

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный университет  
промышленных технологий и дизайна»

На правах рукописи

Аль–Абу Джаиаш Кусаи Махди Хамдиан



**АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ЗАХВАТА И ПОДАЧИ ТЕКСТИЛЬНЫХ  
МАТЕРИАЛОВ ВАКУУМНЫМИ ЗАХВАТНЫМИ ОРГАНАМИ МАШИН  
ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**

Специальность 2.5.21. – Машины, агрегаты и технологические процессы  
(технические науки)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук, доцент  
Усов Алексей Георгиевич

Санкт-Петербург

2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА 1. ОБЗОР ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ ОБ АВТОМАТИЗИРОВАННОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЛОСКУТОВ ТКАНИ И ИХ ФОРМАХ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ.....</b>	<b>10</b>
1.1. Основные проблемы манипулирования текстильными изделиями.....	10
1.2. Автоматизация манипуляций с текстильными изделиями в швейном производстве.....	12
1.3. Захватные устройства для перемещения текстильных деталей.....	21
1.4. Вакуумные хватные устройства.....	23
1.5. Примеры решения проблемы отделения верхнего листа от пакета .....	27
1.6. Моделирование форм деформированных текстильных лоскутов.....	31
1.7. Модель лоскута ткани на основе теории упругих оболочек .....	34
1.7.1. Основные методы теории оболочек .....	34
1.7.2 Геометрия срединной поверхности изогнутого лоскута .....	35
1.7.3. Механика лоскута как упругой оболочки .....	42
1.8. Оптимизационный метод решения задачи о форме захваченного лоскута.....	45
1.9. Постановка цели и задач исследования .....	48
<b>ГЛАВА 2. ПРАКТИКА ЗАХВАТА И УКЛАДКИ ЛОСКУТОВ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМ ЗАХВАЧЕННЫХ ЛОСКУТОВ.....</b>	<b>50</b>
2.1. Типичные виды захватов и форм деформации удерживаемых ими лоскутов.....	50
2.2. Эксперименты по захвату лоскута вакуумной воронкой.....	53

<b>2.3. Исследование конической формы лоскута, захваченного вакуумной воронкой.....</b>	<b>68</b>
<b>2.3.1. Построение конической срединной поверхности лоскута.....</b>	<b>68</b>
<b>2.3.2. Основные принципы моделирования конической поверхности ....</b>	<b>73</b>
<b>2.3.3. Состояние материала лоскута в области конической вершины.....</b>	<b>75</b>
<b>2.3.4. Потенциальная энергия лоскута как упругой тяжелой оболочки .</b>	<b>79</b>
<b>2.4. Исследование формы изгиба лоскута, захваченного плоским вакуумным захватом .....</b>	<b>81</b>
<b>2.4.1. Опыты по захвату лоскутов драпа плоской прямоугольной воронкой.....</b>	<b>81</b>
<b>2.4.2. Опыты по захвату лоскутов драпа плоской круглой воронкой.....</b>	<b>84</b>
<b>2.4.3. Комбинированный изгиб лоскута .....</b>	<b>86</b>
<b>2.4.4. Моделирование торсовых и цилиндрических форм изгиба лоскута .....</b>	<b>93</b>
<b>2.5. Выводы по главе 2 .....</b>	<b>95</b>
<b>ГЛАВА 3. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ЛОСКУТОВ ТКАНИ, ПЕРЕМЕЩАЕМЫХ ЗАХВАТАМИ.....</b>	<b>96</b>
<b>3.1. Симметричная модель изгиба круглого лоскута, захваченного вакуумной воронкой.....</b>	<b>96</b>
<b>3.2. Симметричная модель изгиба прямоугольного лоскута, захваченного вакуумной воронкой.....</b>	<b>108</b>
<b>3.3. Моделирование формы асимметричного конического изгиба анизотропного лоскута.....</b>	<b>113</b>
<b>3.4. Моделирование сложного конического изгиба лоскута драпа.....</b>	<b>118</b>
<b>3.4.1. Обработка эскиза края лоскута .....</b>	<b>118</b>
<b>3.4.2. Модель имитации захвата лоскута вакуумной воронкой .....</b>	<b>121</b>

<b>3.5. Моделирование формы лоскута, захваченного плоским сетчатым захватом.....</b>	<b>125</b>
<b>3.6. Моделирование изгиба свешивающихся частей лоскута, удерживаемого плоским захватом.....</b>	<b>129</b>
<b>3.7 Выводы по главе 3 .....</b>	<b>135</b>
<b>ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ЗАХВАТА, ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И УКЛАДКИ ЛОСКУТОВ ТКАНИ ВАКУУМНЫМИ ЗАХВАТНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ.....</b>	<b>136</b>
<b>4.1. Применение простейших моделей деформированных лоскутов для изучения их статики и динамики.....</b>	<b>136</b>
<b>4.2. Расчет прижимающей и подъёмной силы при захвате лоскута со стола .....</b>	<b>146</b>
<b>4.3. Взаимодействие лоскута с воронкой .....</b>	<b>153</b>
<b>4.4. Направления решения проблемы захвата верхнего лоскута из стопки .....</b>	<b>154</b>
<b>4.5. Расчет драпируемости на основе модели комбинированного изгиба круглого лоскута .....</b>	<b>158</b>
<b>4.6. Применение моделей цилиндрического изгиба лоскутов для определения их изгибной жесткости .....</b>	<b>160</b>
<b>4.7 Выводы по главе 4 .....</b>	<b>161</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>162</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>164</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ .....</b>	<b>177</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** В современном производстве текстильной и легкой промышленности большое количество технологических операций связано с перемещением листового материала, как правило, представленного в виде деталей кроя из ткани, кожи, обувного картона и т.п. Чаще всего указанные операции осуществляются оператором вручную. Для повышения производительности работы оборудования, улучшения качества выпускаемой продукции требуется автоматизация процессов захвата, отделения гибких листовых деталей из стопки, перемещения их в пространстве и размещения листовых материалов в зоне обработки. Большое значение имеют также задачи автоматизации складирования готовых изделий, удаление отходов, представленных гибкими листовыми материалами. Автоматизация подобных технологических операций связана с необходимостью решения задач моделирования захвата и подачи гибкого листового материала, определения формы захваченного гибкого листа в пространстве, его укладки на рабочем столе.

Текстильный лоскут как механическая система является оболочкой. Для исследования деформаций листов, как правило, используют математические модели оболочек, основанные на некоторых априорных представлениях (гипотезах) о поведении структурных элементов оболочки. Чаще всего математические модели деформаций листов имеют вид системы нелинейных дифференциальных уравнений. Их численное решение является сложной и трудоемкой задачей и осложняется необходимостью выполнения дополнительных условий (неразрывность и нерастяжимость срединной поверхности, отсутствие ее самопересечений и др.). Математическое моделирование формы гибкого листового материала может быть осуществлено без использования трудоемких операций, связанных с решением дифференциальных уравнений, описывающих оболочку. Например, применение оптимизационного метода моделирования формы гибкого листового материала, основанного на поиске экстремума целевой функции, позволяет сократить трудо-

емкость вычислений, что особенно важно в задачах управления рабочими органами автоматизированных устройств, в том числе в режиме реального времени.

Исходя из сказанного, разработка методов моделирования формы гибких листовых материалов, используемых в производствах текстильной и легкой промышленности, применительно к задачам разработки захватных устройств при проектировании автоматизированных рабочих мест, оснащенных устройствами подачи, перемещения в пространстве и размещения в зоне обработки деталей края представляется важной и актуальной.

**Цель и задачи работы.** Цель диссертации – разработка методики, математических моделей и алгоритмов для решения задач по определению форм текстильных лоскутов, захватываемых вакуумными захватными устройствами.

В работе решаются следующие задачи.

1. Анализ устройств, работающих с деформирующимися текстильными листовыми материалами, в частности, в швейном производстве. Изучение вакуумных устройств для захвата и перемещения таких материалов.

2. Экспериментальное исследование процессов захвата и сброса текстильных лоскутов вакуумными воронками различных диаметров и плоскими захватами с отверстиями.

3. Разработка методики, математического, алгоритмического и программного обеспечения для поиска оптимальной конической формы изгиба изотропного или анизотропного текстильного лоскута произвольной формы, втянутого в вакуумную воронку.

4. Разработка алгоритмов и программ для ЭВМ поиска оптимальной формы сложного конического изгиба лоскута со множеством соприкасающихся складок.

5. Разработка методов моделирования срединной поверхности комбинированного типа, соответствующего лоскуту, захваченному плоским вакуумным захватом с отверстиями.

6. Разработка математических моделей и алгоритмов для поиска оптимальной формы торсового или цилиндрического изгиба краев лоскута, удерживаемого плоским захватом.

7. Разработка математических моделей приближенных форм изгиба с целью изучения динамики сброшенного из захвата лоскута.

8. Разработка инженерных рекомендаций для расчета подъемной силы вакуумного захвата и для исследования взаимодействия его с воронкой с воронкой.

9. Разработка инженерных рекомендаций для определения коэффициента драпируемости текстильного материала и его изгибной жесткости.

**Методы исследований.** При выполнении диссертационной работы использованы методы линейной алгебры, математического анализа, дифференциальной геометрии, механики, теории оболочек, нелинейного программирования, компьютерного моделирования в среде компьютерной математики MATLAB.

**Соответствие диссертационной работы Паспорту научной специальности.** Диссертационная работа выполнена в рамках Паспорта научной специальности 2.5.21 – Машины, агрегаты и технологические процессы ВАК Министерства науки и высшего образования РФ и соответствует следующим его пунктам.

1. Разработка научных и методологических основ, технических и технологических требований к проектированию и созданию новых машин, агрегатов и технологических процессов.

2. Разработка и исследование технологических процессов механизации производства в соответствии с современными и перспективными требованиями, технологиями, качества и надежности, промышленной и экологической безопасности.

4. Исследования параметров машин и агрегатов и их взаимосвязей при комплексной механизации основных и вспомогательных процессов и операций с использованием моделирования, численных и физических экспериментов.

**Научная новизна.** Новизна диссертационной работы заключается в том, что:

– выполнены исследования геометрических свойств торсовой и конической развертывающихся поверхностей применительно к моделированию изгиба текстильных лоскутов;

– разработаны математические модели для исследования конического изгиба текстильного лоскута произвольной формы, а также сложного конического изгиба со множеством складок;

– разработаны методы и алгоритмы для компьютерной обработки изображения развертки лоскута произвольной формы;

– разработаны методы и алгоритмы для компьютерного моделирования конической поверхности втянутого в воронку лоскута по эскизу его края;

– предложен метод исследования взаимодействия вакуумной воронки с захваченным лоскутом.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Теоретическая значимость выполненных в диссертационной работе исследований заключается в том, что разработаны методы проектирования оптимальных форм изгиба упругих тяжелых текстильных лоскутов, помещенных в вакуумные захваты. Срединная поверхность лоскута проектируется в виде многогранной поверхности, деформация которой описывается на основе матричных преобразований.

Выполнено обобщение результатов экспериментов по захвату текстильных лоскутов вакуумными захватами. Предложены способы моделирования сложных форм изгиба захваченных лоскутов путем расчета потенциальной энергии многогранной модели изогнутого листа. Сформулированы критерии оптимальности моделей изогнутых листов для разных случаев их захватов с учетом неразрывности, нерастяжимости и отсутствия самопересечений моделируемых поверхностей. Исследованы формы срединной поверхности листа в различных случаях его захвата и влияние способа захвата листа на форму его изгиба.

Практическая значимость работы заключается в том, что:

1) разработаны алгоритмы и пакеты программ для ЭВМ, позволяющие моделировать изгиб текстильных лоскутов, помещенных в вакуумные захваты разных видов;



2) разработанные программы могут быть использованы для проектирования автоматизированных устройств, перемещающих текстильные материалы с помощью вакуумных захватов;

3) созданы алгоритмы и компьютерные программы для решения специальных задач компьютерной геометрии применительно к цифровой обработке изображений лоскутов;

4) предложены способы компьютерного расчета коэффициента драпируемости и изгибной жесткости текстильного материала.

Разработанные в результате выполненных исследований компьютерные программы моделирования сложных форм изгиба упругих тяжелых листов, захваченных вакуумной воронкой, защищены двумя свидетельствами о государственной регистрации программ № 2022663202 от 13.07.2022 и № 2023614188 от 14.02.2023.

Материалы диссертации используются для выполнения научно-исследовательских работ и в учебном процессе в Санкт-Петербургском государственном университете промышленных технологий и дизайна при подготовке бакалавров и магистров по специальностям 15.03.02, 15.04.02 – «Технологические машины и оборудование», бакалавров по специальностям 29.03.01 – «Технология изделий легкой промышленности», 29.03.02 – «Технология и проектирование текстильных изделий», 29.03.05 – «Конструирование изделий легкой промышленности».

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка использованных источников из 116 наименований. Работа выполнена на 178 страницах, включая 140 рисунков и 3 таблицы.

# **ГЛАВА 1. ОБЗОР ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ ОБ АВТОМАТИЗИРОВАННОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЛОСКУТОВ ТКАНИ И ИХ ФОРМАХ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ**

## **1.1. Основные проблемы манипулирования текстильными изделиями**

Автоматизация производства включает различные манипуляции с текстильными деталями, предназначенными для пошива разных изделий, с одеждой, с крупными полотнами и отдельными лоскутами. Типичный процесс манипулирования с текстильным образцом состоит из захвата образца, его перемещения и укладки на некоторую поверхность или сброса.

Захват может происходить с гладкой или шероховатой опорной поверхности, или из пакета с деталями. Это может быть захват всего изделия или его части. В процессе перемещения изделия захватные устройства могут придавать ему требуемую форму. Сброс лоскута может происходить в произвольном положении в бункер, а при укладке требуется отслеживать его форму и положение в пространстве.

Для захвата образцов текстиля применяются механические, пневматические и электростатические захватные устройства. Перемещение захваченного образца может осуществляться разными транспортирующими устройствами, но наиболее универсальным средством является манипулятор. Повышение маневренности манипуляторов и их количества расширяет возможности операций с образцами, но увеличивает стоимость оборудования.

При этом возникают следующие проблемы.

- Обеспечить надежное удержание изделия в захвате.
- Обеспечить отрыв изделия от опорной поверхности.
- Если захват происходит из пакета, то нужно обеспечить захват только одного (обычно верхнего) изделия.

- Учесть при этом шероховатость поверхности текстильного образца и его воздухопроницаемость.
- Исследовать форму деформированного при захвате образца. Для этого создать механическую, математическую и компьютерную модель деформированного образца.
- Исследовать динамику процесса перемещения и сброса захваченного образца. Учесть влияние сил инерции и сил давления воздуха на его форму.
- При подаче образца пневматическими захватами исследовать потоки воздуха в его окрестности и в пневматической системе.
- Используя отчасти стандартные узлы, спроектировать требуемое оборудование. Установить датчики для организации обратной связи.
- Синтезировать систему управления устройством перемещения текстильных деталей как часть системы управления автоматизированным комплексом, выполняющим, например, пошив одежды.

Анализ такого рода проблем дан в статье [1]. Отмечается большая стоимость изделий, пошитых на автоматизированных линиях (она окупается при длительной эксплуатации техники). Требуется постоянно переобучать оборудование, чтобы оно реагировало на небольшие изменения параметров материала. Механические свойства материала зависят, например, от качества хлопка, варьирующегося от урожая к урожаю, от различия в переплетениях ткани, от красителей и т. д. Переход от одного типа одежды к другому требует более значительных изменений в программе работы автоматизированного комплекса. Проблемой является необходимость работать круглосуточно, без выходных дней, на высоких скоростях и с высоким качеством (более 98%). Сам процесс шитья сложно автоматизировать из-за податливости материала. Текстиль сминается и растягивается в процессе работы.

## 1.2. Автоматизация манипуляций с текстильными изделиями в швейном производстве

Проблема автоматизации швейного производства начала систематически решаться в 1980-х годах [2]. Было понятно, что автоматизировать удобнее всего процессы укладки и захвата швейных деталей, пришивание пуговиц, пошив простой одежды типа футболок, военных мундиров и проч. На рисунке 1.1 представлен проект автоматизированной линии по пошиву мужских костюмов.

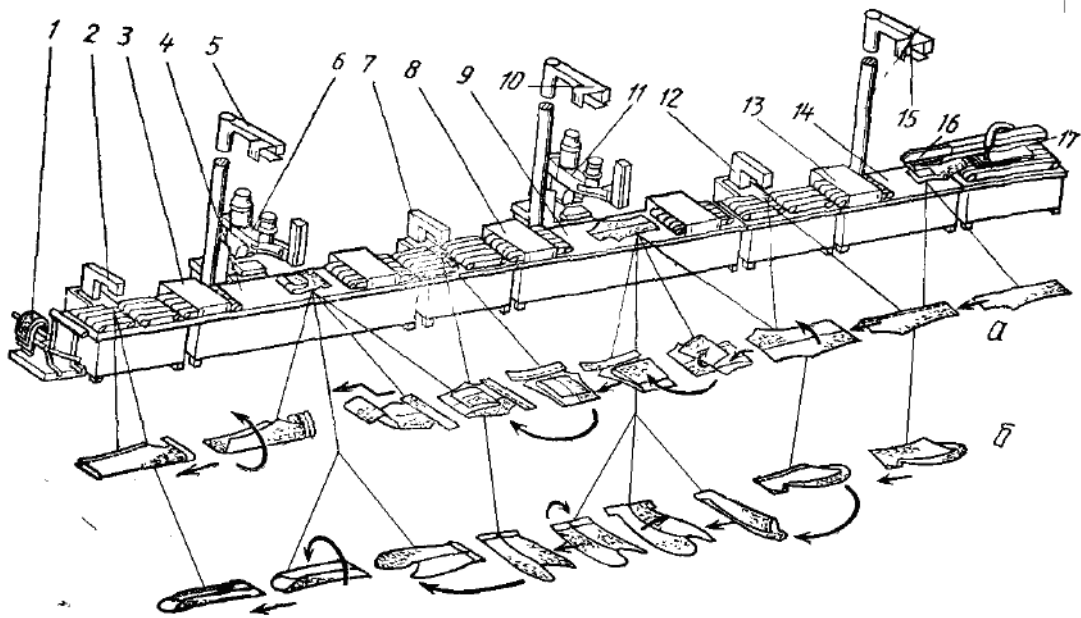


Рисунок 1.1 – Автоматизированная линия пошива костюма: брюк (а) и рукавов (б): 1 – укладчик, 2,7,12 – участки пошива, 3,8,13 – транспортирующие устройства, 6,11 – манипуляторы, 5,10,15 – распознающие модули, 16 – детали костюма, 17 – загрузочный модуль

В настоящее время такие проекты реализованы компаниями PFAFF Industriessysteme und Maschinen GmbH, Sewbo, Softwear Automation Inc., ROKAE и другими. Приведем некоторые примеры.

Компания SoftWear Automation, сотрудничающая с Агентством перспективных оборонных исследовательских проектов (DARPA), разработала автоматизированные линии для пошива военных мундиров, футболок и джинсов. Роботизированные швейные устройства, выпускаемые компанией SoftWear, называются «Sewbots». Макет линии для пошива мундиров [3] представлен на рисунке 1.2.

