице  $ARL_0(k, h)$  находим строку  $h = 5,00$  и столбец  $k = 0,50$ . На пересечении строки и столбца читаем значение  $ARL_0(k, h) \approx 930,88$  – это и будет ожидаемая средняя длина серии при отсутствии реального изменения процесса. Полученное табличное значение интерпретируется как среднее число подгрупп, которое пройдет до ложного срабатывания CUSUM при управляемом процессе, после того как исходные измерения приведены к стандартной нормали.

Данные представлены в пяти таблицах для удобства. Значения более 100 000 не приведены.  
Таблица А.1 – Зависимость  $ARL_0$  от  $k$  (0,15–0,45) и  $h$  (0,30–12,00), начало

<b>h \ k</b>	<b>0,15</b>	<b>0,20</b>	<b>0,25</b>	<b>0,30</b>	<b>0,35</b>	<b>0,40</b>	<b>0,45</b>
0,30	3,01	3,18	3,37	3,57	3,80	4,05	4,32
0,40	3,31	3,51	3,74	3,98	4,25	4,54	4,87
0,50	3,65	3,89	4,15	4,44	4,76	5,11	5,49
0,60	4,03	4,31	4,62	4,95	5,33	5,74	6,21
0,70	4,45	4,77	5,13	5,53	5,97	6,47	7,02
0,80	4,91	5,29	5,70	6,17	6,69	7,28	7,94
0,90	5,41	5,85	6,34	6,89	7,50	8,19	8,98
1,00	5,96	6,47	7,03	7,68	8,40	9,22	10,15
1,10	6,55	7,14	7,80	8,55	9,40	10,37	11,47
1,20	7,19	7,87	8,63	9,51	10,50	11,65	12,96
1,30	7,88	8,65	9,54	10,55	11,72	13,07	14,62
1,40	8,61	9,50	10,52	11,70	13,06	14,64	16,48
1,50	9,40	10,41	11,59	12,95	14,53	16,38	18,55
1,60	10,23	11,39	12,73	14,30	16,14	18,30	20,84
1,70	11,11	12,42	13,96	15,76	17,89	20,41	23,39
1,80	12,05	13,53	15,28	17,34	19,80	22,72	26,22
1,90	13,03	14,70	16,68	19,05	21,87	25,25	29,33
2,00	14,06	15,94	18,19	20,88	24,11	28,02	32,77
2,10	15,15	17,26	19,79	22,84	26,54	31,05	36,55
2,20	16,29	18,65	21,49	24,95	29,17	34,35	40,72
2,30	17,49	20,11	23,30	27,21	32,01	37,94	45,30
2,40	18,74	21,65	25,23	29,63	35,07	41,85	50,33
2,50	20,04	23,28	27,27	32,21	38,38	46,11	55,85
2,60	21,41	24,99	29,44	34,98	41,94	50,73	61,90
2,70	22,84	26,80	31,73	37,94	45,78	55,77	68,55
2,80	24,33	28,69	34,17	41,09	49,92	61,24	75,84
2,90	25,89	30,68	36,74	44,46	54,37	67,18	83,83
3,00	27,52	32,77	39,47	48,06	59,17	73,63	92,59
3,10	29,21	34,97	42,36	51,91	64,34	80,65	102,20
3,20	30,97	37,28	45,42	56,01	69,90	88,26	112,72
3,30	32,81	39,70	48,65	60,38	75,88	96,53	124,26
3,40	34,73	42,24	52,07	65,04	82,32	105,51	136,90
3,50	36,72	44,91	55,69	70,02	89,24	115,26	150,76
3,60	38,80	47,70	59,51	75,32	96,69	125,84	165,94

<b>h \ k</b>	<b>0,15</b>	<b>0,20</b>	<b>0,25</b>	<b>0,30</b>	<b>0,35</b>	<b>0,40</b>	<b>0,45</b>
3,70	40,96	50,63	63,55	80,97	104,70	137,32	182,57
3,80	43,20	53,70	67,81	86,99	113,30	149,78	200,80
3,90	45,54	56,92	72,32	93,40	122,56	163,30	220,75
4,00	47,96	60,29	77,08	100,23	132,51	177,97	242,61
4,10	50,48	63,81	82,10	107,51	143,20	193,88	266,55
4,20	53,10	67,50	87,40	115,25	154,68	211,13	292,77
4,30	55,82	71,36	92,99	123,49	167,02	229,85	321,48
4,40	58,64	75,40	98,89	132,27	180,28	250,14	352,91
4,50	61,56	79,62	105,12	141,61	194,51	272,15	387,33
4,60	64,60	84,04	111,68	151,54	209,80	296,01	425,00
4,70	67,75	88,66	118,60	162,11	226,22	321,87	466,25
4,80	71,01	93,48	125,89	173,36	243,85	349,92	511,40
4,90	74,40	98,52	133,58	185,32	262,78	380,32	560,83
5,00	77,90	103,79	141,69	198,04	283,11	413,27	614,93
5,10	81,54	109,30	150,23	211,57	304,92	448,99	674,14
5,20	85,30	115,05	159,23	225,96	328,34	487,70	738,95
5,30	89,21	121,05	168,71	241,25	353,48	529,66	809,89
5,40	93,25	127,32	178,69	257,52	380,47	575,13	887,53
5,50	97,43	133,87	189,21	274,81	409,42	624,41	972,50
5,60	101,76	140,70	200,29	293,18	440,50	677,82	1 065,49
5,70	106,24	147,84	211,96	312,72	473,86	735,69	1 167,26
5,80	110,88	155,28	224,25	333,48	509,65	798,40	1 278,64
5,90	115,68	163,05	237,18	355,55	548,06	866,36	1 400,52
6,00	120,65	171,16	250,80	379,01	589,27	940,00	1 533,90
6,10	125,79	179,62	265,14	403,93	633,50	1 019,80	1 679,87
6,20	131,11	188,44	280,24	430,42	680,95	1 106,26	1 839,60
6,30	136,61	197,65	296,13	458,56	731,86	1 199,94	2 014,40
6,40	142,29	207,25	312,85	488,47	786,48	1 301,45	2 205,68
6,50	148,17	217,26	330,46	520,24	845,09	1 411,43	2 414,99
6,60	154,25	227,70	348,98	554,01	907,97	1 530,59	2 644,04
6,70	160,54	238,59	368,48	589,88	975,42	1 659,70	2 894,68
6,80	167,03	249,94	388,99	627,98	1 047,79	1 799,58	3 168,94
6,90	173,75	261,78	410,58	668,47	1 125,42	1 951,13	3 469,05
7,00	180,69	274,12	433,30	711,48	1 208,71	2 115,33	3 797,44
7,10	187,86	286,98	457,20	757,17	1 298,05	2 293,22	4 156,78
7,20	195,27	300,39	482,35	805,71	1 393,90	2 485,95	4 549,98
7,30	202,92	314,36	508,81	857,26	1 496,71	2 694,75	4 980,23
7,40	210,83	328,93	536,64	912,03	1 607,00	2 920,96	5 451,02
7,50	219,00	344,11	565,92	970,20	1 725,30	3 166,03	5 966,17
7,60	227,44	359,94	596,72	1 031,99	1 852,21	3 431,53	6 529,85
7,70	236,16	376,43	629,13	1 097,63	1 988,33	3 719,17	7 146,64
7,80	245,16	393,61	663,21	1 167,34	2 134,35	4 030,78	7 821,53
7,90	254,46	411,51	699,07	1 241,38	2 290,98	4 368,37	8 559,99
8,00	264,06	430,17	736,78	1 320,02	2 458,98	4 734,10	9 368,03
8,10	273,97	449,60	776,44	1 403,55	2 639,19	5 130,30	10 252,17

<b>h \ k</b>	<b>0,15</b>	<b>0,20</b>	<b>0,25</b>	<b>0,30</b>	<b>0,35</b>	<b>0,40</b>	<b>0,45</b>
8,20	284,21	469,85	818,16	1 492,26	2 832,48	5 559,52	11 219,60
8,30	294,77	490,95	862,04	1 586,48	3 039,81	6 024,52	12 278,16
8,40	305,68	512,93	908,19	1 686,54	3 262,19	6 528,26	13 436,42
8,50	316,94	535,82	956,73	1 792,81	3 500,71	7 073,97	14 703,78
8,60	328,57	559,67	1 007,77	1 905,68	3 756,55	7 665,16	16 090,52
8,70	340,57	584,51	1 061,46	2 025,54	4 030,96	8 305,61	17 607,86
8,80	352,95	610,39	1 117,91	2 152,83	4 325,29	8 999,41	19 268,12
8,90	365,74	637,35	1 177,28	2 288,02	4 640,98	9 751,02	21 084,75
9,00	378,93	665,42	1 239,72	2 431,59	4 979,59	10 565,25	23 072,48
9,10	392,54	694,66	1 305,38	2 584,06	5 342,76	11 447,31	25 247,42
9,20	406,59	725,12	1 374,42	2 745,97	5 732,28	12 402,86	27 627,19
9,30	421,09	756,84	1 447,02	2 917,92	6 150,07	13 438,01	30 231,10
9,40	436,05	789,87	1 523,37	3 100,51	6 598,18	14 559,39	33 080,24
9,50	451,48	824,27	1 603,65	3 294,43	7 078,79	15 774,19	36 197,71
9,60	467,41	860,09	1 688,07	3 500,35	7 594,27	17 090,19	39 608,78
9,70	483,84	897,40	1 776,83	3 719,02	8 147,15	18 515,80	43 341,10
9,80	500,79	936,25	1 870,17	3 951,24	8 740,14	20 060,17	47 424,92
9,90	518,28	976,71	1 968,32	4 197,84	9 376,14	21 733,19	51 893,34
10,00	536,32	1 018,84	2 071,51	4 459,71	10 058,28	23 545,56	56 782,58
10,10	554,93	1 062,71	2 180,02	4 737,79	10 789,89	25 508,90	62 132,27
10,20	574,13	1 108,38	2 294,11	5 033,08	11 574,58	27 635,77	67 985,77
10,30	593,93	1 155,95	2 414,07	5 346,66	12 416,18	29 939,80	74 390,52
10,40	614,35	1 205,47	2 540,20	5 679,65	13 318,82	32 435,73	81 398,44
10,50	635,42	1 257,04	2 672,82	6 033,24	14 286,93	35 139,57	89 066,33
10,60	657,15	1 310,73	2 812,26	6 408,73	15 325,25	38 068,61	97 456,33
10,70	679,56	1 366,63	2 958,87	6 807,45	16 438,88	41 241,62	
10,80	702,68	1 424,84	3 113,02	7 230,84	17 633,27	44 678,91	
10,90	726,52	1 485,43	3 275,09	7 680,44	18 914,29	48 402,49	
11,00	751,10	1 548,53	3 445,48	8 157,86	20 288,21	52 436,21	
11,10	776,46	1 614,22	3 624,64	8 664,82	21 761,76	56 805,89	
11,20	802,60	1 682,61	3 813,00	9 203,15	23 342,18	61 539,53	
11,30	829,57	1 753,81	4 011,04	9 774,78	25 037,20	66 667,42	
11,40	857,37	1 827,93	4 219,25	10 381,78	26 855,15	72 222,40	
11,50	886,04	1 905,10	4 438,16	11 026,34	28 804,92	78 240,04	
11,60	915,61	1 985,45	4 668,31	11 710,78	30 896,09	84 758,88	
11,70	946,09	2 069,09	4 910,28	12 437,55	33 138,90	91 820,66	
11,80	977,53	2 156,16	5 164,68	13 209,29	35 544,35	99 470,59	
11,90	1 009,94	2 246,81	5 432,14	14 028,76	38 124,22		
12,00	1 043,36	2 341,18	5 713,34	14 898,93	40 891,17		