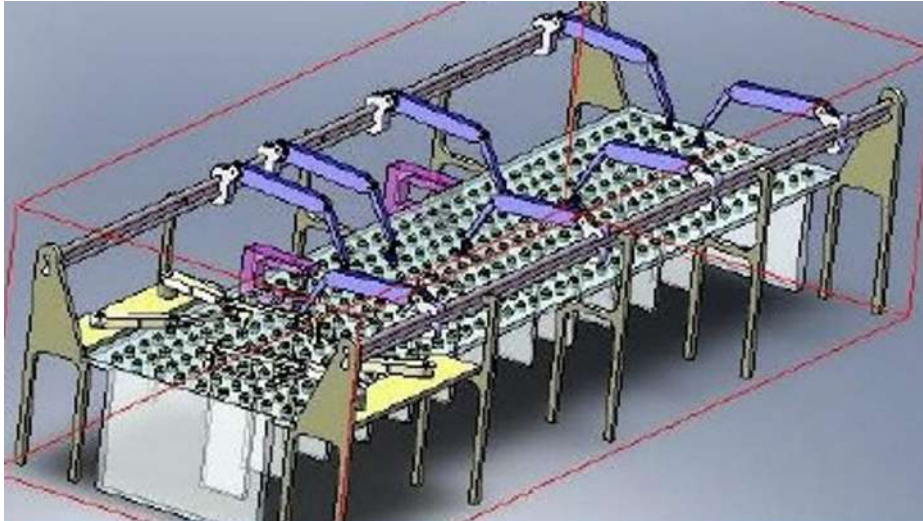


Рисунок 1.2 – Автоматизированная линия пошива мундиров

Автоматизированная линия Lowgy для пошива футболок [4] производит за 8-часовой рабочий день до 1 142 футболок, что в 17 раз больше, чем может сделать швея. Сейчас линия Lowgy состоит из сложных рабочих столов, по которым вакуумными вращающимися присосами перемещаются фрагменты футболки от одной швейной головки к другой. Ткань разрезается на части рубашки: передняя часть, спина, рукава. Они загружаются на рабочий стол, по которому вакуумная система перемещает материал. Камеры отслеживают лоскуты во время перемещения и шитья, внося коррективы в программу пошива одежды. Камеры и компьютер обрабатывают более 1000 кадров в секунду. Создан набор алгоритмов обработки изображений для определения положения лоскутов и нитей. В рекламном видео [5] показаны этапы работы линии пошива футболок (рисунок 1.3).

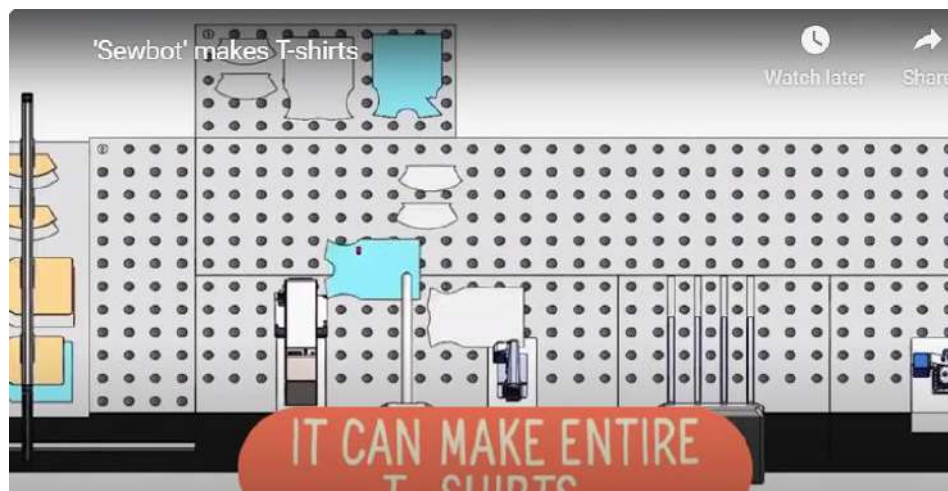


Рисунок 1.3 - Схема перемещения частей футболки по рабочему столу

Заметим, что сшиваемые детали остаются плоскими. Для их перемещения по рабочему столу используются устройства, аналогичные описанному в патенте [6]. Детали перемещаются с помощью вращающегося барабана с отверстиями (рисунок 1.4), внутри которого создается вакуум.

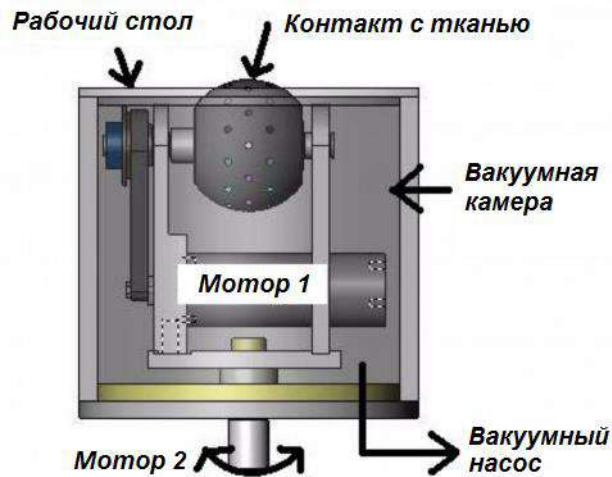


Рисунок 1.4 – Подающее устройство

Компания SEWBO разрабатывает способ пошива изделий из ткани, подвергающейся специальной обработке [7]. Ткань пропитывается раствором, делающим ее жесткой. Куски нарезанной ткани изгибаются и в изогнутом виде сшиваются (рисунок 1.5). После промывки и высушивания изделие возвращает свои обычные качества.

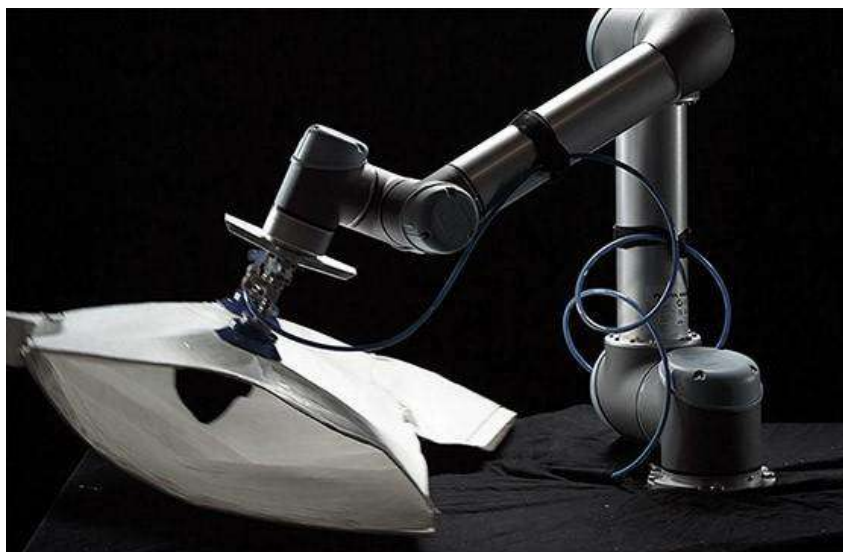


Рисунок 1.5 – Швейный робот обрабатывает отвердевшую одежду

В рекламном ролике [8] демонстрируется автоматизированная операция подачи заготовок для мягких тапочек с помощью вакуумного захвата (рисунок 1.6).



Рисунок 1.6 – Вакуумная подача деталей для мягких тапочек

Компания Vorster привлекает манипуляторы Brother для роботизированного пошива подушек безопасности. Робот использует пневматические присоски (рисунок 1.7) для подъема швейных шаблонов [9].

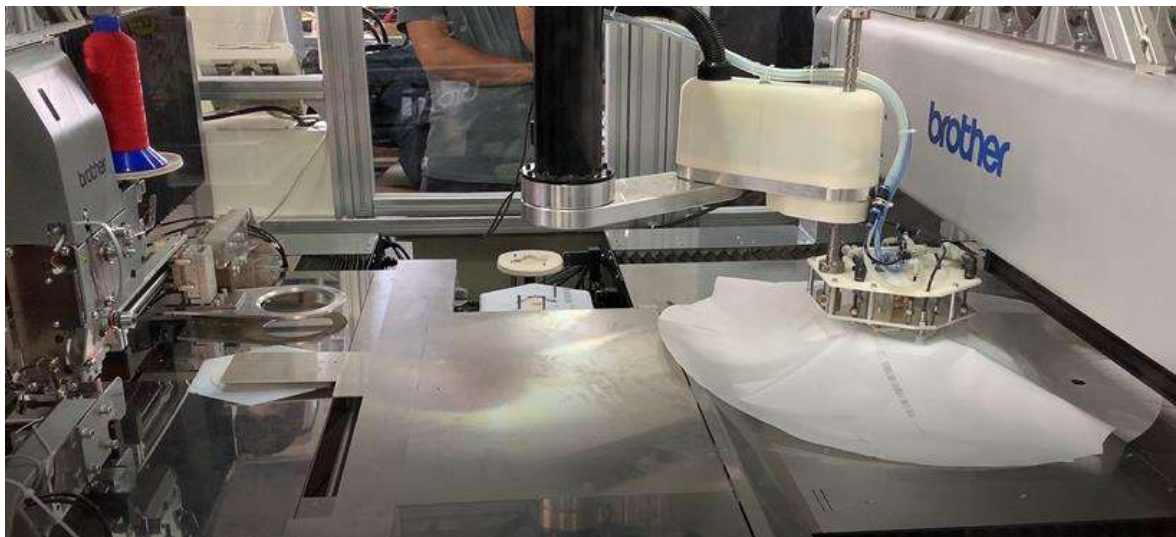


Рисунок 1.7 - При вакуумном подъеме манипулятором Brother шаблона видны характерные складки материала

В работе [10] исследуется совместная система мобильных роботов и манипуляторов (Co-MRMS) для транспортировки и укладки полотен, из которых изготавливают композитные материалы, которая в основном состоит из мобильного робота, стационарного манипулятора и подсистемы машинного зрения. На основе маркеров и преобразования Фурье исследуется полученная с помощью машинно-

го зрения картина ориентации волокон. Для моделирования деформации материала во время манипулирования (рисунок 1.8) используется метод частиц. Представленный подход обеспечивает высокую точность локализации (среднеквадратичная ошибка составляет 4,04 мм) и определение ориентации волокна (ошибка составляет  $1,84^\circ$ ).

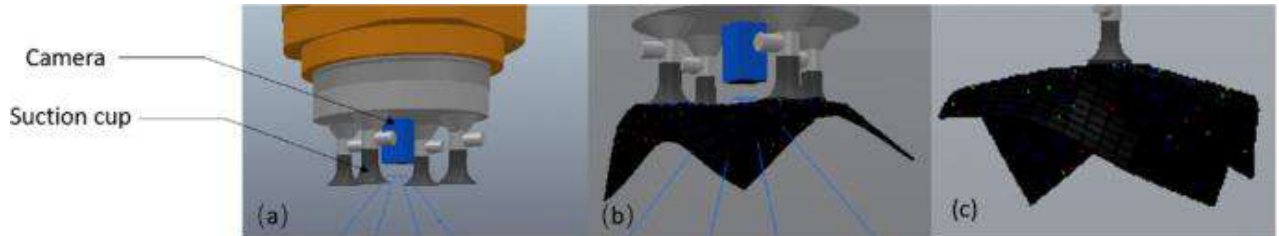


Рисунок 1.8 - Транспортировка и укладка волокнистых слоев для композита

Отметим, что лоскут, изображенный на рисунке 1.8, имеет характерную форму накидки (скатерти) с четырьмя складками (фолдами) или конуса также с четырьмя складками. Такую же форму имеет лоскут, захваченный обметывающим роботом (рисунок 1.9), представленным на сайте Southeastern Technology [11].



Рисунок 1.9 – Обметывающий робот

Проблемы перемещения лоскутов вакуумными захватами разбираются в статье [12]. Акцентируется внимание на проблемах, связанных с расчетом форм захваченных лоскутов (рисунок 1.10).



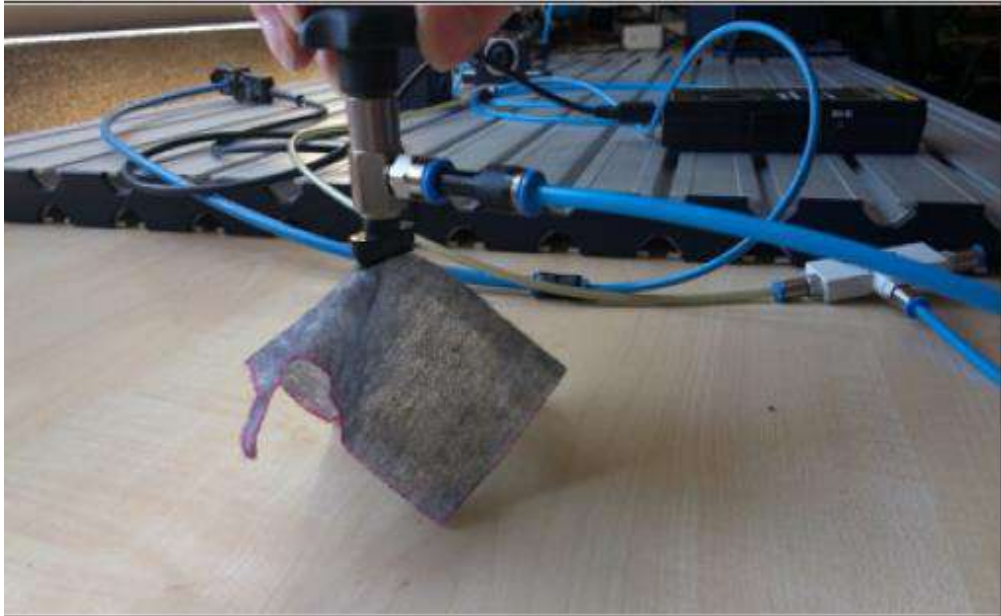


Рисунок 1.10 – Захват лоскута вакуумной воронкой

Захват и перемещение отдельных текстильных деталей может осуществляться манипуляторами относительно простой конструкции. Кинематическая схема типичного швейного манипулятора [13] изображена на рисунке 1.11. Манипулятор может иметь 3 или 4 степени свободы (в случае выдвигающейся «руки», обозначенной как arm). Захват относительно «руки» имеет обычно 2 или 3 степени свободы.

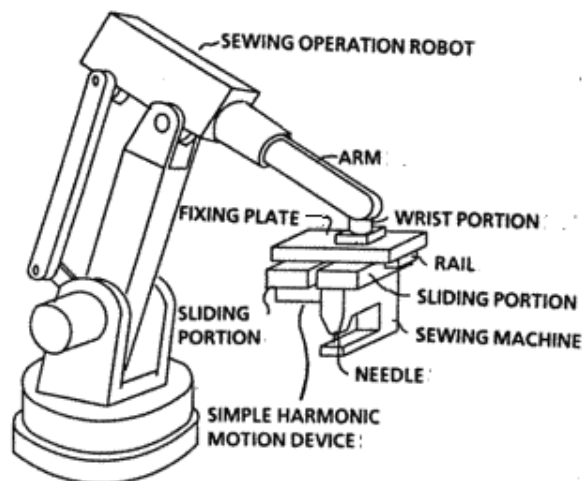


Рисунок 1.11 - Схема швейного робота-манипулятора

Для совершения более сложных действий, например раскладывания или складывания одежды требуются более совершенные манипуляторы, и при этом несколько. В статье [14] предлагается метод обучения двурукого робота Baxter разворачиванию и сворачиванию одежды (рисунок 1.12). Описывается алгоритм

распознавания вида сложенной одежды путем сравнения ее с целевой моделью укладки, рассчитываемой на основе теории тонкой оболочки. Определяются точки захвата и траектории их в процессе раскладки одежды. Используется так называемый метод нежесткой регистрации. В его основе – минимизация разницы энергий исходной и целевой моделей. Приведены результаты экспериментов по распознаванию одежды, ее перехвату и укладке на стол в нужной конфигурации.



Рисунок 1.12 – Робот Бахтер складывает брюки

Демонстрация складывание одежды двуруким роботом-манипулятором (рисунок 1.13) представлена на видео с сайта CloPeMa CERTH [15]. Подход к распознаванию складок одежды назван чисто геометрическим.



Рисунок 1.13 – Двурукий робот складывает одежду

В статье [16] рассматривается технология складывания одежды (брюк, свитеров, рубашек) с помощью робота Willow Garage PR2. По заданной конфигурации сложенного продукта определяется число рук манипулятора, последовательность и геометрия их движений.

В работе [17] рассматриваются алгоритмы распознавания и разворачивания сложенных лоскутов типа полотенце (рисунок 1.14).



Рисунок 1.14 – Складывание полотенце

В статье [18] предложены алгоритмы решения двух задач по раскладыванию сложенной одежды. Первая задача – задача о раскладывании распознанной верхней складки методом так называемых опорных векторов. Вторая задача – задача о распрямления одежды путем подвеса ее за две точки так, чтобы получить наибольшую площадь плоской части развернутого лоскута.

Раскладывание одежды — это подготовительная задача для выполнения различных работ, таких как глажка, складывание, шитье, развешивание и хранение одежды. Появляющиеся при этом трудности связаны с податливой природой предметов одежды, что приводит к бесконечному количеству возможных конфигураций, требующих раскладывания. Более того, их конфигурация меняется во время манипулирования, что создает трудности в распознавании их состояния и прогнозировании эффекта манипулирования.

Для таких действий, как раскладывание одежды, применяются более сложные манипуляторы, например манипулятор VGC10 [19], представленный на сайте tuliptechs.com (рисунок 1.15).

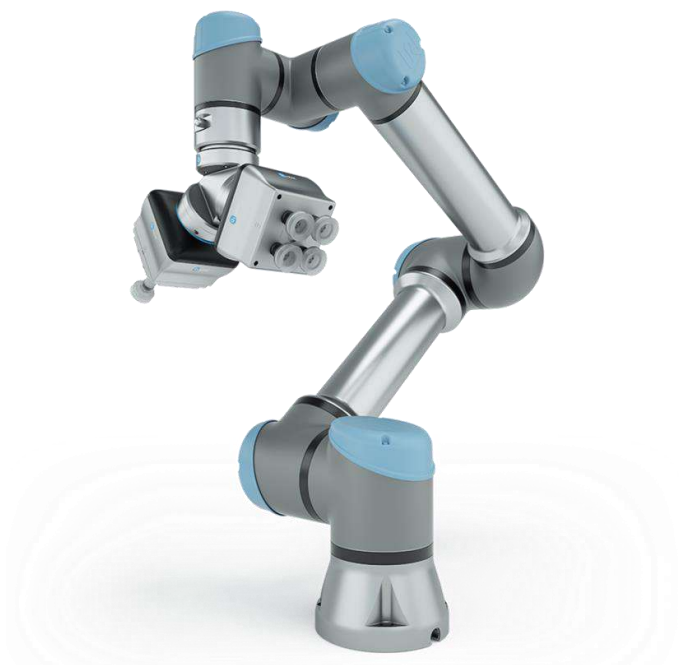


Рисунок 1.15 – Робот-манипулятор VGC10

Успех манипуляций при раскладывании одежды во многом зависит от сенсоров, которыми оборудован робот. Обзор сенсоров, применяемых при роботизированных манипуляциях с текстильными материалами, приведен в статье [20].

В ряде технологий захваченному лоскуту надо придать специальную форму, которую можно создать захватом с несколькими вакуумными воронками. Примеры таких технических решений (рисунок 1.16) описаны в работе [21].

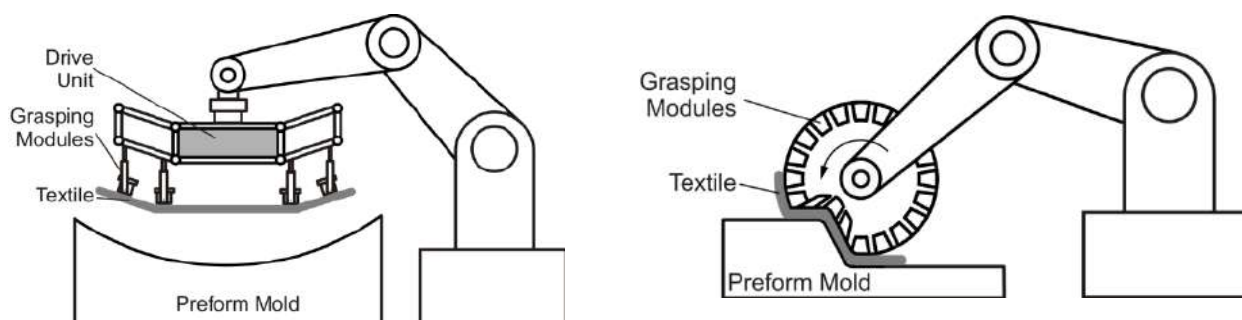


Рисунок 1.16 – Драпировка текстиля захватом с несколькими воронками

В статье [22] описывается построение стратегий роботизированного шитья при наличии датчиков обратной связи или без них. Роботизированное шитье осложняется различными режимами изгиба материала, а также ухудшением качества шва из-за сложного сочетания сжимающих, растягивающих и сдвигающих усилий в его зоне. Упоминается важность адекватных математических моделей деформирования ткани, предсказывающих наступление изгиба при манипуляциях

лоскутами. толкании панели по поверхности, позволяет в автономном режиме планировать скользящие задачи. Приводится пример стратегии для сложной задачи пошива, которая была разработана для экспериментального много-сенсорного роботизированного устройства.

В статье [23] исследуется проблема управления в режиме реального времени швейным модулем с двумя манипуляторами. Описаны эксперименты для измерения временных задержек в различных частях системы управления, подтверждающие возможность ее работы в заявленном режиме.

### **1.3. Захватные устройства для перемещения текстильных деталей**

Типичные хватные устройства и компоновки промышленных роботов описаны, например, в [24]. Обзор всевозможных хватов для роботов и источников литературы по хватам приведен в статье [25]. Отдельно описаны хваты для текстильных изделий.

Хваты, специально предназначенные для работы с тканями, изначально предложены в 1970 - 1980-х годах [26]. В обзоре [27] описываются хваты для тканей механические, пневматические и электростатические. Отдельный обзор электростатических хватов приводится в [28].

Механические устройства хватают лоскут клещами или пинцетом или иглами. Клещевой хват описан, например, в работе [29]. Пневматические хватные устройства бывают напорные и вакуумные, в зависимости от направления потока подаваемого в хват воздуха.

Существуют струйные и вихревые напорные хваты. Струйные присосы (рисунок 1.17, а) снабжаются обтекателем, вихревые (рисунок 1.17, б) – криволинейными соплами, формирующими вихревое кольцо воздуха. Вихревые присосы обеспечивают большую подъемную силу по сравнению со струйными присосами той же мощности.

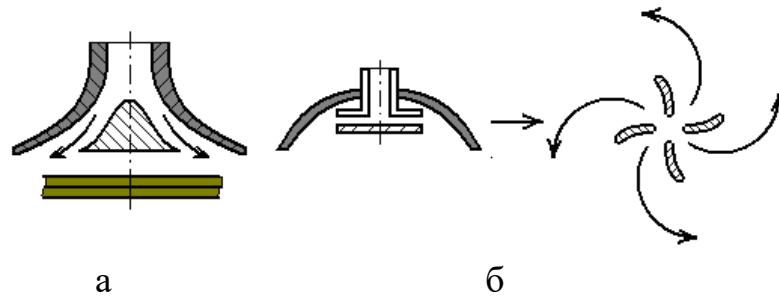


Рисунок 1.17 – Принцип работы струйного (а) и вихревого (б) захватов

Расчеты вихревого захвата приводятся в [30], [31]. Принцип работы такого захвата отображен на рисунке 1.18. Захватное устройство имеет корпус вихревой камеры цилиндрической формы, в которую через сопла, встроенные в стенки корпуса камеры под некоторым углом  $\alpha$ , подаётся под давлением воздух. Внутри камеры возникает кольцевой вихрь с пониженным давлением в центральной области и радиальный поток с избыточным давлением в зазоре между захватом и удерживаемым объектом.

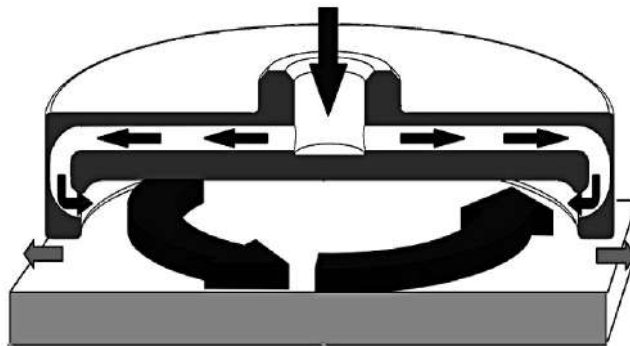


Рисунок 1.18 – Движение воздуха в корпусе вихревого захвата

Если вязкость газа проявляется только в пограничном слое, если распределение скоростей в камере, давление газа  $p(r)$  и его плотность  $\rho(r)$  зависят только от полярного радиуса  $r$  точки внутри воронки и если течение воздуха является изотермическим, то давление внутри камеры можно рассчитать по формуле:

$$p(r) = p_0 e^{-\frac{\rho \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 (R^2 - r^2)}{2p_0}},$$

где  $R$  – радиус камеры,  $p_0$  – атмосферное давление,  $v_0$  – линейная скорость частиц воздуха у стенки камеры:

$$v(r) = \omega r = \frac{v_0 r}{R}.$$

Здесь  $\omega$  – угловая скорость потока воздуха в вихре.

Подъемная сила захвата может быть рассчитана по формуле:

$$F = \int_0^R \left( e^{-\frac{\rho_R \omega^2 R^2}{2p_R}} - p_0 \right) r dr,$$

где  $\rho_R$  и  $p_R$  - плотность и давление воздуха у внутренней стенки камеры.

#### 1.4. Вакуумные захватные устройства

Вакуумные захваты бывают насосными и безнасосными. Ввиду значительной шероховатости поверхности текстильных материалов и их фильтрующей способности безнасосные захваты не применяются. Разрежение в насосных захватах вакуум создается насосом, вентилятором, воздуходувкой и другими способами. Сам захват текстильного лоскута выполняется вакуумной воронкой. Воронка может быть жесткой или деформируемой. Деформируемые воронки бывают металлические, пластмассовые или составленные из отдельных фрагментов, например, в стиле фигур оригами. Жесткие воронки обычно представляют собой тела вращения, у которых радиус изменяется в зависимости от высоты.

Подъемная сила, действующая на лоскут со стороны воронки, пропорциональна перепаду давлений (вакууму), созданному внутри воронки. Этот вакуум ослабляется из-за шероховатости поверхности лоскута и его воздухопроницаемости.

Если край воронки, примыкающий к лоскуту, имеет малую толщину, то неровность профиля примыкания лоскута можно описать одномерными характеристиками шероховатостей [32]. Основные характеристики – это среднее отклонение  $R_a$  профиля в нормальном сечении от его средней линии и высота неровностей профиля  $R_z$ , которая рассчитывается как среднее расстояние между пятью высшими и пятью низшими точками профиля на отрезке заданной длины.

Воздухопроницаемость выражается в том, что воздух движется в узких извилистых каналах сквозь ткань, провоцируя возникновение трения о стенки кана-

лов. Это явление называется также фильтрацией. При скоростях потока воздуха, значительно меньших скорости звука, скорость его фильтрации сквозь ткань пропорциональна перепаду давлений  $\Delta p$  с двух сторон лоскута и может быть найдена по модифицированной формуле Вейсбаха-Дарси [33]:

$$v_{\Phi} = \Delta p \frac{1}{80\mu} \frac{d_{II}^2 R_s}{h}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости воздуха (при температуре 20°C его величина  $\mu = 18,1 \cdot 10^{-6}$  Па·с),  $d_{II}$  – диаметр сквозных пор,  $R_s$  – сквозная пористость ткани,  $h$  – толщина ткани. Сквозная пористость  $R_s$  в случае полотняного переплетения может быть выражена через произведения диаметров нитей утка  $d_y$  и нитей основы  $d_o$  на соответствующие плотности  $\Pi_y$  и  $\Pi_o$  этих нитей. Плотность нитей рассчитывается как количество нитей на 10 см длины вдоль утка или основы. Воздухопроницаемость может быть оценена путем исследования фотоснимков ткани, полученных с помощью электронного сканирующего микроскопа.

Шероховатость и воздухопроницаемость лоскута определяют качество вакуума в каналах внутри материала и в зазорах между краем воронку и лоскутом. Это качество определяется критерием Кнудсена [34]:

$$Kn = \frac{L_{СП} \cdot F}{4V}, \quad (1.2)$$

где  $L_{СП}$  – средняя длина свободного пробега молекул газа,  $F$  – площадь поверхности камеры, соприкасающейся с разреженным газом,  $V$  – объем камеры.

При  $Kn \leq 5 \cdot 10^{-3}$  имеем низкий вакуум, при  $5 \cdot 10^{-3} < Kn < 1,5$  – средний вакуум, при  $Kn \geq 1,5$  – высокий. Критерий Кнудсена вместе с числом Рейнольдса  $Re$  определяют режим течения газа: инерционный с уравнениями Навье – Стокса, молекулярно-вязкостный или молекулярный. Для фильтрации воздуха сквозь ткань характерно молекулярное течение, когда силами внутреннего трения можно пренебречь. Расчет потоков молекул сквозь каналы зависит от вида каналов: тру-



бопроводы или отверстия. Отверстие – это канал, диаметр которого в 100 и более раз превышает его длину. Листы, уложенные в пакет, подобны воздушному фильтру. Работа воздушных фильтров описана в [35].

Движение воздуха в зазоре между вакуумной воронкой и захваченной деталью исследовано в работе [36]. Математическая модель движения воздуха в радиальном интервале между взаимодействующими поверхностями захвата и листа основана на усредненных уравнениях Навье - Стокса, записанных для модели ламинарно-турбулентного перехода [37]. Уравнения решаются методом конечных элементов.

Пока воронка приближается к листу, движение воздуха в зазоре между ее краем и листом описывается классическими уравнениями аэродинамики [38]. При величине зазора  $h_0$  оптимальная форма тела воронки задается уравнением  $z(r) = ar^{-1/k} + h_0$ . Параметры  $a$  и  $k$  задают форму воронки. Сила присасывания  $F$  рассчитывается по формуле

$$F = \frac{\rho Q^2}{4\pi h_0^2} \left[ k \left( \ln \frac{h_0 r_{\text{ПР}}^{1/k} + a}{h_0 r_{\text{ОТВ}}^{1/k} + a} + \frac{a}{h_0 r_{\text{ПР}}^{1/k} + a} - \frac{a}{h_0 r_{\text{ОТВ}}^{1/k} + a} \right) + \frac{h_0^2 r_{\text{ОТВ}}^{2/k}}{2(h_0 r_{\text{ПР}}^{1/k} + a)^2} \right].$$

Здесь  $\rho$  – плотность воздуха,  $Q$  – объемный расход воздуха,  $r_{\text{ПР}}$  – внутренний радиус подошвы присоса,  $r_{\text{ОТВ}}$  – радиус входного отверстия присоса.

Когда воронка прикасается к листу, расход воздуха рассчитывается при условии его молекулярного течения сквозь каналы. Чаще всего эти каналы имеют треугольное сечение [39].

Для захвата пористых материалов можно использовать прием, используемый для захвата перфорированных листов [24] (рисунок 1.19). Когда вакуумная камера 1 прижимается к листу 2, давление в ней понижается. Поток воздуха сквозь отверстие в листе и сквозь зазор между листом и пластиной 3 на пружинных опорах 4 увеличивается. Давление в зазоре падает, и пластина прилипает к объекту, закрывая отверстие.

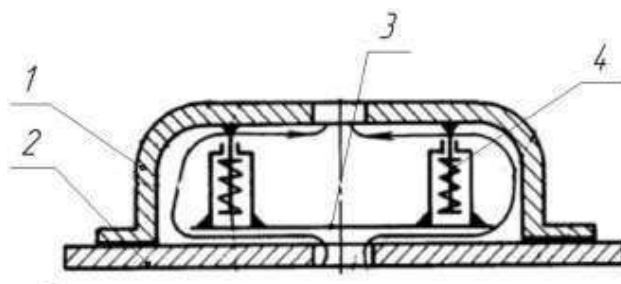


Рисунок 1.19 – Вакуумная воронка для захвата листа с отверстиями

Комбинированный вакуумный захват для многослойных текстильных настилов описан в студенческом докладе А. Т. Ито на тему «Design of a Vacuum Picker For Automated Handling of Textiles», опубликованном в 1987 году в учебном заведении M.I.T.B.S. Захват (рисунок 1.20) состоит из двух полостей. Отделяющий верхний лист поток воздуха переходит в вакуумный удерживающий поток.

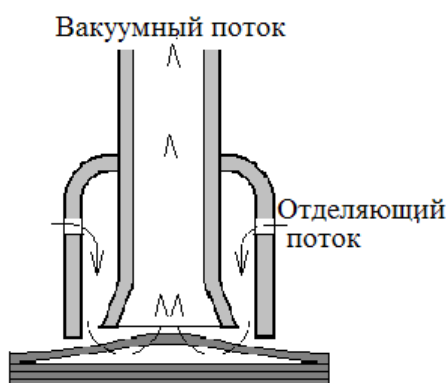


Рисунок 1.20 - Комбинированный вакуумный захват

Комбинированные захваты для кож, работающие как вакуумные и как струйные, исследованы в [40], [41]. Течение воздуха сквозь кожу оказывается ламинарным. Для расчета расхода воздуха сквозь деталь построены выражения, полученные из формулы Дарси с использованием коэффициента воздухопроницаемости кож.

Отрыв лоскута ткани от гладкой поверхности - отдельная проблема. На рисунке 1.21 изображены этапы захвата лоскута драпа вакуумной воронкой. Захват происходит после образования складок (флейт), через которые поступает воздух. При образовании складок лоскут испытывает сложную деформацию, включающую изгиб и растяжение.

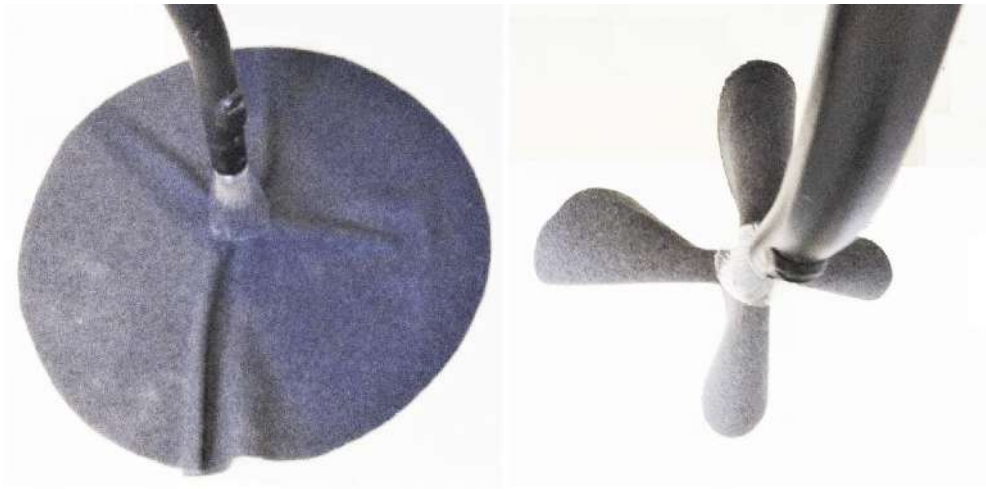


Рисунок 1.21 – Захват лоскута драпа с гладкой поверхности

### 1.5. Примеры решения проблемы отделения верхнего листа от пакета

Один из способов захвата листа (в том числе из пакета) – создание области выпучивания, в которую входит захват [42]. Идея этого метода продемонстрирована на рисунке 1.22.

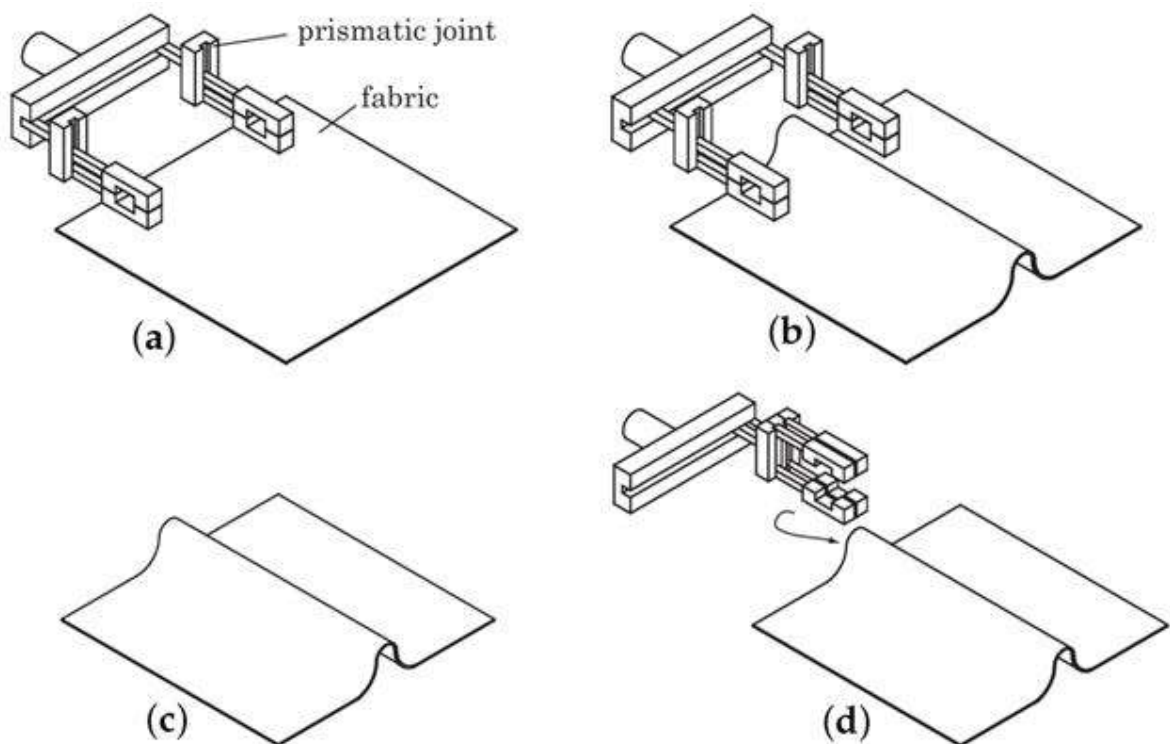


Рисунок 1.22 - Стратегия защемления ткани. (a) Используя захваты, роботизированная рука нажимает на край ткани; (b) Рука перемещает захваты, чтобы сморщить ткань; (c) Рука движется вверх по ткани; (d) Захваты защемляют край ткани.

Существует множество устройств для захвата верхнего листа вакуумными захватами путем создания одной или нескольких областей выпучивания (см., например, рисунок 1.23).