Таблица А.2 – Зависимость  $ARL_0$  от  $k$  (0,50–0,80) и  $h$  (0,30–9,10), продолжение

<b>h\k</b>	<b>0,50</b>	<b>0,55</b>	<b>0,60</b>	<b>0,65</b>	<b>0,70</b>	<b>0,75</b>	<b>0,80</b>
0,30	4,62	4,96	5,32	5,73	6,18	6,68	7,23
0,40	5,23	5,63	6,07	6,56	7,11	7,71	8,39
0,50	5,93	6,40	6,94	7,53	8,19	8,93	9,76
0,60	6,72	7,30	7,94	8,66	9,47	10,37	11,39
0,70	7,63	8,33	9,10	9,98	10,96	12,07	13,32
0,80	8,68	9,51	10,45	11,51	12,71	14,07	15,62
0,90	9,86	10,86	12,00	13,29	14,76	16,43	18,35
1,00	11,21	12,41	13,79	15,36	17,16	19,22	21,59
1,10	12,74	14,19	15,85	17,76	19,96	22,50	25,44
1,20	14,47	16,21	18,22	20,54	23,24	26,37	30,01
1,30	16,42	18,51	20,93	23,76	27,06	30,92	35,45
1,40	18,62	21,12	24,04	27,48	31,52	36,28	41,89
1,50	21,09	24,08	27,60	31,77	36,70	42,57	49,54
1,60	23,85	27,42	31,66	36,71	42,73	49,94	58,59
1,70	26,95	31,20	36,28	42,38	49,73	58,59	69,30
1,80	30,41	35,45	41,54	48,90	57,84	68,71	81,96
1,90	34,26	40,24	47,51	56,37	67,23	80,54	96,90
2,00	38,55	45,61	54,27	64,93	78,08	94,34	114,52
2,10	43,31	51,64	61,94	74,71	90,60	110,44	135,27
2,20	48,60	58,40	70,60	85,88	105,06	129,20	159,69
2,30	54,47	65,96	80,40	98,63	121,71	151,04	188,40
2,40	60,98	74,43	91,47	113,17	140,90	176,44	222,14
2,50	68,19	83,89	103,97	129,75	162,98	205,97	261,76
2,60	76,17	94,47	118,08	148,65	188,40	240,29	308,26
2,70	85,01	106,30	133,99	170,17	217,64	280,17	362,82
2,80	94,79	119,52	151,95	194,69	251,28	326,49	426,84
2,90	105,61	134,28	172,20	222,62	289,97	380,30	501,93
3,00	117,60	150,78	195,05	254,43	334,46	442,79	590,02
3,10	130,85	169,20	220,82	290,67	385,64	515,38	693,35
3,20	145,52	189,79	249,89	331,93	444,51	599,71	814,57
3,30	161,75	212,78	282,68	378,94	512,23	697,66	956,79
3,40	179,71	238,47	319,66	432,48	590,12	811,46	1 123,65
3,50	199,57	267,17	361,38	493,48	679,73	943,68	1 319,44
3,60	221,55	299,22	408,43	562,95	782,82	1 097,30	1 549,20
3,70	245,86	335,02	461,51	642,10	901,42	1 275,79	1 818,82
3,80	272,74	375,00	521,37	732,25	1 037,87	1 483,19	2 135,25
3,90	302,48	419,66	588,89	834,95	1 194,85	1 724,19	2 506,61
4,00	335,37	469,53	665,05	951,93	1 375,46	2 004,23	2 942,45
4,10	371,73	525,23	750,95	1 085,18	1 583,23	2 329,63	3 453,97
4,20	411,95	587,43	847,82	1 236,96	1 822,27	2 707,74	4 054,32
4,30	456,42	656,88	957,06	1 409,84	2 097,26	3 147,09	4 758,90
4,40	505,58	734,43	1 080,27	1 606,76	2 413,62	3 657,59	5 585,80
4,50	559,94	821,02	1 219,20	1 831,03	2 777,55	4 250,75	6 556,26
4,60	620,04	917,71	1 375,87	2 086,47	3 196,20	4 939,95	7 695,17

<b>h\k</b>	<b>0,50</b>	<b>0,55</b>	<b>0,60</b>	<b>0,65</b>	<b>0,70</b>	<b>0,75</b>	<b>0,80</b>
4,70	686,48	1 025,66	1 552,54	2 377,40	3 677,80	5 740,73	9 031,75
4,80	759,93	1 146,18	1 751,76	2 708,74	4 231,79	6 671,14	10 600,31
4,90	841,13	1 280,74	1 976,40	3 086,10	4 869,06	7 752,15	12 441,06
5,00	930,88	1 430,96	2 229,70	3 515,88	5 602,11	9 008,13	14 601,24
5,10	1 030,10	1 598,67	2 515,31	4 005,33	6 445,34	10 467,39	17 136,25
5,20	1 139,77	1 785,91	2 837,36	4 562,76	7 415,30	12 162,82	20 111,12
5,30	1 260,99	1 994,93	3 200,49	5 197,58	8 531,04	14 132,63	23 602,16
5,40	1 394,98	2 228,28	3 609,93	5 920,56	9 814,45	16 421,23	27 698,91
5,50	1 543,09	2 488,79	4 071,60	6 743,92	11 290,74	19 080,21	32 506,48
5,60	1 706,80	2 779,60	4 592,14	7 681,61	12 988,89	22 169,50	38 148,19
5,70	1 887,74	3 104,25	5 179,08	8 749,49	14 942,24	25 758,73	44 768,77
5,80	2 087,73	3 466,67	5 840,86	9 965,64	17 189,13	29 928,83	52 538,05
5,90	2 308,78	3 871,25	6 587,04	11 350,64	19 773,69	34 773,80	61 655,37
6,00	2 553,09	4 322,90	7 428,38	12 927,94	22 746,65	40 402,84	72 354,62
6,10	2 823,12	4 827,08	8 377,00	14 724,22	26 166,38	46 942,87	84 910,27
6,20	3 121,57	5 389,91	9 446,59	16 769,91	30 100,03	54 541,30	99 644,46
6,30	3 451,43	6 018,20	10 652,56	19 099,61	34 624,81	63 369,42	
6,40	3 816,00	6 719,57	12 012,32	21 752,76	39 829,56	73 626,24	
6,50	4 218,93	7 502,52	13 545,46	24 774,25	45 816,47	85 542,98	
6,60	4 664,27	8 376,53	15 274,09	28 215,24	52 703,07	99 388,26	
6,70	5 156,46	9 352,18	17 223,14	32 133,95	60 624,56		
6,80	5 700,43	10 441,30	19 420,70	36 596,71	69 736,45		
6,90	6 301,63	11 657,09	21 898,46	41 679,04	80 217,63		
7,00	6 966,08	13 014,26	24 692,15	47 466,95	92 273,86		
7,10	7 700,44	14 529,25	27 842,04	54 058,40			
7,20	8 512,05	16 220,43	31 393,55	61 564,95			
7,30	9 409,03	18 108,28	35 397,88	70 113,62			
7,40	10 400,37	20 215,65	39 912,76	79 849,09			
7,50	11 495,99	22 568,09	45 003,28	90 936,13			
7,60	12 706,86	25 194,08	50 742,85				
7,70	14 045,09	28 125,43	57 214,20				
7,80	15 524,09	31 397,65	64 510,63				
7,90	17 158,65	35 050,37	72 737,35				
8,00	18 965,14	39 127,84	82 012,94				
8,10	20 961,63	43 679,43	92 471,15				
8,20	23 168,12	48 760,29					
8,30	25 606,68	54 431,96					
8,40	28 301,72	60 763,12					
8,50	31 280,22	67 830,46					
8,60	34 571,98	75 719,59					
8,70	38 209,96	84 526,05					
8,80	42 230,56	94 356,51					
8,90	46 674,02						
9,00	51 584,81						
9,10	57 012,09						

Таблица А.3 – Зависимость  $ARL_0$  от  $k$  (0,85–1,15) и  $h$  (0,30–5,80), продолжение