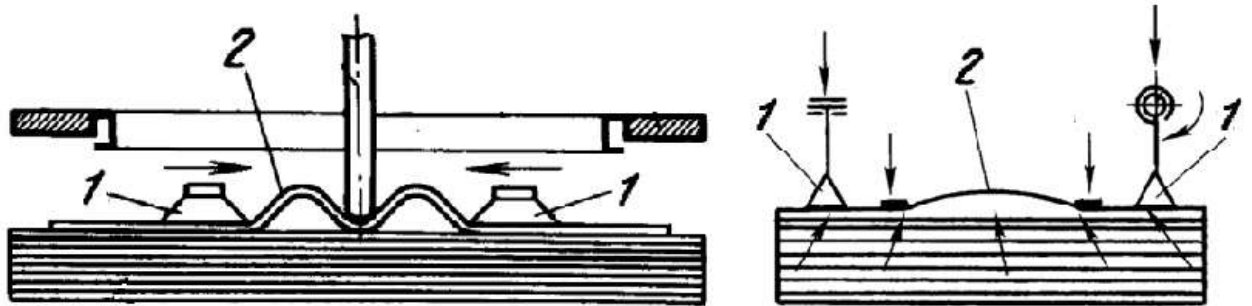


Рисунок 1.23 - Захват верхнего листа путем создания области выпучивания

Некоторые способ захвата верхнего листа основываются на захвате его за край. На рисунке 1.24 захваты робота Rochu Soft robotic gripper «деликатным» защемлением краев обеспечивают отделения верхнего текстильного листа от пакета [43].

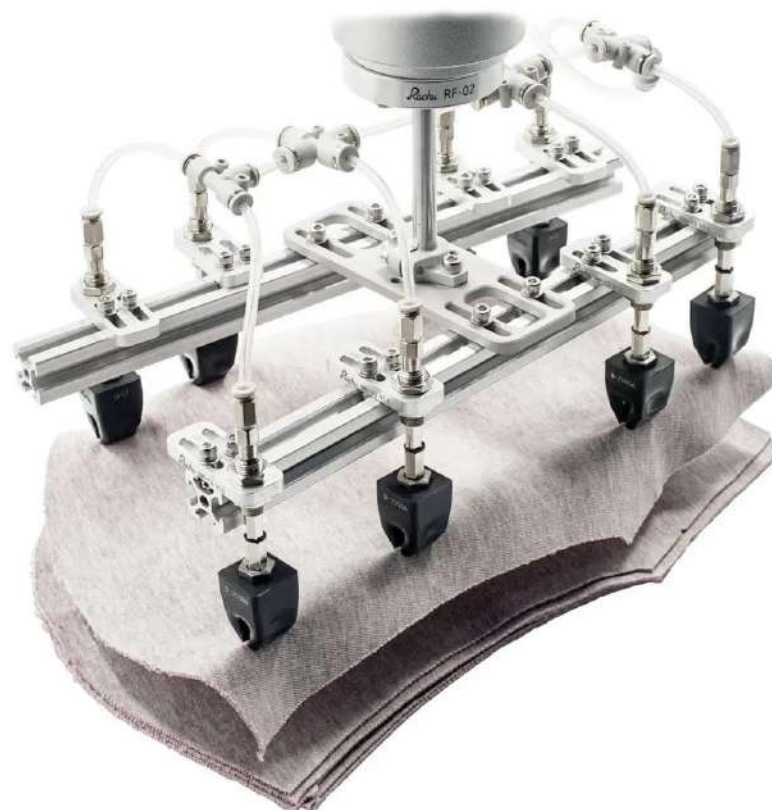


Рисунок 1.24 - Захваты робота Rochu Soft поднимают верхний лист

Также действует швейный робот РОКАЕ [44]. Подаваемые на прошивку листы (примерно прямоугольной формы) уложены в стопку (рисунок 1.25). Выстроенные в ряд вакуумные воронки захватывают и приподнимают край листа. В образовавшийся зазор вводится отбивной брусок, по которому скользит захватываемый лист.



Рисунок 1.25 – Захват верхнего листа роботом РОКАЕ

Устройство патента [45] содержит упругую мембрану с иглами (рисунок 1.26). Когда мембрана прогибается, концы игл входят в верхний лист и захватывают его.

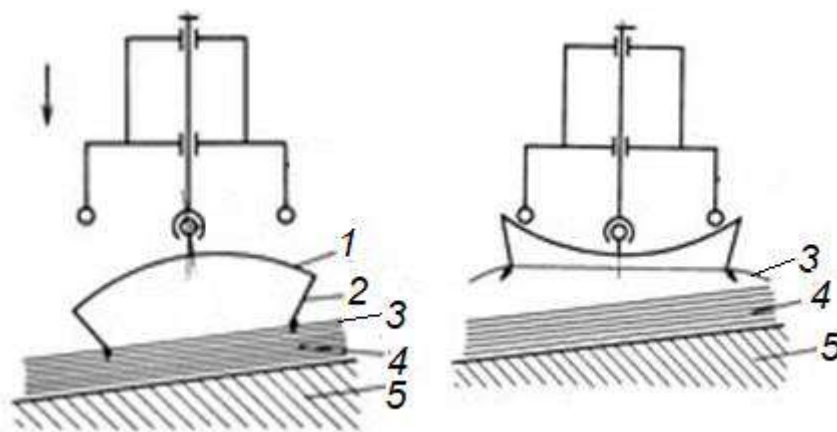


Рисунок 1.26 – Устройство для захвата верхнего листа из пакета:

1 – мембрана, 2 – зубья, 3 – захватываемый лист, 4 – пакет, 5 – основание.

Похожее устройство с иглами, захватывающими верхний лоскут текстиля из пакета описано в работе [46].

Захват верхнего листа может быть осуществлен путем прокатывания по нему перфорированного цилиндра с вакуумом внутри него [47]. Основу устройства составляет цилиндрический несущий элемент 1 (рисунок 1.27), боковая поверхность которого на некотором секторе имеет перфорацию 2 для удержания лоскута за счет разрежения внутри цилиндра 1. Благодаря разрежению в камере 3 несущего элемента и находящемуся в ней фрикционному ролику 4 создается складка материала 5, позволяющая зафиксировать его на несущем цилиндре 1. Далее цилиндр 1 прокатывается по верхнему листу, наматывая его на себя. Намотанный лист перемещается и раскладывается в новой позиции.

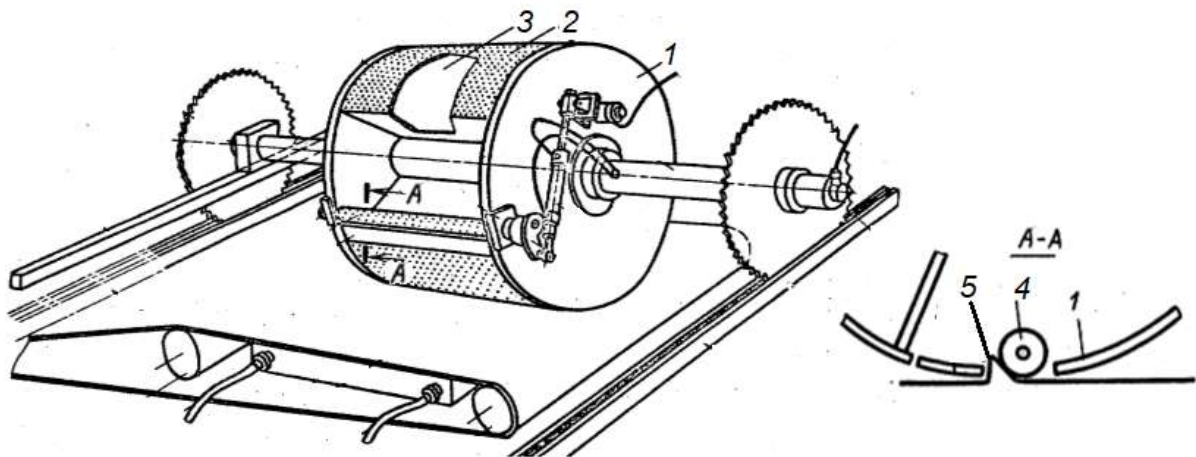


Рисунок 1.27 - Устройство для отделения куска ткани из штабеля

Устройство и расчет комбинированного захвата приведены в [48]. Деформируемая вакуумная воронка имеет на конце микроиглы (рисунок 1.28), с помощью которых у захватываемого верхнего листа создается складка.

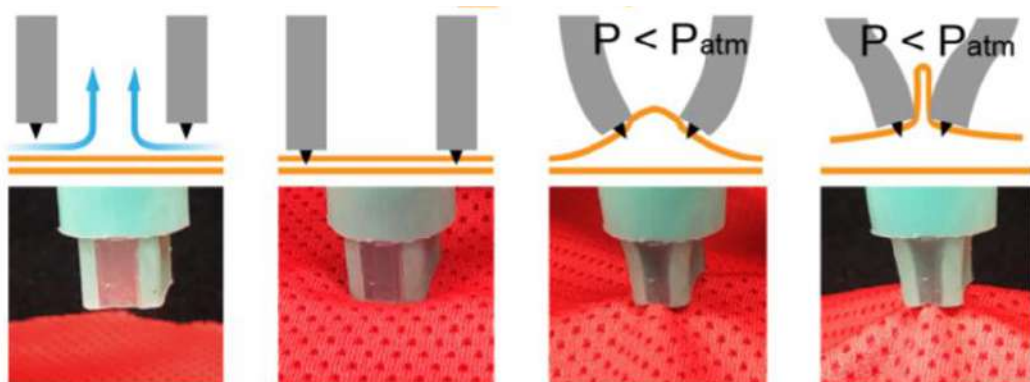


Рисунок 1.28 – Схема работы комбинированного захвата

## 1.6. Моделирование форм деформированных текстильных лоскутов

При поставке задачи автоматизации процесса манипулирования текстильными лоскутами важную роль играет информация о форме захваченного лоскута ткани.

Обзор принципов моделирования тканей и полученных на их основе моделей приведен в обзорах [49], [50]. Модели создаются на основе теории композитов, вязкоупругих сред, методов частиц, теории оболочек.

Модели текстильных материалов, создаваемые на основе теории композитов [51], образуют иерархию моделей разного уровня. Модель нано-уровня создается из объектов с характерными размерами от  $10^{-9}$  до  $10^{-6}$  м. Далее следуют модели микро-, мезо- и макро-уровней. Типичная модель отдельной ячейки микро-структуры и ее деформация изображена на рисунке 1.29. Механические свойства модели высокого уровня выводятся из свойств модели более низкого уровня методом, называемым здесь гомогенизацией. Моделирование тканых материалов как композитов рассмотрено в работе [52]. Для этого создана программа «WiseTex», использующая континуальную технологию дислокаций [53].

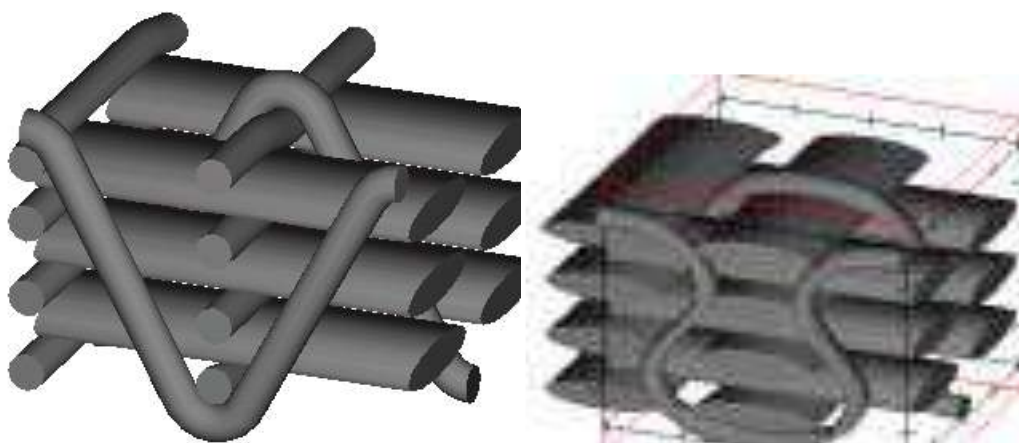


Рисунок 1.29 - Модель ячейки ткани и ее типичная деформация

Известны модели ткани как вязкоупругой среды [54] в виде системы упругих и вязких элементов, соединенных последовательно (модель Максвелла), параллельно (модель Кельвина-Фойгта) и более сложным образом (модель Лидер-

мана и др.). Модель ткани представляет собой повторяющиеся совокупности этих моделей, например, как на рисунке 1.30.

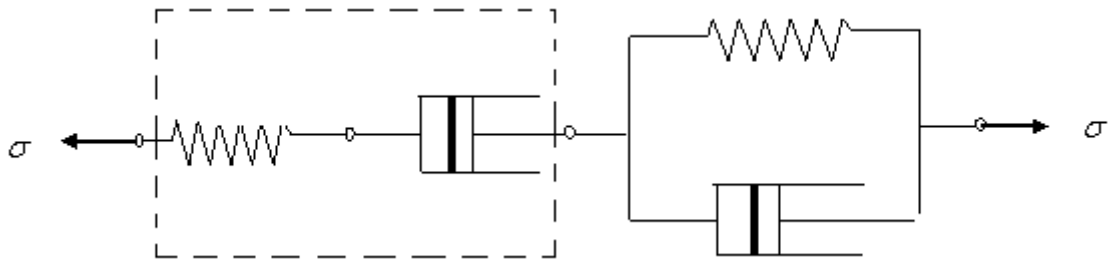


Рисунок 1.30 – Модель Максвелла и модель Кельвина-Фойгта

В работе [55] описывается управление силами растяжения текстильного полотна для реализации роботизированного шитья. Управление происходит через ПИД-регулятор, имеющий три режима работы: пропорциональный, интегральный и дифференциальный. Ткань представлена моделью Кельвина-Фойгта, элементы которой функционируют согласно специальным нелинейным законам.

В статье [56] описывается модель ткани как система гибких стержней, названных конечными элементами (рисунок 1.31). Модель может состоять из нескольких сотен стержней. На основе такой модели выводятся механические свойства тканей.

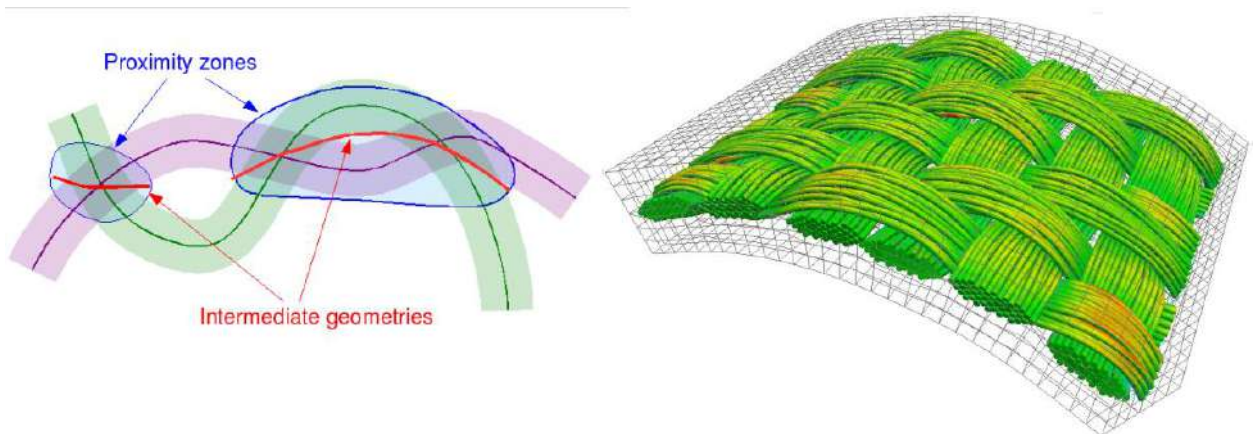


Рисунок 1.31 – Модель ткани из гибких стержней

Сочетание иерархии моделей с методом конечных элементов предлагается в статье [57]. Результат расчета напряжений внутри типовой ячейки (рисунок 1.32) распространяется на весь образец ткани.



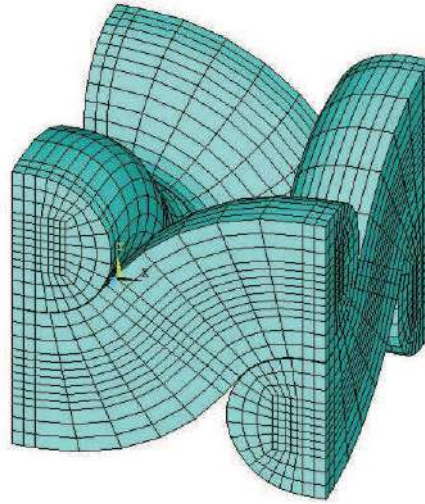


Рисунок 1.32 – Разбиение типовой ячейки на конечные элементы

Одним из методов моделирования сплошной среды является метод частиц [58], в котором среда представляется как механическая система с конечным числом степеней свободы, состоящая из точечных масс, связанных упругими и иными связями. Применение метода частиц к моделированию ткани описано в статье [59].

Динамика ткани описывается специфической системой обыкновенных дифференциальных уравнений [60], которые учитывают взаимодействие только соседних частиц. На точечные массы действуют упругие силы, имитирующие растяжение и изгиб материала (рисунок 1.33), силы тяжести и диссипативные силы. Благодаря диссипативным силам движение частиц из начального их положения быстро затухает и получается равновесная модель ткани.

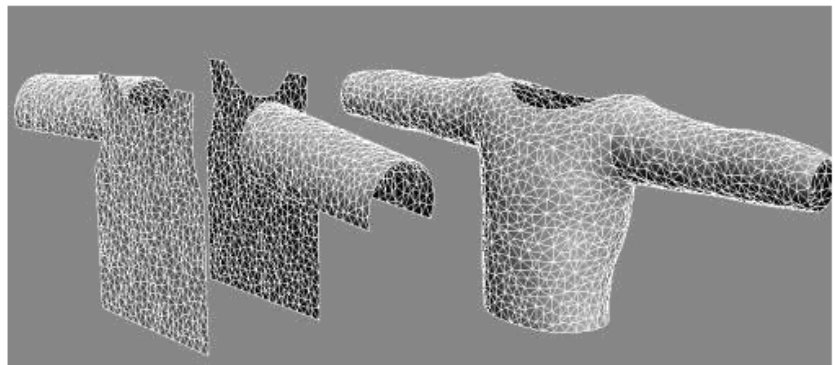
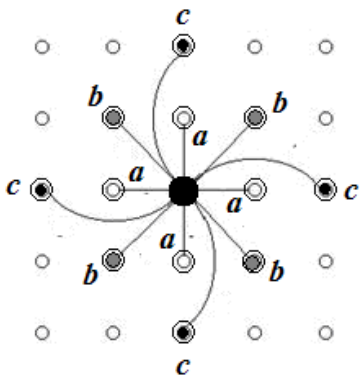


Рисунок 1.33 – Моделирование ткани методом частиц и построение на основе этого метода модели одежды на манекене

Метод частиц имеет разные модификации, ускоряющие процесс решения уравнений движения.[61], [62].

## **1.7. Модель лоскута ткани на основе теории упругих оболочек**

### **1.7.1. Основные методы теории оболочек**

Лоскуты ткани, изгибающиеся при их захвате и переносе, будем рассматривать как упругие оболочки. Оболочка - деформируемое твердое тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние  $h$  между которыми, называемое толщиной оболочки, мало сравнительно с длинами отрезков на ограничивающих поверхностях. Множество точек, равноудалённых от ограничивающих оболочку поверхностей, называется ее срединной поверхностью. Оболочку представляют как срединную поверхность, находящуюся под действием внешних и внутренних сил и моментов.