<b>h\k</b>	<b>0,85</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>1,00</b>	<b>1,05</b>	<b>1,10</b>	<b>1,15</b>
0,30	7,84	8,53	9,30	10,15	11,11	12,18	13,39
0,40	9,14	9,99	10,93	12,00	13,19	14,53	16,05
0,50	10,69	11,73	12,91	14,23	15,73	17,42	19,33
0,60	12,54	13,83	15,29	16,95	18,83	20,96	23,39
0,70	14,74	16,35	18,18	20,26	22,63	25,33	28,42
0,80	17,38	19,39	21,68	24,30	27,30	30,74	34,70
0,90	20,54	23,05	25,93	29,24	33,05	37,46	42,54
1,00	24,32	27,46	31,09	35,29	40,16	45,81	52,37
1,10	28,84	32,79	37,38	42,72	48,94	56,21	64,72
1,20	34,27	39,23	45,04	51,84	59,83	69,21	80,26
1,30	40,76	47,01	54,37	63,06	73,33	85,48	99,88
1,40	48,54	56,41	65,76	76,86	90,08	105,85	124,66
1,50	57,85	67,77	79,63	93,85	110,90	131,38	156,02
1,60	68,98	81,48	96,55	114,75	136,76	163,41	195,72
1,70	82,27	98,02	117,16	140,46	168,89	203,59	246,02
1,80	98,14	117,96	142,25	172,09	208,79	254,00	309,76
1,90	117,07	141,97	172,78	210,95	258,33	317,22	390,50
2,00	139,60	170,86	209,88	258,67	319,79	396,46	492,74
2,10	166,42	205,59	254,93	317,22	395,98	495,71	622,14
2,20	198,30	247,29	309,60	389,00	490,35	619,92	785,79
2,30	236,15	297,32	375,86	476,90	607,12	775,24	992,57
2,40	281,09	357,31	456,12	584,46	751,51	969,28	1 253,61
2,50	334,38	429,19	553,26	716,00	929,89	1 211,51	1 582,88
2,60	397,57	515,27	670,78	876,76	1 150,13	1 513,66	1 997,87
2,70	472,46	618,31	812,89	1 073,11	1 421,90	1 890,33	2 520,54
2,80	561,19	741,63	984,67	1 312,87	1 757,11	2 359,66	3 178,45
2,90	666,32	889,19	1 192,28	1 605,55	2 170,44	2 944,22	4 006,22
3,00	790,86	1 065,75	1 443,17	1 962,79	2 679,99	3 672,13	5 047,38
3,10	938,41	1 277,01	1 746,36	2 398,80	3 308,11	4 578,41	6 356,68
3,20	1 113,22	1 529,79	2 112,74	2 930,95	4 082,40	5 706,71	8 003,03
3,30	1 320,34	1 832,28	2 555,55	3 580,49	5 036,89	7 111,47	10 073,19
3,40	1 565,78	2 194,28	3 090,76	4 373,39	6 213,64	8 860,56	12 676,41
3,50	1 856,64	2 627,56	3 737,72	5 341,40	7 664,57	11 038,64	15 950,30
3,60	2 201,36	3 146,20	4 519,86	6 523,34	9 453,79	13 751,27	20 068,21
3,70	2 609,94	3 767,05	5 465,51	7 966,62	11 660,45	17 130,09	25 248,46
3,80	3 094,25	4 510,33	6 608,95	9 729,22	14 382,22	21 339,24	31 766,04
3,90	3 668,32	5 400,21	7 991,63	11 881,97	17 739,69	26 583,37	39 967,23
4,00	4 348,83	6 465,66	9 663,71	14 511,37	21 881,65	33 117,56	50 288,11
4,10	5 155,52	7 741,34	11 685,81	17 723,11	26 991,70	41 259,79	63 277,71
4,20	6 111,78	9 268,76	14 131,26	21 646,29	33 296,37	51 406,33	79 627,22
4,30	7 245,36	11 097,58	17 088,73	26 438,56	41 075,11	64 050,99	
4,40	8 589,12	13 287,29	20 665,39	32 292,48	50 672,67	79 809,13	
4,50	10 182,00	15 909,06	24 990,86	39 443,21	62 514,32	99 447,45	
4,60	12 070,17	19 048,10	30 221,84	48 177,91	77 124,65		

<b>h\k</b>	<b>0,85</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>1,00</b>	<b>1,05</b>	<b>1,10</b>	<b>1,15</b>
4,70	14 308,33	22 806,41	36 547,81	58 847,32	95 150,74		
4,80	16 961,33	27 306,12	44 197,86	71 879,76			
4,90	20 106,02	32 693,40	53 449,01	87 798,34			
5,00	23 833,48	39 143,25	64 636,20				
5,10	28 251,69	46 865,18	78 164,46				
5,20	33 488,62	56 110,02	94 523,54				
5,30	39 695,96	67 178,05					
5,40	47 053,50	80 428,78					
5,50	55 774,36	96 292,65					
5,60	66 111,17						
5,70	78 363,34						
5,80	92 885,81						

Таблица А.4 – Зависимость  $ARL_0$  от  $k$  (1,20–1,50) и  $h$  (0,30–4,10), продолжение

<b>h \ k</b>	<b>1,20</b>	<b>1,25</b>	<b>1,30</b>	<b>1,35</b>	<b>1,40</b>	<b>1,45</b>	<b>1,50</b>
0,30	14,74	16,27	18,00	19,95	22,16	24,67	27,52
0,40	17,76	19,70	21,89	24,39	27,22	30,45	34,14
0,50	21,50	23,97	26,77	29,98	33,63	37,82	42,63
0,60	26,15	29,31	32,92	37,06	41,81	47,27	53,56
0,70	31,97	36,03	40,70	46,07	52,27	59,43	67,72
0,80	39,26	44,51	50,58	57,60	65,74	75,18	86,17
0,90	48,43	55,26	63,18	72,40	83,15	95,69	110,34
1,00	60,01	68,92	79,33	91,50	105,76	122,50	142,17
1,10	74,67	86,36	100,08	116,23	135,26	157,72	184,28
1,20	93,29	108,66	126,84	148,37	173,89	204,20	240,24
1,30	116,97	137,28	161,46	190,28	224,67	265,77	314,95
1,40	147,16	174,08	206,36	245,09	291,62	347,61	415,06
1,50	185,70	221,49	264,70	316,94	380,17	456,77	549,69
1,60	234,96	282,64	340,67	411,36	497,55	602,77	731,32
1,70	297,97	361,63	439,72	535,61	653,47	798,47	976,99
1,80	378,60	463,69	568,97	699,33	860,89	1 061,28	1 310,01
1,90	481,79	595,63	737,72	915,23	1 137,13	1 414,71	1 762,17
2,00	613,81	766,17	958,09	1 200,03	1 505,22	1 890,41	2 376,83
2,10	782,63	986,53	1 245,81	1 575,74	1 995,82	2 530,96	3 212,96
2,20	998,38	1 271,10	1 621,27	2 071,19	2 649,59	3 393,50	4 350,61
2,30	1 273,86	1 638,31	2 110,90	2 724,15	3 520,37	4 554,56	5 898,24
2,40	1 625,30	2 111,73	2 748,87	3 584,02	4 679,34	6 116,45	8 002,51
2,50	2 073,26	2 721,53	3 579,35	4 715,31	6 220,48	8 215,72	10 861,31
2,60	2 643,73	3 506,28	4 659,39	6 202,19	8 267,73	11 034,40	14 741,32
2,70	3 369,69	4 515,33	6 062,69	8 154,53	10 984,45	14 814,89	20 001,43
2,80	4 292,88	5 811,80	7 884,50	10 715,68	14 585,94	19 879,89	27 124,30
2,90	5 466,27	7 476,55	10 247,94	14 072,73	19 355,99	26 658,93	36 758,82
3,00	6 957,10	9 613,15	13 312,26	18 470,05	25 668,75	35 723,86	49 777,35
3,10	8 850,73	12 354,44	17 283,63	24 226,98	34 017,89	47 836,37	67 352,98
3,20	11 255,67	15 870,79	22 429,08	31 761,08	45 055,08	64 011,57	91 064,10
3,30	14 309,82	20 380,95	29 094,69	41 618,74	59 641,19	85 603,21	
3,40	18 188,59	26 165,80	37 729,20	54 515,30	78 914,14		
3,50	23 115,10	33 586,15	48 914,71	71 387,72			
3,60	29 373,18	43 105,57	63 406,50	93 463,65			
3,70	37 323,94	55 319,74	82 184,72				
3,80	47 426,74	70 994,07					
3,90	60 265,98	91 112,08					
4,00	76 584,97						
4,10	97 329,10						

Таблица А.5 – Зависимость  $ARL_0$  от  $k$  (1,55–2,00) и  $h$  (0,30–3,10), окончание

<b>h \ k</b>	<b>1,55</b>	<b>1,60</b>	<b>1,65</b>	<b>1,70</b>	<b>1,75</b>	<b>1,80</b>	<b>1,85</b>	<b>2,00</b>
0,30	30,77	34,48	38,72	43,58	49,16	55,57	62,95	92,75
0,40	38,36	43,20	48,75	55,14	62,50	71,00	80,83	120,86
0,50	48,14	54,49	61,81	70,27	80,05	91,40	104,59	158,77
0,60	60,81	69,20	78,92	90,19	103,30	118,57	136,38	210,27
0,70	77,33	88,49	101,47	116,61	134,29	154,97	179,22	280,77
0,80	98,97	113,92	131,39	151,85	175,86	204,10	237,35	377,97
0,90	127,51	147,65	171,31	199,17	232,02	270,83	316,77	513,00
1,00	165,33	192,64	224,91	263,09	308,35	362,09	426,02	701,96
1,10	215,71	253,00	297,28	349,96	412,74	487,69	577,30	968,29
1,20	283,17	334,36	395,52	468,70	556,38	661,62	788,14	1 346,34
1,30	373,88	444,61	529,59	631,88	755,15	903,95	1 083,83	1 886,71
1,40	496,41	594,65	713,45	857,30	1 031,72	1 243,51	1 501,03	2 664,30
1,50	662,54	799,73	966,72	1 170,22	1 418,54	1 721,91	2 093,04	3 790,55
1,60	888,56	1 081,08	1 317,04	1 606,54	1 962,12	2 399,36	2 937,65	5 432,01
1,70	1 197,01	1 468,38	1 803,39	2 217,35	2 729,33	3 363,17	4 148,68	7 838,56
1,80	1 618,97	2 003,01	2 480,74	3 075,46	3 816,39	4 740,20	5 893,05	11 386,44
1,90	2 197,37	2 742,76	3 426,63	4 284,66	5 361,83	6 714,97	8 415,94	16 643,89
2,00	2 991,38	3 768,14	4 750,33	5 992,80	7 565,20	9 556,04	12 077,88	24 471,10
2,10	4 082,43	5 191,24	6 605,67	8 410,40	10 713,72	13 654,18	17 409,11	36 172,48
2,20	5 582,34	7 167,80	9 208,86	11 836,72	15 220,40	19 577,66	25 189,25	53 728,13
2,30	7 644,38	9 913,73	12 863,19	16 696,48	21 678,16	28 151,78	36 563,53	80 144,76
2,40	10 478,14	13 727,77	17 993,16	23 591,11	30 936,57	40 572,94	53 211,63	
2,50	14 369,70	19 022,28	25 191,58	33 370,37	44 210,16	58 571,79	77 592,19	
2,60	19 708,76	26 365,39	35 284,47	47 232,06	63 230,98	84 645,77		
2,70	27 025,49	36 538,40	49 420,53	66 860,80	90 463,23			
2,80	37 040,31	50 614,34	69 194,45	94 621,22				
2,90	50 731,59	70 065,46	96 817,31					
3,00	69 427,62	96 910,70						
3,10	94 932,05							

## Приложение В. Таблица порогов $h$ для односторонней CUSUM в зависимости от $k$ и $ARL_0$

### Назначение таблицы и модель

В приложении приводится таблица, реализующая отображение

$$(k, ARL_0) \rightarrow h$$

для односторонней CUSUM, используемой для контроля среднего значения процесса.