Современные теории оболочек иногда имеют весьма сложные базовые постулаты, например теория микро-полярных оболочек, фрагменты которых имеют шесть степеней свободы [63], [64], или теория, построенная на специальной алгебре ориентированных тензоров [65].

Будем придерживаться классической теории тонких упругих оболочек, по отношению к которым справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява [66]. Оболочку будем считать тонкой, т. е. толщиной  $h < 0,1R$ , где  $R$  – некоторый характерный размер, например радиус кривизны координатных линий на срединной поверхности.

Для расчета мягких текстильных оболочек используется безмоментная теория оболочек [67], [68], срединная поверхность которых испытывает в основном сдвиг и растяжение.

В задачах статики оболочки на основании заданных внешних нагрузок и граничных условий требуется определить деформации срединной поверхности и напряжения внутри оболочки. Уравнения равновесия формулируются в терминах

перемещений или в терминах напряжений как дифференциальные уравнения в частных производных

Для решения задачи статики оболочек применяются разные методы. Один из них – метод конечных элементов [69]. Оболочка разбивается на конечное число отдельных элементов, обычно в виде треугольников или многоугольников, связанных друг с другом общими вершинами (узловыми точками) и сторонами. Перемещения, деформации и напряжения внутри элементов выражаются через перемещения узловых точек. С помощью принципа возможных перемещений составляются уравнения равновесия. Их решение сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Метод конечных элементов применяется и для решения динамических задач [70].

### 1.7.2 Геометрия срединной поверхности изогнутого лоскута

Как показывают опыты по захвату и перемещению текстильных лоскутов, основным видом их деформации является изгиб. Деформации других видов сосредоточены непосредственно в области контакта с захватом, площадь которой обычно невелика. Если срединная поверхность деформируется благодаря ее изгибанию, то она должна быть развертывающейся поверхностью [71]. Гауссова кривизна (т.е. произведение главных кривизн) такой поверхности всюду равна нулю, ее можно без сдвигов и растяжений развернуть в плоскость.

Развертывающаяся поверхность, кроме плоскости, может быть трех видов: цилиндрическая, коническая или торсовая (поверхность касательных к закрученной производящей кривой – горловой линии).

Торсовую поверхность можно описать векторным уравнением

$$\vec{\rho}(u, w) = \vec{\rho}_l(u) + w\dot{\vec{\rho}}_l(u), \quad (1.3)$$

где  $\vec{\rho}$  - радиус-вектор точки торсовой поверхности,  $\vec{\rho}_l(u)$  – радиус-вектор точки горловой линии  $l$ ,  $u$  - ее натуральный параметр,  $\dot{\vec{\rho}}_l = \frac{d\vec{\rho}_l}{du} = \vec{\tau}$  - орт касательной к

производящей кривой, он же направляющий вектор образующей торсовой поверхности,  $w$  - натуральный параметр образующей (рисунок 1.34).

Коническую поверхность можно описать уравнением

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_O + w\vec{t}(u), \quad (1.4)$$

где  $\vec{\rho}_O = const$  - радиус-вектор вершины  $O$  конуса,  $\vec{t}$  - орт образующей.

Цилиндрическую поверхность можно описать уравнением

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_g(u) + w\vec{b},$$

где  $\vec{\rho}_g(u)$  - радиус-вектор точки опорной направляющей,  $\vec{b} = const$  - орт образующей. Пусть опорная образующая - плоская кривая, лежащая в плоскости, перпендикулярной образующим. Тогда  $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{\rho}} \times \ddot{\vec{\rho}}}{|\ddot{\vec{\rho}}|}$  - орт бинормали к опорной направляющей.

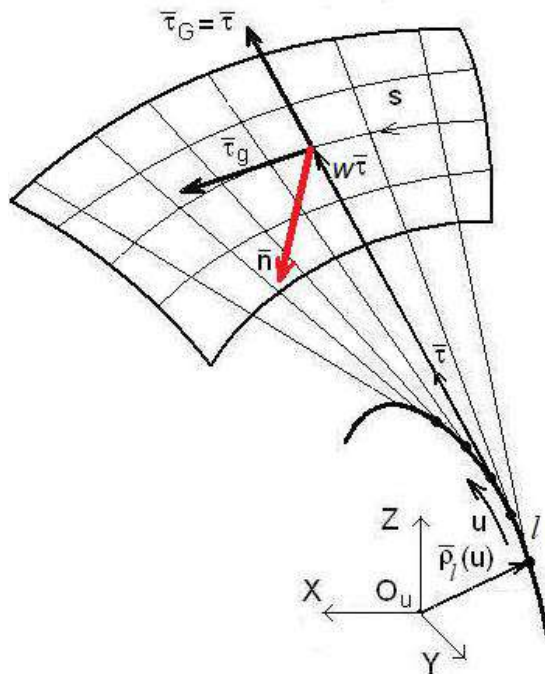


Рисунок 1.34 – Торсовая поверхность с координатными линиями на ней

Рассматривая торсовую поверхность (1.3), находим вектор бесконечно малого перемещения, касательный к этой поверхности:

$$d\vec{\rho} = \dot{\vec{\rho}}_1 du + w\dot{\vec{t}} du + \vec{t} dw. \quad (1.5)$$

Используем формулы Серре-Френе [72]:

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{du} = k\bar{\nu},$$

где  $k \geq 0$  - кривизна линии  $l$ ,  $\bar{\nu}(u)$  - орт её главной нормали. Тогда из (1.5) следует:

$$d\bar{\rho} = (\bar{\tau} + wk\bar{\nu})du + \bar{\tau}dw = \bar{\tau}(du + dw) + \bar{\nu}wkdu. \quad (1.6)$$

Рассмотрим два семейства координатных линий на торсовой поверхности: семейство  $\{G\}$  прямолинейных образующих, задаваемых условием  $u = const$ , и семейство  $\{g\}$  ортогональных им криволинейных направляющих. Поскольку мы будем исследовать изгиб лоскутов, то потребуется рассчитывать моменты, изгибающие лоскут как оболочку вокруг касательных к координатным линиям на срединной поверхности [73]. Каждый такой момент выражается через нормальную кривизну координатной линии, т.е. через проекцию вектора полной кривизны линии на нормаль к поверхности. Поскольку кривизна образующей равна нулю, остается определить нормальную кривизну направляющей.

В случае движения вдоль направляющей вектор  $d\bar{\rho} = d\bar{\rho}_g$  должен быть ортогонален направляющему вектору  $\bar{\tau}$  образующей:

$$d\bar{\rho}_g \cdot \bar{\tau} = 0,$$

откуда, с учетом (1.6), получаем

$$du + dw = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$w = C - u,$$

где  $C$  – константа интегрирования.

Орт касательной к направляющей

$$\bar{\tau}_g = \frac{d\vec{r}_g}{ds},$$

где  $d\vec{r}_g$  - касательный вектор направляющей,  $ds$  – дифференциал её дуговой координаты  $s$ . Тогда

$$d\vec{r}_g = d\bar{\rho}|_{ds+dw=0} = \bar{\nu}wkdu, \quad (ds)^2 = d\vec{r}_g \cdot d\vec{r}_g = w^2k^2du^2 = (C-u)^2k^2du^2,$$

так, что

$$ds = \pm(C - u)kdu = \pm wkdu.$$

Знаки соответствуют двум полостям торса по разные стороны от горловой линии. Пусть  $ds = +wkdu$ , тогда

$$\vec{\tau}_g = \vec{v}(u).$$

Вводим в рассмотрение орт нормали к поверхности:

$$\vec{n} = \vec{\tau}_G \times \vec{\tau}_g = \vec{\tau} \times \vec{\tau}_g = \vec{\tau} \times \vec{v} = \vec{b},$$

где  $\vec{b}$  - вектор бинормали к горловой линии.

Находим вектор полной кривизны направляющей:

$$k_g \vec{v}_g = \frac{d\vec{\tau}_g}{ds} = \frac{d\vec{v}}{ds} = \frac{d\vec{v}}{wk du},$$

где  $k_g$  - величина полной кривизны,  $\vec{v}_g$  - орт нормали к направляющей.

Согласно второй формуле Серре-Френе

$$\frac{d\vec{v}}{du} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{b},$$

где  $\kappa$  - кручение производящей кривой  $l$ ,  $\vec{b}$  - орт ее бинормали. Таким образом, вектор полной кривизны направляющей есть сумма двух векторов:

$$k_g \vec{v}_g = \frac{d\vec{v}}{ds} = \frac{-k\vec{\tau} + \kappa\vec{b}}{wk} = -\frac{1}{w}\vec{\tau} + \frac{\kappa}{wk}\vec{b}. \quad (1.7)$$

Заметим, что Вектор Дарбу угловой скорости сопровождающего трехгранника при его движении вдоль кривой  $l$  равен

$$\vec{\Omega} = \kappa\vec{\tau} + k\vec{b}.$$

Первое слагаемое выражения (1.7) представляет собой геодезическую кривизну направляющей, т. е. составляющую вектора полной кривизны, лежащую в касательной плоскости  $\Pi$ . Ее величина  $k_{g,\tau}$  не меняется при изгибании поверхности. Она равна кривизне направляющей на ее плоской развертке (рисунок 1.35). Параметр  $w$  можно трактовать как радиус кривизны плоской направляющей. Эту

же кривизну можно выразить через угол  $\alpha$  поворота касательной к направляющей (он же угол поворота образующей на развертке):

$$k_{g,\tau} = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

Через угол  $\alpha$  можно выразить и кривизну горловой линии:

$$k = \left| \frac{d\alpha}{du} \right|.$$

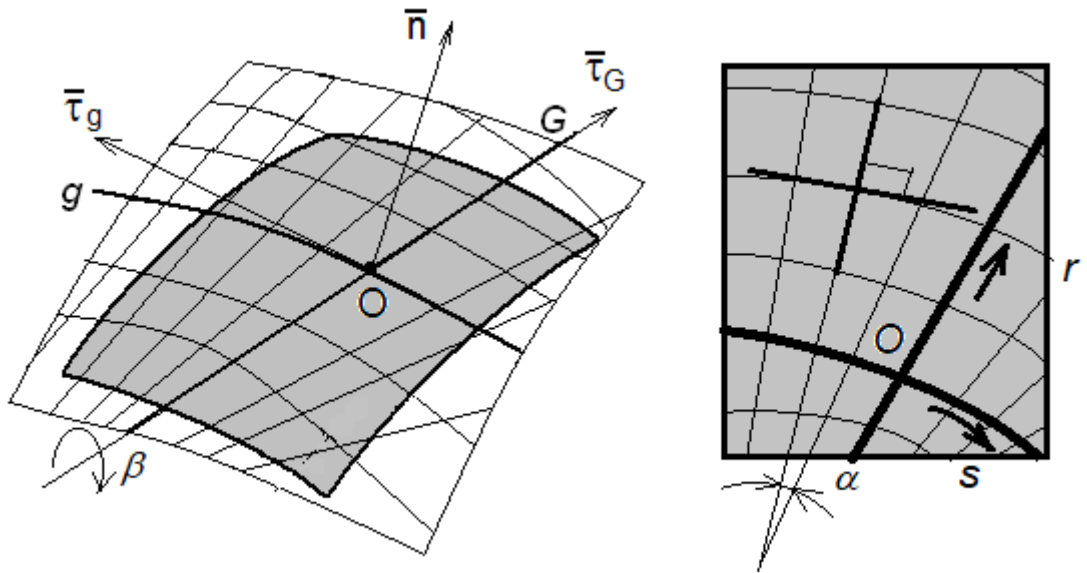


Рисунок 1.35 – Изогнутая торсовая поверхность и ее развертка

Величина нормальной кривизны направляющей равна:

$$|k_{g,n}| = \left| \frac{\kappa}{wk} \right|.$$

Кручение горловой линии можно выразить через угол  $\beta$  поворота вектора Дарбу вокруг касательной (она же образующая торса):

$$|\kappa| = \left| \frac{d\beta}{du} \right|.$$

Заметим, что на такой же угол поворачивается и плоскость  $\Pi$ .

В итоге получаем:

$$|k_{g,n}| = \left| \frac{\kappa}{wk} \right| = \left| \frac{d\beta du d\alpha}{du d\alpha ds} \right| = \left| \frac{d\beta}{ds} \right|.$$

Если угол  $\beta$  считать положительным, если он отсчитывается вокруг вектора  $\vec{\tau}_G$  по правилу правого винта, то проекция кривизны на нормаль равна:

$$k_{g,n} = -\frac{d\beta}{ds}.$$

Задавать торсовую поверхность можно путем описания горловой линии, но ввиду схожести движений векторов Дарбу по ней и по направляющей удобнее следующее описание.

1. На плоской развертке задается некоторая опорная (базовая) направляющая. Натуральное уравнение базовой направляющей описывает зависимость угла  $\alpha$  от параметра  $s$ . Множество этих углов  $\{\alpha\}$  определяет множество образующих торса.

2. Задается некоторая опорная образующая. Вдоль нее отсчитывается другой натуральный параметр  $r$ . Дифференциал длины дуги направляющей, отстоящей от опорной на расстояние  $r$ , задается выражением:

$$ds_r = ds(1 + r\alpha'),$$

где  $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$ . Нормальная кривизна такой направляющей  $k_{g,n} = -\frac{d\beta}{ds(1 + r\alpha')}$ .

Коэффициенты Ламе для торсовой поверхности имеют вид:

$$A = H_G = 1, \quad B = H_g = 1 + r \frac{d\alpha}{ds}. \quad (1.8)$$

3. Торсовую поверхность получаем изгибанием развертки, которое описываем множеством углов  $\{\beta\}$ .

Таким образом, торсовую поверхность задаем масштабом дугового параметра  $s$  и функциями

$$\alpha = \alpha(s), \quad \beta = \beta(s)$$

с дополнительными условиями, описывающими правила отсчета этих углов в системах координат, связанных с разверткой и с деформированным лоскутом. Для построения поверхности удобно задавать производные этих функций  $\alpha'(s)$ ,  $\beta'(s)$  и их начальные значения  $\alpha_0, \beta_0$ .



Будем моделировать срединную поверхность лоскута как многогранную поверхность из  $N$  граней с ребрами в виде образующих. При  $N \rightarrow \infty$  эта модель, очевидно, стремится принять форму гладкой развертывающейся поверхности [74]. Строим развертку срединной поверхности. Задаем точку на развертке, через которую проходит опорная образующая, и угол  $\alpha_0$ , определяющий ее положение. Задаем начальную точку  $O_0$  направляющей на ней. Задаем последовательность шагов  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_{N-1}$  вдоль опорной направляющей и значения углов  $\Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \dots, \Delta \alpha_{N-1}$ , между соседними образующими (рисунок 1.36). Задаем положение первой грани в пространстве. Изгибаем развертку, задавая углы  $\Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \dots, \Delta \beta_{N-1}$  поворота каждой последующей грани относительно предыдущей.

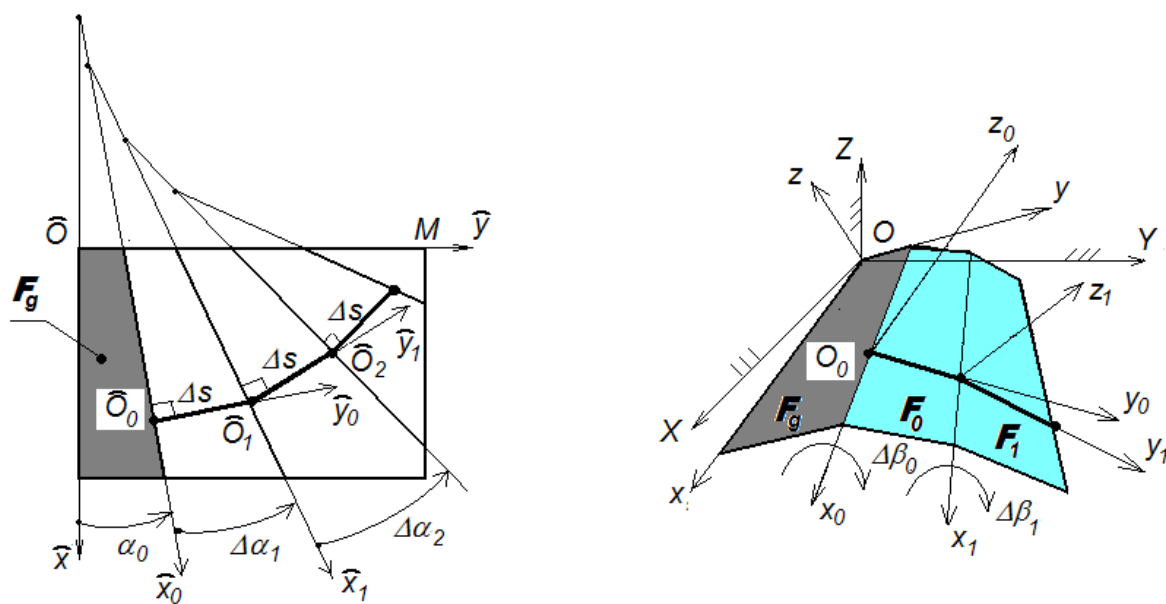


Рисунок 1.36 – Построение модели торсовой поверхности

Выражения  $\frac{\Delta \alpha_i}{\Delta s_i}$  и  $\frac{\Delta \beta_i}{\Delta s_i}$  являются приближениями значениями производных

$\alpha'$  и  $\beta'$ . Шаги вдоль опорной направляющей удобно сделать одинаковыми.

### 1.7.3. Механика лоскута как упругой оболочки

Распределенные вдоль координатных линий усилия и моменты, действующие внутри лоскута как оболочки, изображены на рисунке 1.37. Они выражаются через соответствующие напряжения. Так, сила  $T_G$ , растягивающая лоскут вдоль образующей, равна:

$$T_G = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{GG} d\zeta,$$

где  $\sigma_{GG}$  - нормальное напряжение на площадке с нормалью  $\vec{\tau}_G$ ,  $\zeta$  - координата, отсчитываемая вдоль нормали к срединной поверхности.

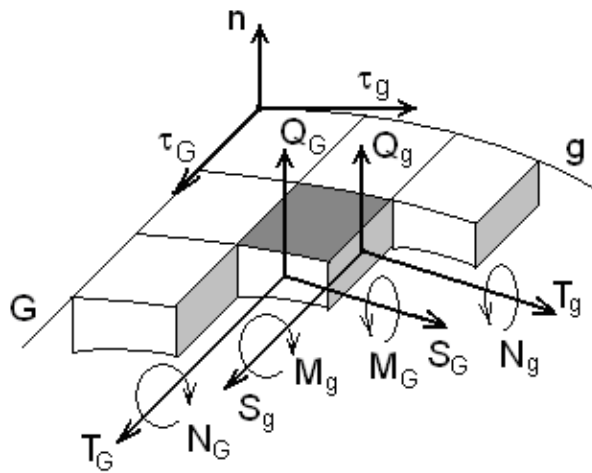


Рисунок 1.37 – Силы и моменты внутри лоскута

Для изгибающих моментов, согласно [75], имеем выражения:

$$M_G = D(k_{G,n} + \mu k_{g,n}) = -D\mu \frac{d\beta}{ds_r}, \quad M_g = Dk_{g,n} = -D \frac{d\beta}{ds_r}.$$

Здесь  $D$  – изгибная жесткость материала,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Для тонких оболочек  $S_G \approx S_g = S$ ,  $N_G \approx N_g = N$  (при торсовой срединной поверхности  $N = 0$ ).