В теоретической модели CUSUM строится по стандартизованной последовательности

$$X_n \sim N(0,1), n = 1, 2, \dots,$$

а односторонняя статистика накапливается по рекуррентному правилу

$$S_0 = 0, S_n = \max(0, S_{n-1} + X_n - k).$$

Момент срабатывания графика определяется как

$$\tau = \min\{n \geq 1 : S_n > h\},$$

а средняя длина серии при отсутствии сдвига задаётся как  $ARL_0(k, h) = E[\tau]$ .

В производственной практике обычно фиксируется параметр  $k$  (часто  $k \approx \delta/2$ , где  $\delta$  – сдвиг в единицах  $\sigma$ ); задаётся требуемый уровень  $ARL_0$  (например, 100, 370, 500, 1000); подбирается порог  $h$ , обеспечивающий такую среднюю длину серии.

Настоящая таблица как раз содержит значения  $h$  для заданных  $k$  и  $ARL_0$ , рассчитанные для стандартно-нормальной модели.

### Переход от сырых данных к стандартной нормали

В реальном процессе контролируется величина  $Y$ , измеряемая в физических единицах (мкм, и т.п.). При «управляемом» процессе она имеет распределение  $Y \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ , где  $\mu_0$  – номинальное среднее,  $\sigma_0$  – стандартное отклонение в статистически устойчивом состоянии. То есть, сырье данные не являются стандартными нормальными и не могут напрямую подставляться в формулы для  $X_n \sim N(0,1)$ . Чтобы корректно воспользоваться таблицей, выполняют стандартизацию. Для индивидуальных измерений  $Y_n$  в CUSUM используют

$$X_n = \frac{Y_n - \mu_0}{\sigma_0}.$$

При отсутствии сдвига  $X_n \sim N(0,1)$ , и параметры  $k$  и  $h$  из таблицы интерпретируются в единицах  $\sigma$ . Если контролируются средние по подгруппе объёма  $n$ ,

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{n,i}, \bar{Y}_n \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}),$$

то в CUSUM используют стандартизованную величину

$$X_n = \frac{\bar{Y}_n - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}.$$

На практике  $\mu_0$  и  $\sigma_0$  заменяют их оценками  $\hat{\mu}_0$ ,  $\hat{\sigma}_0$ , полученными на фазе I. После такой трансформации: поток  $X_n$  можно считать приближённо стандартно-нормальным; параметр  $k$  в таблице – безразмерен (в единицах  $\sigma$ ); порог  $h$  также выражен в тех же стандартизованных единицах и может быть непосредственно использован в рекуррентной формуле CUSUM. Если в физических единицах « $k = 0,40\sigma$ », то в стандартизованной модели это просто  $k = 0,40$ .

### Сетка дискретизации и структура таблицы

Таблица рассчитана на прямоугольной сетке значений: параметр  $k \in [0,10; 2,00]$ ,  $\Delta k = 0,05$ ; целевой уровень средней длины серии

$$ARL_0 \in [100; 1000], \Delta ARL_0 = 50$$

Формат таблицы: строки соответствуют значениям  $ARL_0$ : 100, 150, ..., 1000; столбцы соответствуют значениям  $k$ : 0,10; 0,15; ...; 1,00.

Для промежуточных значений  $k$  и  $ARL_0$ , не попадающих точно в узлы сетки, рекомендуется билинейная интерполяция, обеспечивающая погрешность менее 1,5 % при  $k \in [0,10; 1,00]$ .

**Пример применения.** Выполняется контроль средних значений некоторого параметра качества (например, отклонения размера). По данным фазы I получены оценки  $\hat{\mu}_0$  и  $\hat{\sigma}_0$ . В CUSUM будут подаваться стандартизованные значения

$$X_n = \frac{\bar{Y}_n - \hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}_0 / \sqrt{n}}.$$

Выбраны коэффициент усиления  $k = 0,40$  (то есть целевой сдвиг  $\delta \approx 0,8\sigma$ ); требуемый уровень  $ARL_0 = 950$ . По таблице для столбца  $k = 0,40$  находим строку  $ARL_0 = 950$ :  $h = 6,01$ .

«Сырые» измерения сначала переводятся в стандартизованные  $X_n$  (в единицах  $\sigma$ ); в рекуррентной формуле CUSUM используется выбранное  $k = 0,40$  и найденный по таблице порог  $h = 6,01$ ; получаем режим работы графика с требуемой средней длиной серии при отсутствии сдвига, согласованной с реальными единицами измерения через этап стандартизации.

Таблица Б – Зависимость  $h$  от  $k$  (0,10–1,00) и  $ARL_0$  (200–1000)

$ARL_0 \backslash k$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
<b>200</b>	8,52	7,26	6,33	5,60	5,01	4,54	4,14	3,80	3,50	3,25	3,02	2,82	2,64	2,48	2,34	2,20	2,09	1,97	1,87
<b>250</b>	9,29	7,85	6,80	5,99	5,35	4,83	4,40	4,03	3,72	3,44	3,20	2,99	2,80	2,63	2,47	2,33	2,21	2,09	1,98
<b>300</b>	9,94	8,35	7,20	6,32	5,64	5,08	4,62	4,23	3,89	3,60	3,35	3,12	2,92	2,74	2,58	2,44	2,30	2,18	2,07
<b>350</b>	10,52	8,77	7,54	6,61	5,87	5,29	4,80	4,39	4,04	3,74	3,47	3,24	3,03	2,85	2,68	2,53	2,39	2,26	2,15
<b>400</b>	11,02	9,15	7,84	6,85	6,09	5,47	4,96	4,53	4,17	3,86	3,58	3,34	3,13	2,93	2,76	2,60	2,46	2,33	2,21
<b>450</b>	11,48	9,49	8,10	7,07	6,27	5,63	5,10	4,66	4,29	3,96	3,68	3,43	3,21	3,01	2,83	2,67	2,53	2,39	2,27
<b>500</b>	11,89	9,79	8,34	7,27	6,44	5,77	5,23	4,78	4,39	4,06	3,77	3,51	3,28	3,08	2,90	2,73	2,58	2,45	2,32
<b>550</b>	12,27	10,07	8,56	7,45	6,59	5,91	5,35	4,88	4,48	4,14	3,84	3,58	3,35	3,14	2,96	2,79	2,64	2,50	2,37
<b>600</b>	12,62	10,33	8,76	7,61	6,73	6,03	5,45	4,97	4,57	4,22	3,92	3,65	3,41	3,20	3,01	2,84	2,68	2,54	2,41
<b>650</b>	12,95	10,57	8,95	7,76	6,86	6,14	5,55	5,06	4,65	4,29	3,98	3,71	3,47	3,25	3,06	2,89	2,73	2,58	2,45
<b>700</b>	13,26	10,79	9,12	7,90	6,97	6,24	5,64	5,14	4,72	4,36	4,04	3,77	3,52	3,30	3,11	2,93	2,77	2,62	2,49
<b>750</b>	13,55	11,00	9,28	8,03	7,09	6,33	5,72	5,22	4,79	4,42	4,10	3,82	3,57	3,35	3,15	2,97	2,81	2,66	2,52
<b>800</b>	13,81	11,19	9,43	8,16	7,19	6,42	5,80	5,29	4,85	4,48	4,15	3,87	3,61	3,39	3,19	3,01	2,84	2,69	2,55
<b>850</b>	14,06	11,37	9,57	8,27	7,29	6,51	5,88	5,35	4,91	4,53	4,20	3,91	3,66	3,43	3,23	3,04	2,88	2,72	2,58
<b>900</b>	14,32	11,54	9,71	8,38	7,38	6,59	5,95	5,41	4,97	4,58	4,25	3,96	3,70	3,47	3,26	3,08	2,91	2,75	2,61
<b>950</b>	14,55	11,71	9,83	8,49	7,47	6,66	6,01	5,48	5,02	4,63	4,29	4,00	3,74	3,50	3,30	3,11	2,94	2,78	2,64
<b>1000</b>	14,77	11,87	9,96	8,59	7,55	6,74	6,08	5,53	5,07	4,68	4,34	4,04	3,77	3,54	3,33	3,14	2,96	2,81	2,67

## Приложение Г. Таблица параметров $ARL_1$ , $k$ и $h$ односторонней CUSUM по заданному сдвигу $\delta$

### Модель и назначение таблицы

Таблица рассчитана для односторонней CUSUM, применяемой для обнаружения устойчивого сдвига среднего значения процесса. В теоретической модели предполагается, что после сдвига наблюдения имеют распределение

$$X_n \sim N(\delta, 1), \delta > 0,$$

а CUSUM-статистика строится по рекуррентному правилу

$$S_0 = 0, S_n = \max(0, S_{n-1} + X_n - k),$$

где  $k > 0$  – коэффициент усиления (референсный уровень).

Момент срабатывания определяется как

$$\tau = \min \{n \geq 1 : S_n > h\},$$

и средняя длина серии при неуправляемом процессе (при наличии сдвига  $\delta$ ) равна

$$ARL_1(\delta; k, h) = E_\delta[\tau].$$

Для заданного  $\delta$  функция  $ARL_1(\delta; k, h)$  убывает при увеличении сдвига  $\delta$  и при уменьшении порога  $h$ . Численное значение  $ARL_1$  находится из системы

$$(I - R_\delta) \boldsymbol{\mu}_\delta = \mathbf{1},$$

где элементы матрицы  $R_\delta$  формируются по Марковской модели с заменой функции распределения  $\Phi(\cdot)$  на  $\Phi(\cdot - \delta)$ .