Исключив перерезывающие силы и учитывая (1.8), можно записать три уравнения равновесия [76], с помощью которых можно следить за напряженным состоянием лоскута:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_G}{\partial r} + \frac{\alpha'}{B}(T_G - T_g) + \frac{1}{B} \frac{\partial S}{\partial s} + p_G &= 0 \\ \frac{1}{B} \frac{\partial T_g}{\partial s} - \frac{b}{B^2} \frac{\partial M_g}{\partial s} + 2 \frac{\alpha'}{B} S + \frac{\partial S}{\partial r} + p_g &= 0 \\ \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 M_G}{\partial r^2} + 2 \frac{\alpha'}{B} \frac{\partial M_G}{\partial r} - \frac{\alpha'}{B} \frac{\partial M_g}{\partial r} - \frac{r\alpha''}{B^3} \frac{\partial M_G}{\partial s} + \frac{\beta'}{B} T_g + p_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Здесь обозначено:  $p_G, p_g, p_n$  - проекции вектора внешней распределенной силовой нагрузки.

Для конической поверхности второй коэффициент Ламе равен  $A_1 = 1$ ,  $H_g = r$ . Тогда третье уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial(rM_G)}{\partial r} - M_g \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial M_g}{\partial \alpha} \right] + \beta' T_g + r p_n = 0.$$

Привлекая определяющее соотношение  $T_g = h\sigma_{gg}^0$ , в котором  $\sigma_{gg}^0$  означает нормальное напряжение на уровне срединной поверхности, можно записать условие достижения предельного напряжения  $[\sigma]$  на расстоянии  $r_p$  от конической вершины:

$$p_n r_p^3 + [\sigma] h \beta' r_p^2 - D(\beta' + \beta''') = 0. \quad (1.10)$$

Его можно использовать для расчета формы и размеров так называемой сингулярной зоны при моделировании конического изгиба лоскута.

Потенциальная энергия  $U$  лоскута:

$$U = U_e + U_g, \quad (1.11)$$

где  $U_e$  - упругая энергия,  $U_g$  - гравитационная энергия лоскута в поле сил тяжести. Гравитационная энергия определяется положением центра тяжести лоскута. Упругая энергия ввиду нерастяжимости срединной поверхности является энергией изгиба и представляется интегралом по области  $F$ , занятой срединной поверхностью:

$$U_e = 0.5 \iint_F D k_{g,n}^2 dF = 0.5 \iint_F \frac{D \beta'^2}{(1 + r\alpha')^2} ds_g dr = 0.5 \iint_F \frac{D \beta'^2}{1 + r\alpha'} ds dr. \quad (1.12)$$

Выражение (1.11) можно рассматривать как функционал (лагранжиан) энергии, отображающий функциональное пространство, содержащее функции  $\alpha(s), \beta(s)$ , в пространство вещественных чисел  $\mathbb{R}^1$ .

Потенциальную энергию многогранной модели лоскута ищем как сумму энергий отдельных граней. Грани на развертке представляются как узкие полоски. Один из способов расчета энергии грани представляет ее как часть кругового сектора раствором  $\Delta\alpha_k$ , ограниченную двумя образующими и дугами окружностей радиусами  $C_k N_{k-1}$  и  $C_k M_k$  (рисунок 1.38). Изгибную жесткость  $D$  считаем в области грани постоянной, нормальную кривизну направляющих полагаем зависящей только от переменной  $r$ . Кривизну опорной направляющей полагаем равной полу-сумме кривизн в точках пересечения ее с граничными образующими:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\Delta\beta_{k-1} + \Delta\beta_k}{r\Delta\alpha_k} \right|.$$

Взяв интеграл (1.12) по области сектора в полярных координатах, получаем:

$$U_{e,k} = D \frac{(\Delta\beta_{k-1} + \Delta\beta_k)^2}{8|\Delta\alpha_k|} \ln \frac{C_k N_{k-1}}{C_k M_k}.$$

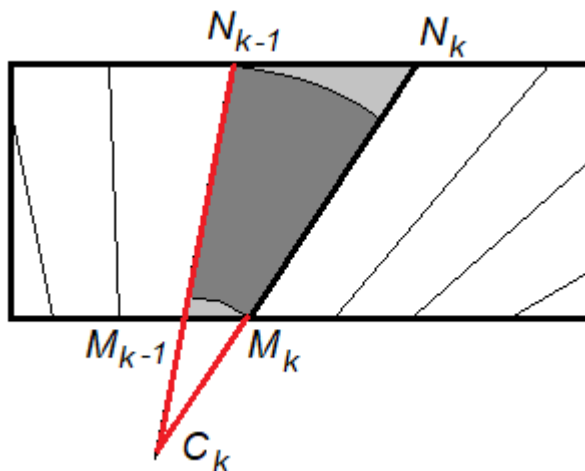


Рисунок 1.38 – Отдельная грань модели торсовой поверхности

Для описания статической формы оболочки обычно составляются и решаются дифференциальные уравнения равновесия в терминах перемещений. Они могут быть составлены на основе изучения равновесия бесконечно малого фрагмента оболочки, или получены как уравнения Эйлера-Лагранжа [77], выражаю-

щие условие стационарности функционала энергии (1.11). Эта стационарность, в свою очередь, обеспечена теоремой Лагранжа-Дирихле, согласно которой в устойчивом положении равновесия консервативной механической системы ее потенциальная энергия имеет строгий изолированный минимум [78].

Например, в [79] для полой цилиндрической оболочки составлена система дифференциальных уравнений терминах перемещений общего порядка 12, которая решается методом малого параметра. В работе [80] рассмотрена система уравнений такого же порядка для исследования узкой разворачивающейся упругой ленты Мёбиуса. В статье [81] система уравнений, определяющих форму ленты Мёбиуса, сведена к системе двух дифференциальных уравнений третьего порядка относительно функций кривизны и кручения центральной замкнутой направляющей ленты.

Задача о форме ленты Мёбиуса решается на основе минимизации функционала энергии в работах [82], [83].

В работах [84], [85] для исследования различных лент Мебиуса составлена система из 8 дифференциальных и алгебраических уравнений.

Задача об исследовании конической формы упругого тяжелого круглого листа в [86] сведена к численному решению системы 4 дифференциальных уравнений.

### **1.8. Оптимизационный метод решения задачи о форме захваченного лоскута**

Дифференциальные уравнения, описывающие форму деформированного лоскута при больших взаимных перемещениях его частей, являются нелинейными и подлежат численному решению. Применение того или иного метода решения задачи о форме лоскута приводит к тому или иному итерационному процессу, который заканчивается при достижении некоторых заданных условий.

Поэтому мы будем решать задачу о форме лоскута путем непосредственной минимизации функционала энергии. Функции  $\alpha(s), \beta(s)$  представляем множе-

ством их конкретных значений в фиксируемых точках  $s = s_k, k=1,2,\dots,N$ . Тогда функционал энергии превращается в функцию от  $2N$  переменных, образующих  $2N$  – мерное евклидово пространство

$$\mathbf{X} = \{\alpha_k(s), \beta_k(s)\}.$$

Дополнительные ограничения связаны, прежде всего, с удовлетворением условий неразрывности, нерастяжимости и отсутствия самопересечений. Эти ограничения будем оформлять как штрафные компоненты  $U_{str}$  общей целевой функции  $U$ :

$$U = U_e + U_g + \sum_j \lambda_j U_{str,j},$$

где  $\lambda_j$  - коэффициенты, имеющие смысл множителей Лагранжа. Процесс поиска наилучшего решения некоторой математически сформулированной многокритериальной проблемы называется оптимизационным [87]. Компромиссное решение определяется соотношением весовых коэффициентов, учитывающих важность того или иного критерия.

Процесс оптимизации начинается в заданной начальной точке  $X_0$  пространства  $\mathbf{X}$ .

Одним из методов оптимизации является метод Гаусса-Зейделя, который заключается в последовательном определении экстремума функции одной переменной с точностью до заданного критерия  $\varepsilon$  вдоль каждой координаты  $x_k \in \mathbf{X}$ , т.е. фиксируются все координаты, кроме одной, по которой и осуществляется поиск экстремума  $U$ . Потом та же процедура осуществляется при фиксации следующей координаты.

После рассмотрения всех  $n = 2N$  координат выполняется возврат к первой и вновь производится поиск локального экстремума вдоль каждой из  $n$  координат до тех пор, пока экстремум не будет локализован с заданной точностью.

При использовании метода градиента находятся значения частных производных по всем независимым переменным –  $\partial U / \partial x_k$ ,  $k = 1, 2N$ , которые опреде-

ляют направление градиента в рассматриваемой точке  $X$  пространства  $\mathbf{X}$ . Из точки  $X_k$  совершаем итерационный шаг в точку  $X_{k+1}$  по правилу

$$X_{k+1} = X_k - d_{x,k} \nabla_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\nabla_k = \nabla U(X_k)$  – градиент целевой функции  $U$  в точке  $X_k$  (символом « $\nabla$ » обозначен оператор Гамильтона),  $d_{x,k}$  – «длина» очередного шага. В точке  $X_{k+1}$  все повторяется. Движение прекращается, когда изменение целевой функции становится малым:

$$|U(X_{k+1}) - U(X_k)| \leq \varepsilon.$$

В методе наискорейшего спуска движение вдоль антиградиента продолжается, пока целевая функция уменьшается.

На практике анти-градиентное движение совершается в некотором подпространстве варьируемых величин  $\mathbf{X}_{\text{var}} \in \mathbf{X}$  размерностью  $n_{\text{var}} < n$ . Мы будем включать в состав варьируемых величин наиболее влиятельные переменные, при изменении которых целевая функция меняется наибольшим образом.

Если дополнить пространство  $\mathbf{X}$  еще одним измерением, выражающим значения  $\{U\}$  целевой функции, то выражение  $U = \text{const}$  можно интерпретировать как уравнение гиперповерхности, вложенной в объединенное пространство. Эта гиперповерхность, может в некоторой области иметь характер «оврага». Процесс приближения к минимуму может затянуться из-за перескоков с одного берега «оврага» на другой. В этом случае применяют анти-овражные алгоритмы, например алгоритм Гельфанда [88].

Блок-схема программы-оптимизатора представлена на рисунке 1.40. В блоке 2 осуществляется ввод начальных значений массива переменных  $X^{\text{in}} = X_0$ , имени подпрограммы  $Ufun$ , в теле которой рассчитывается значение целевой функции при заданном значении вектора-массива  $X$ , вводятся массивы постоянных параметров задачи, параметров, организующих процесс оптимизации и другие. В блоке 3 находится начальное значение целевой функции, массиву  $X^{\text{out}}$  выходных значений присваивается значение  $X^{\text{out}} = X^{\text{in}}$ . Признаку окончания счета присваи-

вается значение  $flag = 1$ . Процесс итераций состоит из двух этапов. На первом этапе определяются наиболее влиятельные переменные и направление анти-градиентного шага. Второй этап встроен в первый и заключается в движении в анти-градиентном направлении. Процесс продолжается, пока существует направление убывания целевой функции.

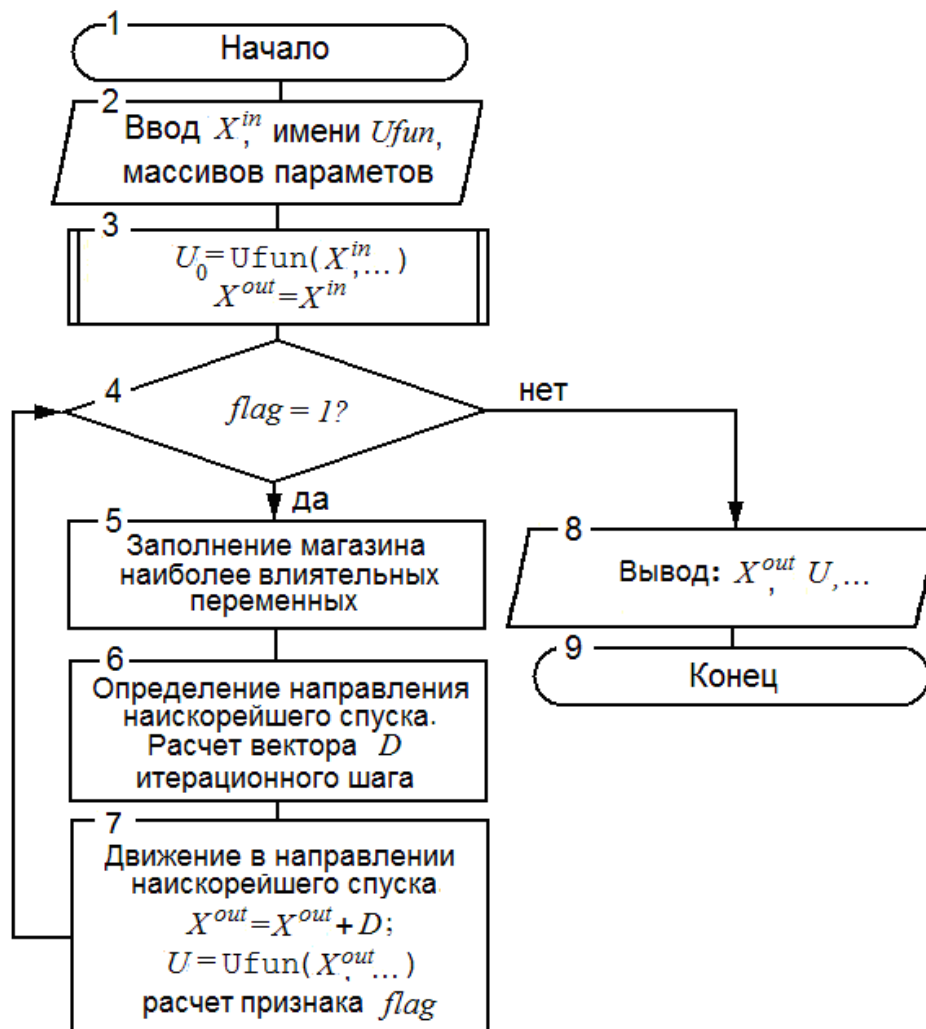


Рисунок 1.40 -Блок-схема простейшей программы-оптимизатора

### 1.9. Постановка цели и задач исследования

Основная цель работы – моделирование деформаций текстильных лоскутов, захваченных вакуумными захватами разных конструкций. Для этого решаются две основные задачи: 1) создание алгоритмов и компьютерных программ для по-



строения моделей захваченных лоскутов; 2) проведение экспериментов для сравнения опытных деформированных форм с компьютерными моделями.

Алгоритмы расчета форм срединной поверхности составляются на основе линейной теории тонких упругих оболочек. Основным видом деформации оболочки считаем ее изгиб. Материал листов предполагается изотропным или анизотропным. Срединную поверхность лоскута предполагаем развертывающейся поверхностью: торсовой, конической или цилиндрической.

Равновесную форму лоскута в захвате будем искать как форму, соответствующую его минимальной потенциальной энергии с учетом дополнительных ограничений, таких, как отсутствие растяжений, разрывов, самопересечений и других. Поиск осуществляем оптимизационным методом наискорейшего спуска. Программы моделирования форм изгиба лоскутов составляем в среде компьютерной математики MATLAB.

Параллельно с теоретическими исследованиями и расчетами, мы проводим эксперименты по захвату разных лоскутов вакуумными захватами.

Результаты расчета сравниваем с данными экспериментов и выводим суждения об эффективности созданных алгоритмов и программ.

Результаты диссертационного исследования могут быть использованы при конструировании автоматических устройств, выполняющих различные манипуляции с текстильными изделиями: как с лоскутами, так и с большими полотнами.

## **ГЛАВА 2. ПРАКТИКА ЗАХВАТА И УКЛАДКИ ЛОСКУТОВ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМ ЗАХВАЧЕННЫХ ЛОСКУТОВ**

### **2.1. Типичные виды захватов и форм деформации удерживаемых ими лоскутов**

Вакуумные захваты будем различать по следующим признакам. Захваты имеют одну или несколько вакуумных воронок. Воронки образуют сборочную единицу или движутся независимо друг от друга (в соответствии с программой захвата и перемещения лоскута). Воронка имеет корпус значительной глубины и диаметра или выполнена как отверстие в листовом материале. Поперечное сечение воронки круглое или иной формы. Корпус воронки жесткий или податливый.

Отрез ткани, присасываемый к воронке, может проникать внутрь воронки на ту или иную глубину. Воронка имеет внутри упор, ограничивающий это проникновение, или не имеет. Захват со многими отверстиями имеет плоскую (плоский захват) или искривленную поверхность. Деформации захватываемых и перемещаемых лоскутов ткани, как показывает опыт, имеют в основном форму изгиба. Лоскут ткани будем рассматривать как тонкую упругую оболочку. Срединную поверхность лоскута будем полагать в основной ее части развертывающейся, т. е. цилиндрической, конической или торсовой поверхностью. Комбинированным будем называть такой изгиб срединной поверхности, при котором имеются участки разных видов развертывающейся поверхности.

Отдельные области внутри срединной поверхности могут испытывать сдвиги и растяжения. Будем называть их областями или зонами выпучивания. Полагаем площади этих областей малыми сравнительно с общей площадью срединной поверхности. Напряжения в зонах выпучивания столь велики, что структура того или иного листового материала изменяется. Металлические листы претерпевают пластическую деформацию, в бумажных листах происходит расслоение волокон

целлюлозы. Эти необратимые деформации видны на развертке скомканного бумажного листа (рисунок 2.1, а). Они более всего выражены в конических вершинах и менее выражены вдоль хребтов – прямых отрезков, соединяющих конические вершины. Деградация материала произошла вдоль так называемых ребер перелома.



а

б

Рисунок 2.1 - Развертка смятого листа бумаги (а) и текстильного лоскута (б)

Аналогичная картина наблюдается на развертке скомканного лоскута ткани (рисунок 2.1, б). Конические вершины и хребты менее выражены по сравнению с бумагой, в зависимости от сминаемости материала. Общепринятой характеристикой текстильных материалов считается их несминаемость: способность восстанавливать складки после снятия нагрузки. Несминаемость свойственна толстым материалам, деформирующимся с преобладанием упругой деформации и так называемой эластической деформации с малым периодом релаксации.

Несминаемость характеризуется долей упругой деформации в общей деформации ткани. Она зависит от вида и размеров отдельных волокон, нитей и структуры переплетения. Толстые круглые волокна, высокая крутка нитей способствуют повышению несминаемости, так же, как и повышенная плотность ткани и ее толщина [89].

Поскольку преобладающей формой деформации лоскута является его изгиб, и срединная поверхность является развертывающейся поверхностью, то в зависимости от сочетания устройства захвата и формы лоскута мы наблюдаем характерные формы изгиба, изображенные на рисунках 2.2–2.5.