**Назначение таблицы** – предоставить готовые связи между параметрами настройки CUSUM и ожидаемой скоростью обнаружения сдвига, то есть дать возможность подобрать порог  $h$ , обеспечивающий заданный  $ARL_1$  при выбранном коэффициенте  $k$  и фиксированном сдвиге  $\delta$  (в единицах  $\sigma$ ). Часто принимают, что  $k \approx \delta/2$ , где  $\delta$  – сдвиг в единицах  $\sigma$ .

### Переход от «сырых» данных к стандартным нормальным

В реальной задаче контролируется исходная величина  $Y$  в физических единицах (размер, шероховатость и т.п.): в управляемом состоянии:

$$Y \sim N(\mu_0, \sigma_0^2);$$

после сдвига среднего на  $\Delta$ :

$$Y \sim N(\mu_0 + \Delta, \sigma_0^2).$$

Сырые данные не являются стандартной нормалью, поэтому напрямую модель  $X_n \sim N(\delta, 1)$  к ним неприменима. Связь с теоретической моделью обеспечивается стандартизацией: задаём безразмерный сдвиг

$$\delta = \frac{\Delta}{\sigma_0},$$

строим стандартизованные наблюдения

$$X_n = \frac{Y_n - \mu_0}{\sigma_0}.$$

Тогда при отсутствии сдвига  $X_n \sim N(0, 1)$ ; при устойчивом сдвиге среднего на  $\Delta$  в физических единицах  $X_n \sim N(\delta, 1)$ . На практике  $\mu_0$  и  $\sigma_0$  заменяются их оценками  $\hat{\mu}_0$ ,  $\hat{\sigma}_0$ , полученными в фазе I. Параметр  $\delta$  интерпретируется как сдвиг в «сигмах», а параметры  $k$  и  $h$  – как безразмерные

величины в тех же единицах. Именно для такой стандартизованной последовательности  $X_n$  рассчитаны значения  $ARL_1$  и соответствующие им пороги  $h$ , представленные в таблице.

### Диапазон параметров и структура таблицы

Для фиксированного сдвига  $\delta$  построен табличный массив порогов  $h$ , обеспечивающих заданные значения  $ARL_1$  при разных  $k$ :  $0,20 \leq k \leq 1,00, \Delta k = 0,05$  (18 уровней). При  $k > 1,0$  CUSUM теряет явное преимущество перед картами Шухарта, поэтому этот диапазон не рассматривался; целевой  $ARL_1$ :  $2 \leq ARL_1 \leq 20, \Delta ARL_1 = 1$ , что покрывает практический диапазон от «почти немедленного» срабатывания до порядка одной смены.

Формат таблицы: строки – целевые значения  $ARL_1 = 2,3,\dots,20$ ; столбцы – значения  $k = 0,20,0,25,\dots,1,00$ ; в ячейке на пересечении строки  $ARL_1$  и столбца  $k$  приведён порог  $h$ , обеспечивающий указанную среднюю длину серии при заданном сдвиге  $\delta$ . Для промежуточных значений  $k$  и  $ARL_1$ , не попадающих точно в узлы сетки, рекомендуется билинейная интерполяция по ближайшим четырём точкам ( $ARL_1, k$ ), что даёт погрешность, как показывают расчёты, не хуже 1,5 % в области  $k \in [0,20; 1,00]$ .

Пример практического применения. Контролируется среднее значение размерного параметра. По фазе I получены оценки:  $\hat{\mu}_0 = 50,000\text{мм}$ ,  $\hat{\sigma}_0 = 0,010\text{мм}$ . Считается, что критически важен устойчивый сдвиг среднего на  $\Delta = 0,8 \hat{\sigma}_0 = 0,008\text{мм}$ . Тогда безразмерный сдвиг

$$\delta = \frac{\Delta}{\hat{\sigma}_0} = 0,8.$$

В стандартизованных переменных

$$X_n = \frac{Y_n - \hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}_0}$$

это означает: при неуправляемом процессе  $X_n \sim N(0,8,1)$ .

Выбирается параметр  $k \approx \delta/2 = 0,4$ ; целевой  $ARL_1 = 10$  наблюдений (среднее время обнаружения сдвига порядка 10 точек).

Шаг 1. Поиск порога по таблице. Находим в таблице строку  $ARL_1 = 10$  и столбец  $k = 0,40$ . По приведённому фрагменту: для  $ARL_1 = 10$  и  $k = 0,40$  значение порога  $h = 4,05$ .

Шаг 3. Практическая настройка.

1. В реальном времени измерения  $Y_n$  стандартизуют:

$$X_n = \frac{Y_n - \hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}_0}.$$

2. В CUSUM-рекурсии используют:  $S_n = \max(0, S_{n-1} + X_n - 0,4), S_0 = 0$ ,

и порог  $h = 4,05$ .

3. При  $S_n > h$  подаётся сигнал о возможном сдвиге среднего порядка  $0,8 \hat{\sigma}_0$  с ожидаемой средней длиной серии до обнаружения около 10 наблюдений.

Таким образом, таблица позволяет быстро подобрать порог  $h$  под заданный сдвиг  $\delta$  (в «сигмах»), выбранный  $k$  и целевой  $ARL_1$ , а переход от сырых измерений к стандартной нормали обеспечивает корректное перенесение этих табличных настроек в реальные физические единицы.

Таблица Б – Значения порогов  $h$ , обеспечивающих заданные значения  $ARL_1$  (2–20) при  $k$  (0,20–1,00)

$ARL_1 \setminus k$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
2	0,21	0,26	0,32	0,38	0,44	0,50	0,56	0,62	0,69	0,75	0,83	0,89	0,97	1,03	1,10	1,18	1,26
3	0,74	0,81	0,89	0,97	1,04	1,13	1,22	1,32	1,40	1,49	1,61	1,71	1,81	1,92	2,04	2,14	2,25
4	1,12	1,22	1,32	1,42	1,53	1,65	1,77	1,88	2,02	2,16	2,31	2,45	2,61	2,76	2,94	3,09	3,25
5	1,45	1,57	1,70	1,83	1,96	2,12	2,27	2,45	2,63	2,82	3,02	3,21	3,41	3,60	3,84	4,03	4,27
6	1,76	1,90	2,06	2,22	2,39	2,59	2,78	3,02	3,25	3,48	3,72	3,95	4,23	4,46	4,73	5,01	5,24
7	2,04	2,22	2,39	2,61	2,82	3,06	3,29	3,56	3,84	4,11	4,42	4,70	5,01	5,32	5,63	5,94	6,26
8	2,31	2,51	2,74	2,98	3,25	3,52	3,80	4,11	4,46	4,77	5,09	5,48	5,79	6,18	6,49	6,88	7,27
9	2,57	2,80	3,06	3,33	3,64	3,95	4,30	4,66	5,05	5,40	5,79	6,18	6,61	7,04	7,43	7,82	8,29
10	2,82	3,09	3,39	3,72	4,07	4,42	4,81	5,24	5,63	6,10	6,49	6,96	7,43	7,90	8,29	8,76	9,22
11	3,07	3,37	3,72	4,07	4,46	4,85	5,32	5,79	6,26	6,73	7,19	7,74	8,21	8,76	9,22	9,69	10,24
12	3,33	3,64	4,03	4,42	4,85	5,32	5,79	6,33	6,80	7,35	7,90	8,44	8,99	9,54	10,16	10,71	11,25
13	3,56	3,91	4,34	4,77	5,24	5,79	6,33	6,88	7,43	8,05	8,60	9,22	9,85	10,40	11,02	11,64	12,19
14	3,80	4,19	4,66	5,12	5,67	6,26	6,80	7,43	8,05	8,68	9,30	10,01	10,63	11,25	11,88	12,58	13,28
15	4,03	4,46	4,93	5,48	6,06	6,65	7,35	7,97	8,60	9,30	10,01	10,71	11,41	12,11	12,82	13,60	14,22
16	4,23	4,73	5,24	5,87	6,49	7,12	7,82	8,52	9,22	10,01	10,71	11,41	12,19	12,97	13,75	14,53	15,31
17	4,46	5,01	5,55	6,18	6,88	7,58	8,29	9,07	9,85	10,63	11,41	12,19	12,97	13,75	14,69	15,47	16,25
18	4,70	5,24	5,87	6,57	7,27	8,05	8,83	9,61	10,47	11,25	12,11	12,97	13,75	14,69	15,47	16,41	17,19
19	4,93	5,52	6,18	6,88	7,66	8,44	9,30	10,16	11,02	11,88	12,82	13,75	14,53	15,47	16,41	17,35	18,28
20	5,12	5,79	6,49	7,27	8,05	8,91	9,85	10,71	11,64	12,58	13,44	14,46	15,47	16,41	17,35	18,28	19,22

## Приложение Д. Таблица значений $SDL_0(k, h)$ для односторонней CUSUM

### Модель и смысл показателя $SDL_0$

Таблица в приложении содержит значения стандартного отклонения длины серии  $SDL_0$  при отсутствии сдвига процесса, то есть стандартное отклонение «времени до ложного срабатывания» односторонней CUSUM. Рассматривается стандартная модель односторонней CUSUM:

$$S_0 = 0, S_n = \max(0, S_{n-1} + X_n - k), n = 1, 2, \dots,$$

Где  $X_n$  – стандартизованные наблюдения,  $k > 0$  – коэффициент усиления (референсный уровень),  $h > 0$  – порог срабатывания.

Момент срабатывания графика (длина серии) определяется как

$$\tau(k, h) = \min\{n \geq 1 : S_n > h\}.$$

При отсутствии сдвига ( $X_n \sim N(0, 1)$ ) математическое ожидание равно  $ARL_0(k, h) = E[\tau]$ , а стандартное отклонение длины серии определяется как

$$SDL_0(k, h) = \sqrt{\text{Var}[\tau(k, h)]}.$$

Значения  $SDL_0(k, h)$  приведены в таблице.

Таким образом,  $ARL_0(k, h)$  описывает среднюю длину серии до ложной тревоги,  $SDL_0(k, h)$  описывает, насколько сильно длина серии колеблется вокруг этого среднего. Меньшие значения  $SDL_0$  означают более предсказуемое поведение схемы (меньший разброс времени до сигнала при том же среднем  $ARL_0$ ).

### Переход от сырых данных к стандартной нормали

В реальной задаче контролируется физическая величина  $Y$  (размер, шероховатость и т.п.) при управляемом процессе:

$$Y \sim N(\mu_0, \sigma_0^2);$$

после возможного сдвига среднего – другое нормальное распределение, но в данном приложении рассмотрен случай управляемого процесса.

Сырые данные  $Y_n$  не являются стандартными нормальными, поэтому для использования табличных значений  $SDL_0(k, h)$  (расчитанных для стандартной модели) выполняется стандартизация. Для индивидуальных измерений:

$$X_n = \frac{Y_n - \mu_0}{\sigma_0}.$$

Тогда при исправном процессе  $X_n \sim N(0, 1)$ . Для средних по подгруппам объема  $n$ :

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{n,i}, \bar{Y}_n \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}),$$

и в CUSUM используется

$$X_n = \frac{\bar{Y}_n - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}.$$

На практике  $\mu_0, \sigma_0$  заменяют оценками  $\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0$ , полученными на фазе I. В этих стандартизованных значениях  $X_n \sim N(0, 1)$  при управляемом состоянии; параметры  $k$  и  $h$  из таблицы интерпретируются как безразмерные (в «сигмах»); показатели  $ARL_0(k, h)$  и  $SDL_0(k, h)$  из теоретической модели непосредственно соответствуют реальной схеме контроля, если CUSUM строится на стандартизованных данных  $X_n$ .

### Структура таблицы $SDL_0(k, h)$

Таблица рассчитана на сетке параметров  $k$  и  $h$ , что и таблица для  $ARL_0(k, h)$ : значения  $k$  образуют набор (например)  $k = 0,15; 0,20; 0,25; \dots$ ; значения  $h$  – набор уровней от малых порогов к большим (например,  $h = 0,30; 0,40; 0,50; \dots$ ). Строки соответствуют значениям порога  $h$ , столбцы – значениям  $k$ , а в ячейках содержатся значения  $SDL_0(k, h)$ . Для промежуточных

значений  $k$  и  $h$ , не попадающих точно в узлы сетки, допускается двуступенчатая интерполяция: линейная интерполяция по  $h$  при фиксированном  $k$ ; затем – линейная интерполяция по  $k$  (или наоборот). Типичные погрешности интерполяции для  $SDL_0$  сопоставимы с погрешностями для  $ARL_0$  и несущественны на фоне неопределённости оценок  $\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0$  в реальном производстве. Пример практического применения. На участке шлифования контролируется среднее значение параметра шероховатости  $R_a$ . По данным фазы I получены:  $\hat{\mu}_0 = 0,25$  мкм,  $\hat{\sigma}_0 = 0,05$  мкм.

Выборка ведётся по единичным деталям, в CUSUM подаются стандартизованные наблюдения

$$X_n = \frac{R_{a,n} - \hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}_0}.$$

Для проектируемой CUSUM-карты выбраны  $k = 0,50$ ,  $h = 4,40$  по таблице  $ARL_0(k, h)$  приложения А, обеспечивающие целевой  $ARL_0 \approx 506$ . Для вычисления стандартного отклонения длины серии, обращаются к таблице  $SDL_0(k, h) \approx 500$ .

Таблица  $SDL_0(k, h)$  в приложении позволяет дополнить классическое проектирование CUSUM-карт по  $ARL_0$  анализом стабильности поведения CUSUM и выбирать настройки, обеспечивающие не только нужный уровень ложных тревог, но и приемлемую изменчивость длины серии.

Данные представлены в трех таблицах для удобства. Значения более 100 000 не приведены.  
Таблица Г.1 – Зависимость  $SDRL_0$  от  $k$  (0,15–0,40) и  $h$  (0,30–12,00), начало

<b>h\k</b>	<b>0,15</b>	<b>0,20</b>	<b>0,25</b>	<b>0,30</b>	<b>0,35</b>	<b>0,40</b>
<b>0,30</b>	2,43	2,61	2,80	3,01	3,24	3,49
<b>0,40</b>	2,72	2,93	3,15	3,40	3,67	3,97
<b>0,50</b>	3,05	3,28	3,55	3,84	4,16	4,51
<b>0,60</b>	3,40	3,67	3,98	4,32	4,70	5,12
<b>0,70</b>	3,78	4,10	4,46	4,86	5,31	5,80
<b>0,80</b>	4,19	4,57	4,99	5,46	5,98	6,57
<b>0,90</b>	4,64	5,08	5,57	6,12	6,74	7,43
<b>1,00</b>	5,13	5,63	6,20	6,85	7,57	8,40
<b>1,10</b>	5,65	6,23	6,90	7,65	8,50	9,48
<b>1,20</b>	6,21	6,89	7,65	8,53	9,53	10,68
<b>1,30</b>	6,81	7,59	8,48	9,50	10,67	12,02
<b>1,40</b>	7,46	8,35	9,37	10,55	11,92	13,50
<b>1,50</b>	8,15	9,16	10,33	11,70	13,29	15,14
<b>1,60</b>	8,87	10,03	11,37	12,95	14,79	16,96
<b>1,70</b>	9,65	10,96	12,49	14,30	16,43	18,96
<b>1,80</b>	10,47	11,95	13,70	15,77	18,23	21,16
<b>1,90</b>	11,33	13,00	14,99	17,35	20,18	23,57
<b>2,00</b>	12,25	14,12	16,37	19,06	22,30	26,22
<b>2,10</b>	13,21	15,31	17,84	20,90	24,60	29,12
<b>2,20</b>	14,22	16,57	19,41	22,87	27,10	32,29
<b>2,30</b>	15,28	17,90	21,09	25,00	29,80	35,75
<b>2,40</b>	16,39	19,30	22,87	27,28	32,73	39,52
<b>2,50</b>	17,56	20,79	24,77	29,72	35,89	43,64
<b>2,60</b>	18,78	22,36	26,79	32,34	39,31	48,12
<b>2,70</b>	20,06	24,01	28,94	35,15	43,01	53,01
<b>2,80</b>	21,40	25,75	31,22	38,15	46,99	58,33

<b>h\k</b>	<b>0,15</b>	<b>0,20</b>	<b>0,25</b>	<b>0,30</b>	<b>0,35</b>	<b>0,40</b>
<b>2,90</b>	22,81	27,59	33,64	41,37	51,30	64,12
<b>3,00</b>	24,27	29,52	36,21	44,81	55,94	70,43
<b>3,10</b>	25,80	31,55	38,94	48,49	60,94	77,28
<b>3,20</b>	27,40	33,69	41,83	52,43	66,34	84,74
<b>3,30</b>	29,07	35,94	44,89	56,63	72,15	92,84
<b>3,40</b>	30,81	38,31	48,14	61,12	78,42	101,66
<b>3,50</b>	32,63	40,80	51,58	65,92	85,17	111,24
<b>3,60</b>	34,52	43,41	55,22	71,04	92,44	121,64
<b>3,70</b>	36,49	46,15	59,07	76,51	100,27	132,95
<b>3,80</b>	38,55	49,03	63,15	82,34	108,70	145,24
<b>3,90</b>	40,69	52,05	67,46	88,56	117,77	158,58
<b>4,00</b>	42,92	55,22	72,02	95,20	127,53	173,06
<b>4,10</b>	45,24	58,55	76,84	102,28	138,03	188,78
<b>4,20</b>	47,65	62,03	81,94	109,83	149,32	205,85
<b>4,30</b>	50,15	65,68	87,33	117,87	161,46	224,38
<b>4,40</b>	52,76	69,51	93,02	126,44	174,52	244,48
<b>4,50</b>	55,47	73,51	99,02	135,56	188,55	266,29
<b>4,60</b>	58,28	77,71	105,37	145,29	203,64	289,96
<b>4,70</b>	61,21	82,10	112,07	155,65	219,85	315,63
<b>4,80</b>	64,24	86,70	119,14	166,67	237,27	343,47
<b>4,90</b>	67,39	91,51	126,60	178,41	255,99	373,67
<b>5,00</b>	70,66	96,55	134,48	190,91	276,10	406,41
<b>5,10</b>	74,06	101,81	142,78	204,21	297,70	441,92
<b>5,20</b>	77,58	107,32	151,54	218,37	320,90	480,43
<b>5,30</b>	81,23	113,08	160,78	233,43	345,81	522,18
<b>5,40</b>	85,02	119,10	170,53	249,46	372,57	567,44
<b>5,50</b>	88,95	125,39	180,80	266,51	401,31	616,51
<b>5,60</b>	93,02	131,97	191,63	284,65	432,16	669,70
<b>5,70</b>	97,24	138,84	203,04	303,94	465,28	727,35
<b>5,80</b>	101,61	146,02	215,07	324,46	500,84	789,85
<b>5,90</b>	106,14	153,53	227,75	346,29	539,02	857,59
<b>6,00</b>	110,83	161,36	241,11	369,49	580,00	931,01
<b>6,10</b>	115,70	169,55	255,18	394,16	623,98	1 010,58
<b>6,20</b>	120,73	178,09	270,01	420,39	671,19	1 096,82
<b>6,30</b>	125,94	187,02	285,63	448,28	721,86	1 190,28
<b>6,40</b>	131,34	196,33	302,08	477,93	776,25	1 291,56
<b>6,50</b>	136,92	206,06	319,41	509,44	834,61	1 401,32
<b>6,60</b>	142,71	216,21	337,66	542,94	897,24	1 520,25
<b>6,70</b>	148,69	226,80	356,87	578,55	964,44	1 649,13
<b>6,80</b>	154,88	237,86	377,10	616,39	1 036,56	1 788,78
<b>6,90</b>	161,29	249,39	398,41	656,60	1 113,95	1 940,10
<b>7,00</b>	167,92	261,43	420,83	699,34	1 196,98	2 104,06
<b>7,10</b>	174,77	273,99	444,44	744,76	1 286,07	2 281,72
<b>7,20</b>	181,86	287,09	469,29	793,02	1 381,66	2 474,22
<b>7,30</b>	189,19	300,75	495,45	844,30	1 484,22	2 682,78