Рисунок 2.2 - Цилиндрический изгиб при наличии плоского захвата и соответствующей ориентации его относительно прямоугольного лоскута



Рисунок 2.3 - Конический изгиб. Захваченная область выпучивания втянута в воронку



Рисунок 2.4 - Торсовый изгиб. Край лоскута свешивается асимметрично



Рисунок 2.5 – Сложный изгиб лоскута, захваченного плоским захватом. Лоскут имеет форму накидки или скатерти

## 2.2. Эксперименты по захвату лоскута вакуумной воронкой

Производителем вакуума в экспериментах по захвату лоскутов может служить вакуумный компрессор. Для экспериментов использовался вакуумный компрессор с максимальной паспортной (номинальной) мощностью  $N_{\max} = N_6 = 1900$  Вт. Промежуточные уровни мощности  $N_k$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) составляют примерно  $N_1 = N_{\min} = 320$  Вт,  $N_2 = 650$  Вт,  $N_3 = 1000$  Вт,  $N_4 = 1300$  Вт,  $N_5 = 1700$  Вт. Создаваемая при этом мощность всасывания определяется как характеристика потока внутри трубопровода, следующего за вакуумной воронкой:

$$N = Q \cdot \Delta p,$$

где  $Q$  - объемный расход (поток) воздуха, измеряемый в  $\text{м}^3/\text{с}$ ,  $\Delta p$  - перепад давления (разрежение) в трубопроводе по сравнению с атмосферным, измеряемый в Па. Мощность всасывания связана с номинальной мощностью формулой

$$N = \eta N_k,$$

где  $\eta$  - коэффициент полезного действия (КПД) вакуумного компрессора, имеющего, как правило, вакуумный насос центробежного типа с рабочим колесом, снабженным радиальными лопастями.

Эксперименты с аналогичным вакуумным компрессором, представленные в статье [90], дают зависимость КПД от разрежения  $\Delta p$  (рисунок 2.6). Перелом графика в наивысшей точке означает срабатывание предохранительного клапана.

Разрежение зависит устройства вакуумного насоса, от протекания воздуха в зазорах, образованных деформированным лоскутом, от фильтрации воздуха сквозь ткань. При уменьшении зазоров и степени фильтрации разрежение увеличивается, но одновременно уменьшается и поток. В итоге мощность, как правило, уменьшается. Максимальная мощность всасывания установлена как 400 Вт.

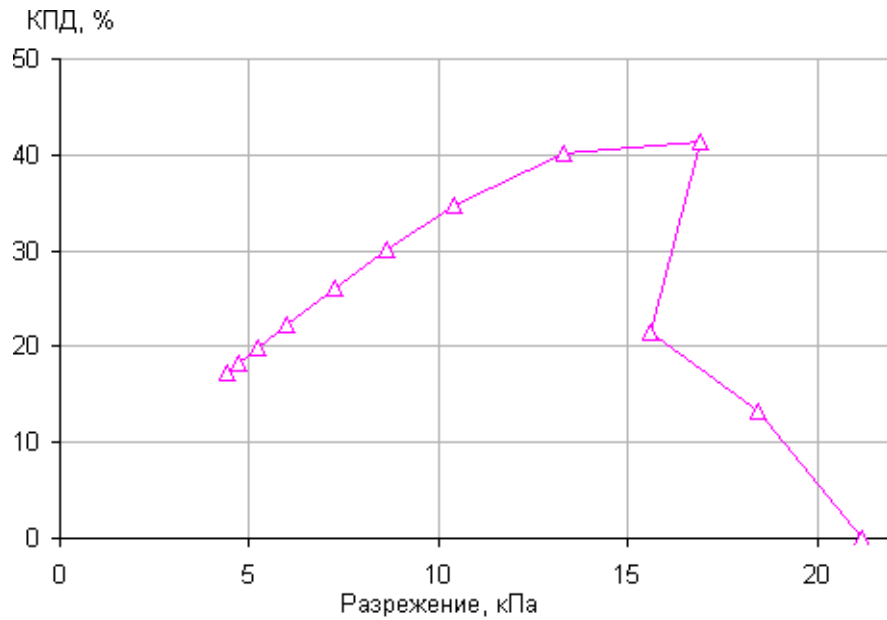


Рисунок 2.6 - Зависимость КПД вакуумного компрессора от разрежения  $\Delta p$

На рисунке 2.7 приведен график зависимости между разрежением  $\Delta p$  и расходом воздуха  $Q$ . Максимальное разрежение равно 21 кПа при расходе  $Q = 0$ . Максимальный расход  $Q_{max} = 50 \text{ л/с} = 0,05 \text{ м}^3/\text{с}$  при разрежении  $\Delta p = 5 \text{ кПа}$ .

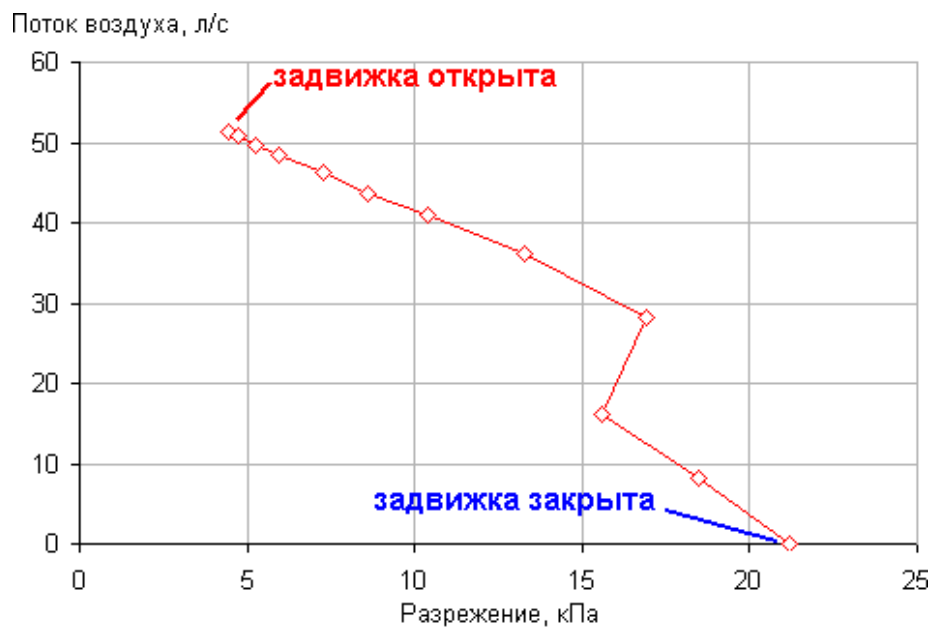


Рисунок 2.7 – Зависимость потока (расхода) воздуха  $Q$  от разрежения  $\Delta p$

При захвате лоскута вакуумной воронкой его свободная поверхность принимает коническую форму с несколькими складками (называемыми также фолдами или флейтами). Количество флейт зависит от соотношения изгибной жесткости, плотности материала, формы и размеров лоскута, захвата и места расположе-

ния захвата на листе. Линейчатость поверхности легко проверяется прикладыванием к ней линейки. Коническая вершина находится внутри воронки. Область лоскута вокруг конической вершины – область выпучивания, претерпевающая сложную деформацию.

Изображения захваченных вакуумными воронками круглого лоскута драпа диаметром 270 мм приведены на рисунках 2.8. На рисунке 2.9 изображен двойной лоскут джинсовой ткани, образующий симметричную односекторную коническую поверхность («полулунного» типа), а также одинарный лоскут, выпученная область которого значительно втянута в воронку. Заметим, что в последнем случае при сбросе лоскута надо будет преодолевать дополнительное сопротивление трения в воронке.



Захват воронкой диаметром 70 мм. Четырехсекторный конический изгиб

Захват воронкой диаметром 17 мм. Трехсекторный изгиб

Рисунок 2.8 – Захват круглого листа драпа разными воронками



Односекторный  
(«полулунный») изгиб



Четырехсекторный изгиб. Область  
выпучивания сильно втянута в воронку

Рисунок 2.9 – Захваченные лоскуты джинсовой ткани

Удобным для экспериментов материалом является шинельный суконный драп, потому что этот материал почти не сминается и легко восстанавливает форму после снятия нагрузок. Шинельный драп вырабатывается из шерсти с добавлением других материалов, например хлопка (до 15%). Суконная ткань чаще всего бывает полотняного или саржевого переплетения. Волокна шерсти имеют чешуйки, благодаря которым волокна и нити крепко связаны друг с другом. На поверхности сукна волокна шерсти сбиты и закрывают промежутки между нитями, так что ткань имеет вид войлока.

Чешуйки шерсти внутри переплетения и сволоченные внешние слои шинельного драпа (рисунок 2.10) препятствуют перестройке его внутренней структуры и соответствующему перераспределению сил трения, которые мешали бы восстановлению формы после разгрузки.





Рисунок 2.10 – Поверхность шинельного драпа

Основным материалом при экспериментах по захвату, перемещению и сбросу лоскутов служит драп со следующими механическими свойствами.

Толщина  $h$  материала от 1 до 2 мм. Поверхностная плотность  $\rho_{surf} = 0.8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$ .

Этой плотности соответствует распределенная гравитационная нагрузка на среднюю поверхность  $p = 7.84 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$  (при построении компьютерных моделей длины

выражаются в сантиметрах:  $p = 0.0784 \frac{\text{кг}}{\text{см} \cdot \text{с}^2}$ ).

Изгибную жесткость  $D$  материала можно определить разными способами.

1) Можно рассчитывать изгибную жесткость как цилиндрическую согласно формуле

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

где  $E$  – модуль упругости материала при растяжении «поперек изгиба»,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Эти параметры могут быть взяты из справочников, либо определены опытным путем.

2) Для текстильных материалов применяется способ определения изгибной жесткости из экспериментов по изгибу лоскутов ткани (см. главу 4). Жесткость  $D$  определяется путем компьютерной обработки изображений профилей лоскутов и

сравнения результатов этой обработки с теоретическими профилями. В результате обработки результатов экспериментов по изгибу лоскутов драпа получены значения жесткости  $D$  при изгибе поперек пяти направлений: от направления условного утка до направления условной основы (таблица 2.1). Материал является ортотропным, так что в остальных трех квадрантах данные значения повторяются. Полярная диаграмма жесткости  $D$ , полученная путем сплайновой интерполяции, приведена на рисунке 2.11.

Таблица 2.1 - Изгибная жесткость драпа

Угол направления от утка к «основе»	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
Изгибная жесткость $D$ , кг·см <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	1.25	1.23	1.2	1.3	1.4

В приближенных расчетах будем полагать драп изотропным материалом со средней изгибной жесткостью 1.275 кг·см<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>.

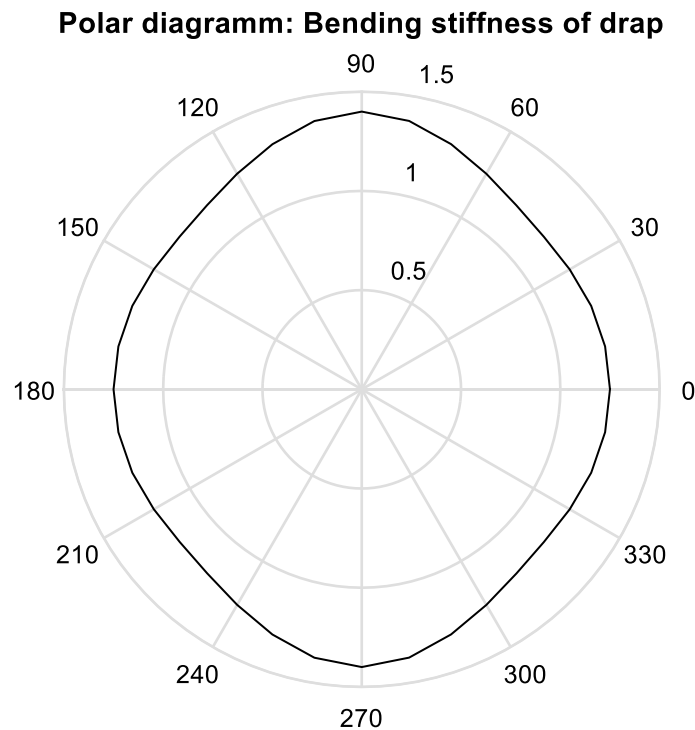


Рисунок 2.11 – Полярная диаграмма изгибной жесткости шинельного драпа

Рассмотрим процесс захвата круглого куска драпа диаметром 750 мм воронкой диаметром  $d_e = 85$  мм, лежавшего на линолеуме (рисунок 2.12). Номинальная мощность вакуумного компрессора  $N_4$ . В начале процесса захвата, когда воронка поднимает центральную часть лоскута примерно на 1 см, подъемная сила со стороны воронки максимальна, так как лоскут присасывается к опорной по-

верхности за счет вакуума в зазоре между ними. Области лоскута растягиваются, центральная часть еще и изгибается. Появляются складки, внутри которых проходит воздух, уменьшая вакуум присоса. Когда воронка поднята на 7, а далее на 15 см, складки формируются в флейты, сила подъема уменьшается. Когда воронка поднята на 40 см, мы наблюдаем конический четырехсекторный изгиб, сила равномерного подъема равна весу лоскута.

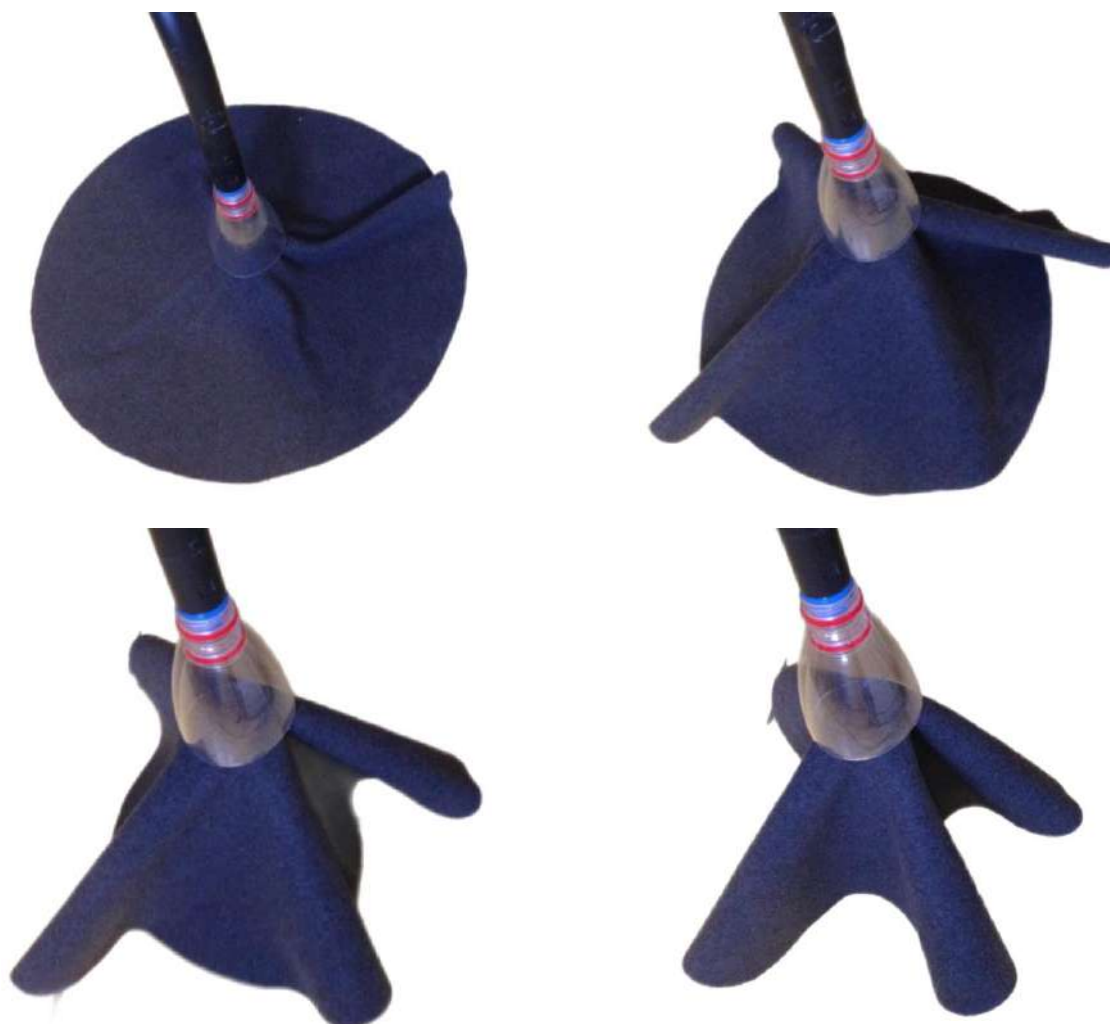


Рисунок 2.12 – Фазы захвата куска драпа диаметром 750 мм

При увеличении номинальной мощности до значения  $N_{\max} = 1900$  Вт можно наблюдать сложную коническую форму изгиба лоскута, изображенную на рисунке 2.13.



Рисунок 2.13 – Сложная коническая форма изгиба захваченного куска ткани

На рисунке 2.14 изображены фазы захвата трех прямоугольных лоскутов, уложенных на линолеуме.



Рисунок 2.14 - Фазы захвата трех прямоугольных лоскутов

Прямоугольные лоскуты Л1 имеют размеры 415×535 мм, лоскут Л2 имеет размеры 535×835 мм. Масса лоскута Л1 равна 0.17 кг, суммарная масса двух лоскутов Л1 и лоскута Л2 составляет 0.72 кг. Захват происходит благодаря образованию складок (флейт) поперек сторон прямоугольников, образуемых лоскутами. При подъеме образуется четырехсекторный конус. На рисунке 2.15 изображены фазы захвата лоскута Л1 с линолеума.

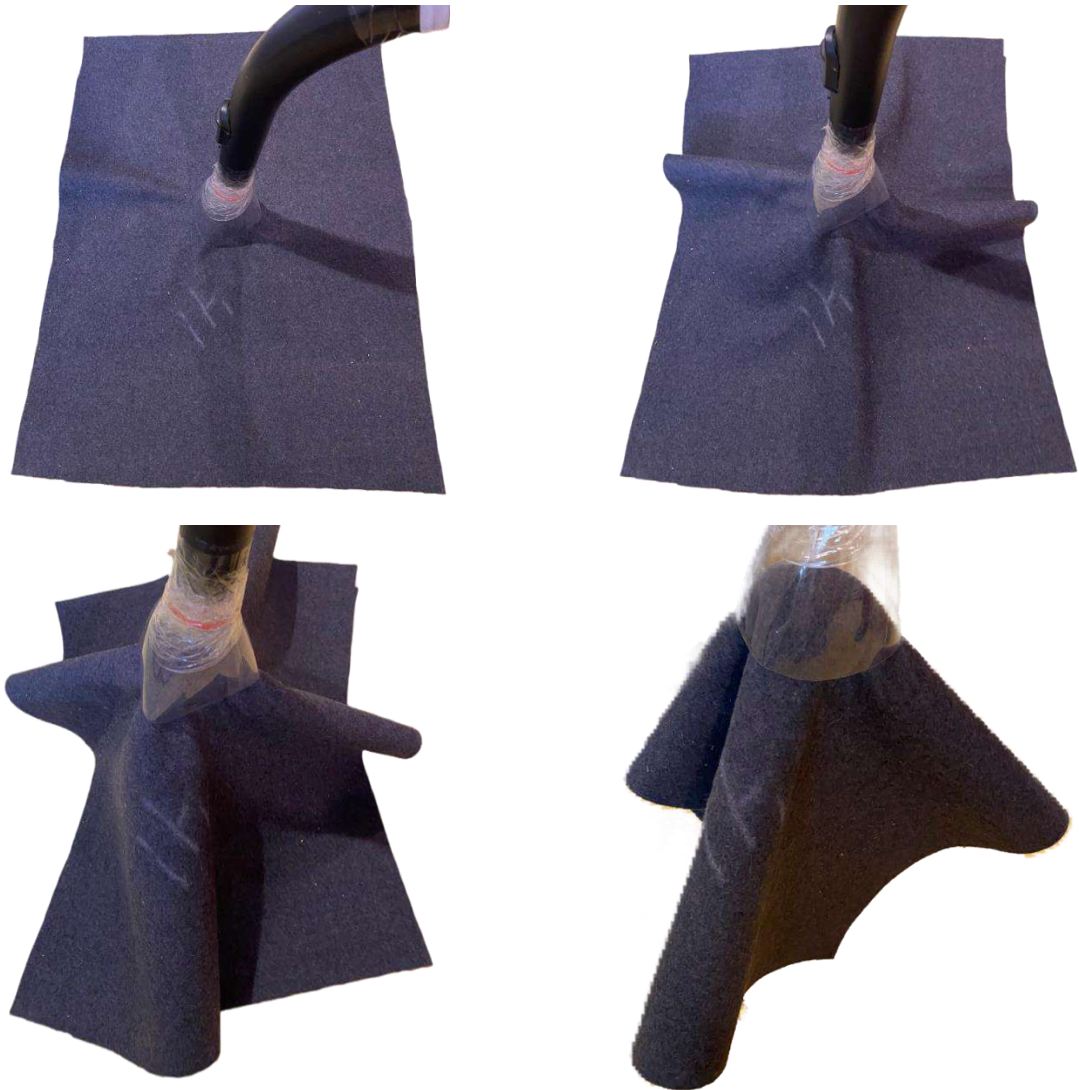


Рисунок 2.15 - Фазы захвата лоскута Л1 с линолеума

В таблице 2.2 приведены результаты замера усилий захвата лоскутов по одиночке или уложенных друг на друга. Использовался электронный силомер WH – A11. В таблице описывается ситуация захвата, результат захвата, максимальная сила  $P_{\text{захв}}$  при подъеме лоскута (или сила  $P_{\text{отр}}$  отрыва воронки от лоскута), диаметр воронки и номинальная мощность вакуумного компрессора.