<b>h\k</b>	<b>0,15</b>	<b>0,20</b>	<b>0,25</b>	<b>0,30</b>	<b>0,35</b>	<b>0,40</b>
<b>7,40</b>	196,78	315,00	522,99	898,78	1 594,25	2 908,76
<b>7,50</b>	204,62	329,87	551,97	956,68	1 712,30	3 153,59
<b>7,60</b>	212,72	345,37	582,47	1 018,19	1 838,94	3 418,86
<b>7,70</b>	221,10	361,53	614,56	1 083,53	1 974,81	3 706,26
<b>7,80</b>	229,76	378,38	648,34	1 152,96	2 120,56	4 017,64
<b>7,90</b>	238,72	395,96	683,88	1 226,72	2 276,93	4 354,99
<b>8,00</b>	247,97	414,28	721,28	1 305,07	2 444,67	4 720,47
<b>8,10</b>	257,53	433,38	760,63	1 388,30	2 624,61	5 116,44
<b>8,20</b>	267,41	453,29	802,03	1 476,72	2 817,63	5 545,42
<b>8,30</b>	277,62	474,04	845,59	1 570,65	3 024,70	6 010,17
<b>8,40</b>	288,17	495,67	891,42	1 670,42	3 246,81	6 513,67
<b>8,50</b>	299,07	518,22	939,64	1 776,39	3 485,07	7 059,15
<b>8,60</b>	310,32	541,72	990,36	1 888,96	3 740,64	7 650,09
<b>8,70</b>	321,95	566,21	1 043,71	2 008,52	4 014,78	8 290,29
<b>8,80</b>	333,96	591,73	1 099,84	2 135,52	4 308,84	8 983,86
<b>8,90</b>	346,36	618,33	1 158,88	2 270,41	4 624,26	9 735,22
<b>9,00</b>	359,18	646,04	1 220,98	2 413,67	4 962,59	10 549,21
<b>9,10</b>	372,40	674,92	1 286,30	2 565,84	5 325,49	11 431,03
<b>9,20</b>	386,07	705,01	1 355,01	2 727,45	5 714,75	12 386,33
<b>9,30</b>	400,17	736,36	1 427,27	2 899,09	6 132,26	13 421,23
<b>9,40</b>	414,74	769,02	1 503,28	3 081,38	6 580,09	14 542,37
<b>9,50</b>	429,77	803,05	1 583,22	3 274,98	7 060,43	15 756,93
<b>9,60</b>	445,30	838,50	1 667,29	3 480,60	7 575,64	17 072,68
<b>9,70</b>	461,32	875,43	1 755,72	3 698,97	8 128,24	18 498,05
<b>9,80</b>	477,87	913,90	1 848,71	3 930,87	8 720,95	20 042,17
<b>9,90</b>	494,94	953,97	1 946,50	4 177,16	9 356,68	21 714,94
<b>10,00</b>	512,57	995,71	2 049,35	4 438,72	10 038,54	23 527,06
<b>10,10</b>	530,76	1 039,19	2 157,51	4 716,48	10 769,88	25 490,15
<b>10,20</b>	549,54	1 084,48	2 271,25	5 011,47	11 554,28	27 616,78
<b>10,30</b>	568,92	1 131,65	2 390,86	5 324,73	12 395,61	29 920,56
<b>10,40</b>	588,92	1 180,78	2 516,63	5 657,40	13 297,97	32 416,25
<b>10,50</b>	609,56	1 231,95	2 648,90	6 010,68	14 265,80	35 119,84
<b>10,60</b>	630,86	1 285,25	2 787,98	6 385,85	15 303,84	38 048,63
<b>10,70</b>	652,83	1 340,75	2 934,23	6 784,25	16 417,19	41 221,39
<b>10,80</b>	675,51	1 398,55	3 088,01	7 207,33	17 611,31	44 658,43
<b>10,90</b>	698,91	1 458,75	3 249,72	7 656,61	18 892,04	48 381,77
<b>11,00</b>	723,05	1 521,43	3 419,76	8 133,71	20 265,68	52 415,24
<b>11,10</b>	747,96	1 586,71	3 598,55	8 640,35	21 738,95	56 784,68
<b>11,20</b>	773,65	1 654,69	3 786,55	9 178,36	23 319,09	61 518,06
<b>11,30</b>	800,17	1 725,48	3 984,22	9 749,67	25 013,83	66 645,70
<b>11,40</b>	827,51	1 799,19	4 192,07	10 356,36	26 831,50	72 200,43
<b>11,50</b>	855,73	1 875,95	4 410,61	11 000,59	28 780,99	78 217,83
<b>11,60</b>	884,83	1 955,87	4 640,39	11 684,71	30 871,88	84 736,42
<b>11,70</b>	914,85	2 039,10	4 881,99	12 411,16	33 114,41	91 797,95
<b>11,80</b>	945,82	2 125,75	5 136,02	13 182,57	35 519,57	99 447,63

<b>h\k</b>	<b>0,15</b>	<b>0,20</b>	<b>0,25</b>	<b>0,30</b>	<b>0,35</b>	<b>0,40</b>
<b>11,90</b>	977,77	2 215,97	5 403,11	14 001,72	38 099,16	
<b>12,00</b>	1 010,71	2 309,92	5 683,93	14 871,57	40 865,83	

Таблица Г.2 – Зависимость  $SDRL_0$  от  $k$  (0,45–0,70) и  $h$  (0,30–10,60), продолжение

<b>h\k</b>	<b>0,45</b>	<b>0,50</b>	<b>0,55</b>	<b>0,60</b>	<b>0,65</b>	<b>0,70</b>
<b>0,30</b>	3,77	4,07	4,41	4,77	5,18	5,63
<b>0,40</b>	4,30	4,66	5,06	5,51	6,00	6,55
<b>0,50</b>	4,90	5,33	5,82	6,35	6,95	7,61
<b>0,60</b>	5,58	6,10	6,68	7,33	8,05	8,86
<b>0,70</b>	6,36	6,98	7,67	8,45	9,33	10,32
<b>0,80</b>	7,23	7,97	8,81	9,75	10,82	12,03
<b>0,90</b>	8,22	9,11	10,12	11,26	12,55	14,03
<b>1,00</b>	9,33	10,40	11,61	12,99	14,57	16,37
<b>1,10</b>	10,59	11,86	13,31	14,98	16,90	19,11
<b>1,20</b>	12,00	13,51	15,26	17,28	19,62	22,32
<b>1,30</b>	13,58	15,38	17,48	19,92	22,76	26,07
<b>1,40</b>	15,35	17,49	20,00	22,94	26,39	30,45
<b>1,50</b>	17,32	19,87	22,87	26,41	30,59	35,55
<b>1,60</b>	19,51	22,54	26,12	30,37	35,44	41,48
<b>1,70</b>	21,96	25,53	29,79	34,89	41,01	48,38
<b>1,80</b>	24,66	28,87	33,93	40,04	47,43	56,39
<b>1,90</b>	27,66	32,61	38,60	45,89	54,79	65,67
<b>2,00</b>	30,98	36,78	43,86	52,55	63,23	76,40
<b>2,10</b>	34,64	41,42	49,77	60,09	72,89	88,82
<b>2,20</b>	38,68	46,58	56,40	68,64	83,94	103,15
<b>2,30</b>	43,12	52,32	63,84	78,31	96,57	119,69
<b>2,40</b>	48,02	58,69	72,17	89,25	110,99	138,76
<b>2,50</b>	53,40	65,77	81,51	101,62	127,45	160,72
<b>2,60</b>	59,32	73,61	91,95	115,60	146,21	186,02
<b>2,70</b>	65,82	82,31	103,64	131,38	167,61	215,13
<b>2,80</b>	72,96	91,95	116,72	149,20	192,00	248,64
<b>2,90</b>	80,81	102,63	131,34	169,32	219,80	287,20
<b>3,00</b>	89,42	114,47	147,70	192,03	251,48	331,57
<b>3,10</b>	98,87	127,57	165,98	217,66	287,58	382,63
<b>3,20</b>	109,24	142,09	186,42	246,59	328,71	441,37
<b>3,30</b>	120,62	158,17	209,27	279,23	375,58	508,95
<b>3,40</b>	133,10	175,97	234,81	316,07	428,99	586,72
<b>3,50</b>	146,79	195,68	263,35	357,64	489,84	676,19
<b>3,60</b>	161,81	217,49	295,25	404,55	559,18	779,15
<b>3,70</b>	178,27	241,64	330,89	457,48	638,18	897,62
<b>3,80</b>	196,33	268,36	370,72	517,20	728,19	1 033,93
<b>3,90</b>	216,11	297,93	415,22	584,57	830,75	1 190,78
<b>4,00</b>	237,80	330,65	464,93	660,58	947,59	1 371,25
<b>4,10</b>	261,56	366,85	520,47	746,32	1 080,69	1 578,89

<b>h\k</b>	<b>0,45</b>	<b>0,50</b>	<b>0,55</b>	<b>0,60</b>	<b>0,65</b>	<b>0,70</b>
<b>4,20</b>	287,60	406,90	582,50	843,04	1 232,33	1 817,79
<b>4,30</b>	316,12	451,19	651,79	952,13	1 405,06	2 092,64
<b>4,40</b>	347,37	500,18	729,18	1 075,17	1 601,83	2 408,86
<b>4,50</b>	381,60	554,37	815,61	1 213,95	1 825,96	2 772,65
<b>4,60</b>	419,09	614,29	912,13	1 370,47	2 081,25	3 191,16
<b>4,70</b>	460,15	680,55	1 019,91	1 546,98	2 372,03	3 672,62
<b>4,80</b>	505,11	753,82	1 140,26	1 746,04	2 703,22	4 226,47
<b>4,90</b>	554,35	834,84	1 274,65	1 970,52	3 080,44	4 863,60
<b>5,00</b>	608,25	924,41	1 424,70	2 223,66	3 510,06	5 596,51
<b>5,10</b>	667,27	1 023,44	1 592,24	2 509,11	3 999,36	6 439,60
<b>5,20</b>	731,89	1 132,93	1 779,30	2 831,00	4 556,64	7 409,42
<b>5,30</b>	802,63	1 253,97	1 988,16	3 193,96	5 191,32	8 525,02
<b>5,40</b>	880,07	1 387,77	2 221,33	3 603,25	5 914,14	9 808,29
<b>5,50</b>	964,84	1 535,70	2 481,66	4 064,75	6 737,35	11 284,44
<b>5,60</b>	1 057,63	1 699,21	2 772,30	4 585,14	7 674,89	12 982,45
<b>5,70</b>	1 159,20	1 879,97	3 096,78	5 171,91	8 742,61	14 935,65
<b>5,80</b>	1 270,37	2 079,77	3 459,02	5 833,53	9 958,61	17 182,41
<b>5,90</b>	1 392,05	2 300,63	3 863,43	6 579,54	11 343,46	19 766,82
<b>6,00</b>	1 525,23	2 544,75	4 314,90	7 420,72	12 920,61	22 739,64
<b>6,10</b>	1 670,99	2 814,59	4 818,90	8 369,17	14 716,74	26 159,23
<b>6,20</b>	1 830,52	3 112,85	5 381,56	9 438,60	16 762,27	30 092,73
<b>6,30</b>	2 005,10	3 442,51	6 009,67	10 644,41	19 091,82	34 617,37
<b>6,40</b>	2 196,17	3 806,89	6 710,87	12 004,00	21 744,82	39 821,98
<b>6,50</b>	2 405,28	4 209,63	7 493,64	13 536,98	24 766,16	45 808,75
<b>6,60</b>	2 634,11	4 654,77	8 367,46	15 265,45	28 207,00	52 695,21
<b>6,70</b>	2 884,54	5 146,77	9 342,94	17 214,33	32 125,55	60 616,55
<b>6,80</b>	3 158,59	5 690,55	10 431,88	19 411,72	36 588,16	69 728,30
<b>6,90</b>	3 458,49	6 291,56	11 647,48	21 889,32	41 670,33	80 209,34
<b>7,00</b>	3 786,67	6 955,81	13 004,48	24 682,84	47 458,09	92 265,43
<b>7,10</b>	4 145,80	7 689,97	14 519,29	27 832,57	54 049,39	
<b>7,20</b>	4 538,79	8 501,38	16 210,29	31 383,91	61 555,78	
<b>7,30</b>	4 968,82	9 398,17	18 097,96	35 388,07	70 104,30	
<b>7,40</b>	5 439,40	10 389,32	20 205,16	39 902,79	79 839,62	
<b>7,50</b>	5 954,33	11 484,74	22 557,41	44 993,15	90 926,50	
<b>7,60</b>	6 517,79	12 695,41	25 183,22	50 732,55		
<b>7,70</b>	7 134,36	14 033,45	28 114,39	57 203,73		
<b>7,80</b>	7 809,04	15 512,24	31 386,43	64 500,00		
<b>7,90</b>	8 547,29	17 146,61	35 038,97	72 726,55		
<b>8,00</b>	9 355,10	18 952,90	39 116,25	82 001,98		
<b>8,10</b>	10 239,03	20 949,20	43 667,67	92 460,02		
<b>8,20</b>	11 206,24	23 155,48	48 748,35	104 251,44		
<b>8,30</b>	12 264,58	25 593,85	54 419,83	117 546,25		
<b>8,40</b>	13 422,63	28 288,69	60 750,81	132 536,12		
<b>8,50</b>	14 689,77	31 266,99	67 817,98	149 437,15		
<b>8,60</b>	16 076,29	34 558,56	75 706,92	168 493,01		

<b>h\k</b>	<b>0,45</b>	<b>0,50</b>	<b>0,55</b>	<b>0,60</b>	<b>0,65</b>	<b>0,70</b>
<b>8,70</b>	17 593,41	38 196,33	84 513,20	189 978,42		
<b>8,80</b>	19 253,45	42 216,73	94 343,48	214 203,14		
<b>8,90</b>	21 069,86	46 659,99	105 316,82	241 516,42		
<b>9,00</b>	23 057,37	51 570,59	117 566,13	272 312,02		
<b>9,10</b>	25 232,09	56 997,67	131 239,79	307 033,92		
<b>9,20</b>	27 611,64	62 995,54	146 503,39	346 182,69		
<b>9,30</b>	30 215,33	69 624,25	163 541,82	390 322,73		
<b>9,40</b>	33 064,25	76 950,13	182 561,44	440 090,41		
<b>9,50</b>	36 181,50	85 046,50	203 792,61	496 203,19		
<b>9,60</b>	39 592,35	93 994,40	227 492,48	559 470,04		
<b>9,70</b>	43 324,45					
<b>9,80</b>	47 408,05					
<b>9,90</b>	51 876,25					
<b>10,00</b>	56 765,27					
<b>10,10</b>	62 114,74					
<b>10,20</b>	67 968,01					
<b>10,30</b>	74 372,55					
<b>10,40</b>	81 380,24					
<b>10,50</b>	89 047,91					
<b>10,60</b>	97 437,69					

Таблица Г.3 – Зависимость  $SDRL_0$  от  $k$  (0,75–1,00) и  $h$  (0,30–6,60), окончание

<b>h\k</b>	<b>0,75</b>	<b>0,80</b>	<b>0,85</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>1,00</b>
<b>0,30</b>	6,13	6,69	7,31	8,00	8,76	9,62
<b>0,40</b>	7,16	7,83	8,59	9,44	10,39	11,45
<b>0,50</b>	8,36	9,19	10,12	11,17	12,34	13,67
<b>0,60</b>	9,77	10,79	11,94	13,24	14,71	16,37
<b>0,70</b>	11,43	12,69	14,12	15,73	17,56	19,65
<b>0,80</b>	13,40	14,95	16,72	18,73	21,03	23,65
<b>0,90</b>	15,71	17,63	19,83	22,35	25,23	28,56
<b>1,00</b>	18,44	20,82	23,56	26,71	30,35	34,56
<b>1,10</b>	21,67	24,61	28,03	31,99	36,59	41,94
<b>1,20</b>	25,47	29,13	33,39	38,37	44,19	51,01
<b>1,30</b>	29,95	34,49	39,82	46,08	53,46	62,17
<b>1,40</b>	35,22	40,86	47,52	55,41	64,78	75,90
<b>1,50</b>	41,43	48,42	56,75	66,69	78,58	92,82
<b>1,60</b>	48,71	57,38	67,79	80,32	95,42	113,64
<b>1,70</b>	57,26	68,00	81,00	96,77	115,94	139,28
<b>1,80</b>	67,28	80,56	96,78	116,62	140,94	170,82
<b>1,90</b>	79,00	95,40	115,60	140,54	171,38	209,59
<b>2,00</b>	92,70	112,91	138,03	169,33	208,38	257,22
<b>2,10</b>	108,69	133,56	164,75	203,95	253,34	315,68
<b>2,20</b>	127,34	157,87	196,51	245,55	307,91	387,35
<b>2,30</b>	149,06	186,47	234,27	295,48	374,07	475,15

<b>h\k</b>	<b>0,75</b>	<b>0,80</b>	<b>0,85</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>1,00</b>
<b>2,40</b>	174,34	220,09	279,09	355,36	454,22	582,62
<b>2,50</b>	203,76	259,60	332,27	427,14	551,26	714,06
<b>2,60</b>	237,96	305,98	395,35	513,11	668,68	874,71
<b>2,70</b>	277,71	360,43	470,12	616,04	810,68	1 070,97
<b>2,80</b>	323,92	424,33	558,74	739,25	982,36	1 310,63
<b>2,90</b>	377,60	499,31	663,76	886,71	1 189,87	1 603,21
<b>3,00</b>	439,97	587,28	788,19	1 063,16	1 440,65	1 960,35
<b>3,10</b>	512,44	690,49	935,62	1 274,31	1 743,74	2 396,26
<b>3,20</b>	596,64	811,59	1 110,32	1 526,98	2 110,02	2 928,31
<b>3,30</b>	694,48	953,69	1 317,33	1 829,36	2 552,72	3 577,75
<b>3,40</b>	808,15	1 120,43	1 562,66	2 191,26	3 087,83	4 370,56
<b>3,50</b>	940,24	1 316,11	1 853,41	2 624,43	3 734,69	5 338,47
<b>3,60</b>	1 093,73	1 545,74	2 198,01	3 142,96	4 516,72	6 520,30
<b>3,70</b>	1 272,10	1 815,25	2 606,48	3 763,70	5 462,27	7 963,49
<b>3,80</b>	1 479,37	2 131,55	3 090,67	4 506,87	6 605,60	9 726,00
<b>3,90</b>	1 720,24	2 502,79	3 664,63	5 396,65	7 988,18	11 878,64
<b>4,00</b>	2 000,15	2 938,51	4 345,02	6 461,99	9 660,16	14 507,94
<b>4,10</b>	2 325,43	3 449,91	5 151,59	7 737,56	11 682,16	17 719,58
<b>4,20</b>	2 703,41	4 050,13	6 107,75	9 264,86	14 127,51	21 642,66
<b>4,30</b>	3 142,62	4 754,59	7 241,21	11 093,58	17 084,86	26 434,84
<b>4,40</b>	3 652,99	5 581,37	8 584,85	13 283,17	20 661,42	32 288,66
<b>4,50</b>	4 246,03	6 551,70	10 177,61	15 904,83	24 986,78	39 439,28
<b>4,60</b>	4 935,10	7 690,49	12 065,66	19 043,76	30 217,66	48 173,89
<b>4,70</b>	5 735,75	9 026,95	14 303,71	22 801,97	36 543,53	58 843,20
<b>4,80</b>	6 666,03	10 595,38	16 956,59	27 301,56	44 193,48	71 875,54
<b>4,90</b>	7 746,90	12 436,01	20 101,16	32 688,73	53 444,52	87 794,01
<b>5,00</b>	9 002,75	14 596,06	23 828,51	39 138,47	64 631,60	
<b>5,10</b>	10 461,88	17 130,95	28 246,60	46 860,29	78 159,76	
<b>5,20</b>	12 157,17	20 105,70	33 483,42	56 105,02	94 518,73	
<b>5,30</b>	14 126,85	23 596,61	39 690,63	67 172,93		
<b>5,40</b>	16 415,32	27 693,24	47 048,06	80 423,56		
<b>5,50</b>	19 074,16	32 500,69	55 768,80	96 287,31		
<b>5,60</b>	22 163,32	38 142,27	66 105,49			
<b>5,70</b>	25 752,43	44 762,72	78 357,55			
<b>5,80</b>	29 922,39	52 531,89	92 879,89			
<b>5,90</b>	34 767,22	61 649,08				
<b>6,00</b>	40 396,14	72 348,20				
<b>6,10</b>	46 936,03	84 903,73				
<b>6,20</b>	54 534,32	99 637,79				
<b>6,30</b>	63 362,31					
<b>6,40</b>	73 619,00					
<b>6,50</b>	85 535,61					
<b>6,60</b>	99 380,75					