Таблица 2.2 – Результаты экспериментов по захвату лоскутов драпа вакуумной воронкой

№ опыта	Ситуация	Максимальная сила $P_{\text{захв}}$ при подъеме лоскута или сила отрыва $P_{\text{отр}}$ (Ньютоны)	Диаметр воронки, мм	Номинальная мощность
1	Лоскут Л1 на линолеуме	$8.8 < P_{\text{захв}} < 15.7$	80	$N_4$
2	Лоскут Л1. Отрыв воронки от фиксированного без морщин лоскута Л2 на линолеуме	$P_{\text{отр}} = 7,01$	80	$N_4$
3	Лоскут Л1 на фиксированном лоскуте Л2	$P_{\text{захв}} = 17,4$	75	$N_4$
4	2 лоскута Л1 на линолеуме	$P_{\text{захв}} = 6,4$	75	$N_4$
5	2 лоскута Л1 на линолеуме	$P_{\text{отр}} = 4,5$	75	$N_4$
6	2 лоскута Л1 и лоскут Л2 на линолеуме (рисунок 2.16)	$P_{\text{мзахв}} = 5,35$	75	$N_4$
7	Лоскут Л1 на поверхности «Рубчик»	$P_{\text{захв}} = 11,04$	75	$N_4$
8	Лоскут Л1 на линолеуме (рисунок 2.17)	$P_{\text{захв}} = 24,0$	70	$N_6 = N_{\text{max}}$
9	Лоскут Л1 на фиксированном лоскуте Л2	$P_{\text{захв}} = 27,9$	70	$N_6$
10	2 лоскута Л1 на фиксированном лоскуте Л2	$P_{\text{захв}} = 22,6$	70	$N_6$

Опорная поверхность «Рубчик» имеет полосы (рисунок 2.16).

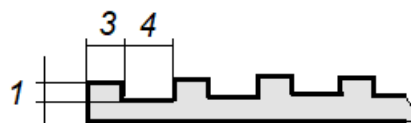


Рисунок 2.16 – Сечение поверхности «Рубчик» (размеры в миллиметрах)

Из опытов следует, что при захвате воронкой велика роль втягиваемой выпученной области лоскута. Эта область и отходящие от нее флейты формируются в течение времени от 1,5 до 2 секунд. Если поднимать лоскут сразу после касания с ним края воронки, то возможен отрыв края воронки от лоскута (опыт 5). Если препятствовать образованию выпученной области, то воронка отрывается при сравнительно небольшом усилии (опыт 2). Видно, что при уменьшении диаметра воронки и увеличении мощности максимальная подъемная сила увеличивается (опыты 1 и 8).

Подъемная сила зависит от показателей шероховатости опорной поверхности (опыты 1, 3 и 9). При наличии каналов подвода воздуха значительных размеров эта сила уменьшается (опыт 7).

Когда на линолеум уложены 2 или 3 лоскута, они захватываются все сразу (опыты 4 и 6).

На рисунке 2.17 представлена коническая форма изгиба лоскута Л1, захваченного внутрь воронки диаметром 70 мм на глубину 10 см при номинальной мощности  $N_6$ . Форма складок сохраняется при угле  $30^\circ$  наклона оси воронки к горизонту. Контур сечения лоскута сферой с центром в конической вершине имеет характерную форму, состоящую из нескольких «зубчиков» (рисунок 2.18), довольно часто встречающуюся в ситуациях сильного втягивания конической вершины внутрь воронки.



Рисунок 2.17 – Сложный изгиб лоскута, втянутого в воронку на 10 см

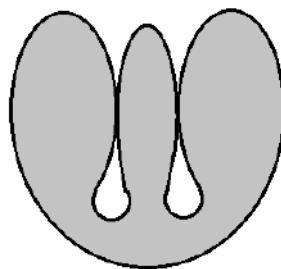


Рисунок 2.18 – Контур края лоскута с «зубчиками»

Более подробная информация о зависимости силы захвата от номинальной мощности представлена в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Результаты экспериментов по захвату прямоугольных лоскутов драпа вакуумной воронкой

Ситуация	Максимальная сила подъема лоскута, Ньютоны	Диаметр воронки, мм	Номинальная Мощность
Лоскут Л1 на линолеуме. Лоскут втягивается внутрь воронки на 2 см.	$P_{ЗАХВ} = 6,0$	32	$N_1$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 7,8$	32	$N_2$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 7,8$	32	$N_3$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 12,9$	32	$N_4$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 11,8$	32	$N_5$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 8,8$	32	$N_6$
Лоскут Л1 на линолеуме	$P_{ЗАХВ} = 21,3$	70	$N_1$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 21,3$	70	$N_2$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 17,3$	70	$N_3$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 41,2$	70	$N_4$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 26,0$	70	$N_5$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 26,5$	70	$N_6$
Лоскут Л2 на линолеуме	$P_{ЗАХВ} = 29,4$ Отрыв: $P_{отр} = 15,7$	70	$N_1$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 22,0$ Отрыв: $P_{отр} = 22,6$	70	$N_2$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 33,4$	70	$N_3$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 25,5$	70	$N_4$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 34,3$	70	$N_5$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 29,2$	70	$N_6$
Лоскут Л1 на фиксированном лоскуте Л2	$P_{ЗАХВ} = 19,6$	70	$N_1$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 26,5$	70	$N_3$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 20,5$	70	$N_4$
(то же)	$P_{ЗАХВ} = 25,9$	70	$N_6$
Лоскут Л1 на пленке ПЭ и на фиксированном лоскуте Л2. ПЭ пленка иногда захватывается, иногда – нет.	$P_{ЗАХВ} = 2,9$		$N_1 - N_6$
Лоскут Л1 на линолеуме	Отрыв воронки. $P_{отр} = 26,5$	102	$N_1$
(то же)	Отрыв воронки. $P_{отр} = 46,7$	102	$N_3$
(то же)	Отрыв воронки. $P_{отр} = 47,1$	102	$N_4$

На основании этих опытов делаем следующие выводы.

1) При увеличении диаметра воронки от 32 мм до 70 мм подъемная сила увеличивается примерно в 2 раза.



2) Изменение номинальной мощности вакуумного насоса от  $N_1$  до  $N_6$  не так значительно влияет на подъемную силу, как диаметр воронки. Однако увеличение мощности предотвращает отрыв воронки от лоскута.

3) Воронка большого диаметра не годится для захвата, поскольку не способна создать нужную выпученную область.

4) Наличие полиэтиленовой пленки между лоскутами резко уменьшает подъемную силу, т. к. пленка препятствует присасыванию нижнего лоскута.

На рисунке 2.19 изображен прямоугольный лоскут драпа ЛЗ размерами 310 x 430 мм, захватываемый воронкой диаметром 25 мм при номинальной мощности насоса  $N_3$  и  $N_4$ .



Рисунок 2.19 – Фазы захвата лоскута ЛЗ воронкой диаметром 25 мм

Поднятый лоскут образует 4-секторный конус. Флейты обращены выпуклостью вверх и вытянуты вдоль образующих, проходящих через середины сторон прямоугольника.

На рисунке 2.20 представлен асимметричный захват лоскута ЛЗ. Поднятый лоскут имеет форму односекторного «полулунного» конуса. На рисунке 2.21 изображен захват лоскута ЛЗ воронкой диаметром 18 мм. Наблюдается трехсекторный конический изгиб с наличием плоскости симметрии.



Рисунок 2.20 – Асимметричный захват лоскута ЛЗ



Рисунок 2.21 – Захвата лоскута ЛЗ воронкой диаметром 18 мм

Коническую форму приобретает лоскут при захвате его воронкой с щелеобразным отверстием (рисунок 2.22). Фазы захвата изображены на рисунке 2.23. При мощности  $N_4$  гибкие края щели раздвигаются, и лоскут надежно захватывается. Высвобождение лоскута из захвата может производиться реверсом потока воздуха в воронке. Захваченный лоскут имеет форму изгиба с «зубчиками». Такого

же типа и изгиб круглого лоскута диаметром 270 мм, захваченного щелеобразным захватом (рисунок 2.24).

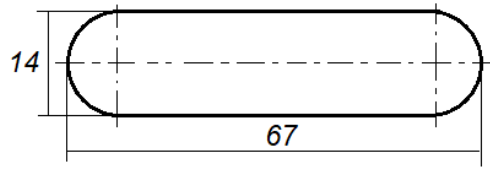


Рисунок 2.22 – Щелеобразное отверстие в воронке



Рисунок 2.23 – Фазы захвата лоскута ЛЗ щелеобразным захватом



Рисунок 2.24 – Коническая с «зубчиками» форма изгиба круглого лоскута

## 2.3. Исследование конической формы лоскута, захваченного вакуумной воронкой

### 2.3.1. Построение конической срединной поверхности лоскута

Пусть недеформированный (плоский) лоскут располагается в горизонтальной плоскости  $XOY$  и его потенциальная энергия в этом положении равна нулю. Ось  $OZ$  абсолютной системы координат направлена вертикально вверх. Полюс  $O$  является вершиной конической поверхности; тогда уравнение (1.4) имеет вид:

$$\vec{\rho} = r\vec{t}(s).$$

Форма конической поверхности описывается последовательностью точек пересечения образующими сферической поверхности единичного радиуса. Точки пересечения составляют на единичной сфере кривую, называемую здесь опорной направляющей. Прообразом опорной направляющей на плоской развертке лоскута является единичная окружность, точки которой задаются натуральным параметром  $s = 1 \cdot \alpha$  или углом  $\alpha$ , измеряемым в радианах (рисунок 2.25). Точки развертки всей срединной поверхности задаются полярными координатами  $(r, \alpha)$ .

Положение точки  $M$  – точки пересечения образующей с единичной сферой – задаем радиус-вектором  $\vec{t}(\alpha)$ , который, в свою очередь, можно задавать азимутальным углом  $\theta$  и углом возвышения  $\gamma$  (углом наклона вектора  $\vec{t}(\alpha)$  к плоскости  $XOY$ ).

Обозначим:

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - орты координатных осей,

$$s_\theta = \sin \theta, c_\theta = \cos \theta, s_\gamma = \sin \gamma, c_\gamma = \cos \gamma, \vec{\xi} = c_\theta \vec{e}_1 + s_\theta \vec{e}_2.$$

Тогда

$$\vec{t} = c_\gamma \vec{\xi} - s_\gamma \vec{e}_3 = c_\gamma c_\theta \vec{e}_1 + c_\gamma s_\theta \vec{e}_2 - s_\gamma \vec{e}_3. \quad (2.1)$$

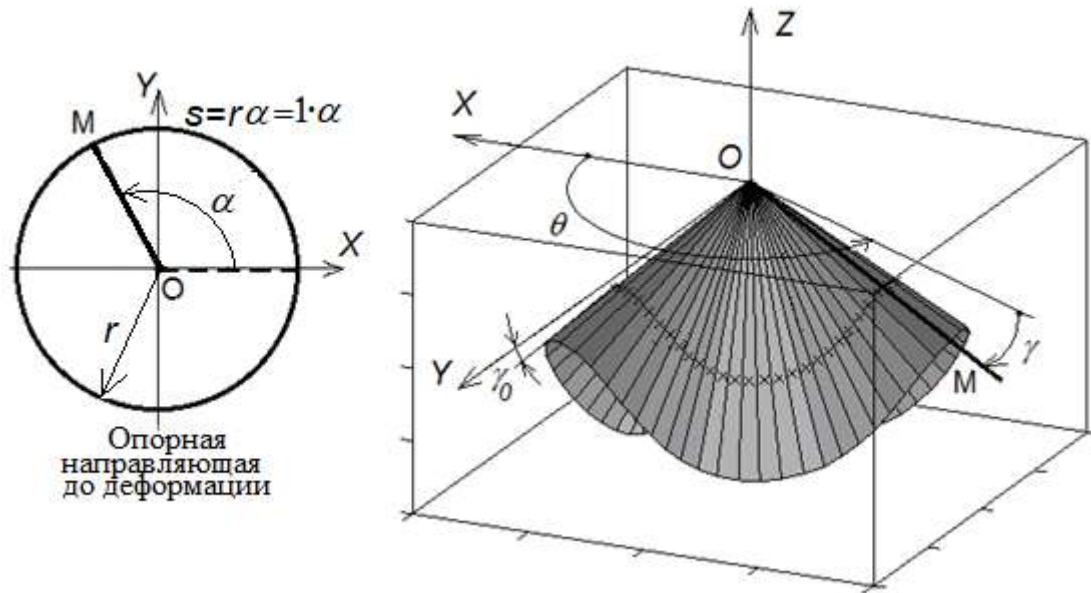


Рисунок. 2.25 - Параметры конической поверхности

Касательный вектор к опорной направляющей (рисунок 2.26):

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{t}}{d\alpha} = \dot{\vec{t}} = (-s_\gamma c_\theta \dot{\gamma} - c_\gamma s_\theta \dot{\theta})\vec{e}_1 + (c_\gamma c_\theta \dot{\theta} - s_\gamma s_\theta \dot{\gamma})\vec{e}_2 - c_\gamma \dot{\gamma} \vec{e}_3. \quad (2.2)$$

Точка означает дифференцирование по  $\alpha$ .

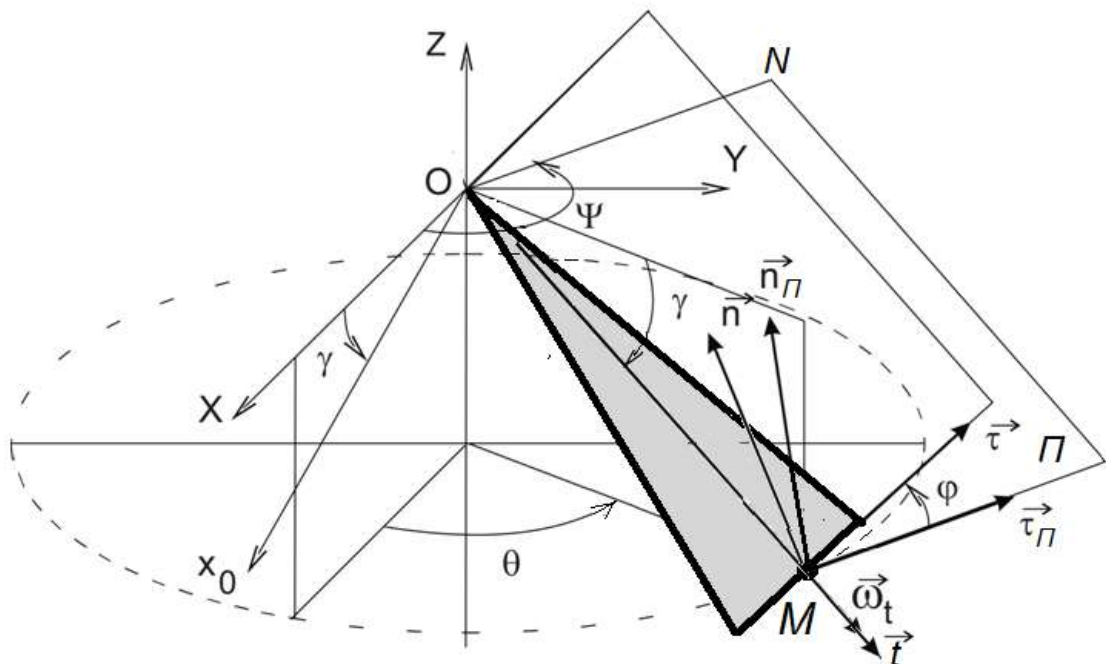


Рисунок 2.26 - Малый фрагмент конической поверхности

Нормаль к конической поверхности:

$$\vec{n} = \vec{t} \times \vec{\tau} = (s_\gamma c_\gamma c_\theta \dot{\theta} - s_\theta \dot{\gamma})\vec{e}_1 + (c_\theta \dot{\gamma} + s_\gamma c_\gamma s_\theta \dot{\theta})\vec{e}_2 + c_\gamma^2 \dot{\theta} \vec{e}_3. \quad (2.3)$$

Из (2.1), (2.2) и (2.3) находим вектор кривизны  $\vec{K}$  опорной направляющей:

$$\vec{K} = \ddot{\vec{t}} = \dot{\vec{\tau}} = (-c_\gamma c_\theta \dot{\gamma}^2 - s_\gamma c_\theta \ddot{\gamma} + 2s_\gamma s_\theta \dot{\gamma} \dot{\theta} - c_\gamma s_\theta \ddot{\theta} - c_\gamma c_\theta \dot{\theta}^2) \vec{e}_1 + (-c_\gamma s_\theta \dot{\gamma}^2 - s_\gamma s_\theta \ddot{\gamma} - 2s_\gamma c_\theta \dot{\gamma} \dot{\theta} + c_\gamma c_\theta \ddot{\theta} - c_\gamma s_\theta \dot{\theta}^2) \vec{e}_2 + (s_\gamma \dot{\gamma}^2 - c_\gamma \ddot{\gamma}) \vec{e}_3.$$

Одна из главных кривизн конической поверхности равна нулю. Вторая главная кривизна, определяющая изгибающий момент внутри упругой оболочки [73], есть величина

$$k = -\vec{K} \cdot \vec{n}.$$

С помощью символьных преобразований в среде MATLAB получаем:

$$k = (c_\gamma c_\theta \dot{\gamma}^2 + s_\gamma c_\theta \ddot{\gamma} - 2s_\gamma s_\theta \dot{\gamma} \dot{\theta} + c_\gamma s_\theta \ddot{\theta} + c_\gamma c_\theta \dot{\theta}^2)(s_\theta \dot{\gamma} - s_\gamma c_\gamma c_\theta \dot{\theta}) + (-c_\gamma s_\theta \dot{\gamma}^2 - s_\gamma s_\theta \ddot{\gamma} - 2s_\gamma c_\theta \dot{\gamma} \dot{\theta} + c_\gamma c_\theta \ddot{\theta} - c_\gamma s_\theta \dot{\theta}^2)(c_\theta \dot{\gamma} + s_\gamma c_\gamma s_\theta \dot{\theta}) + (s_\gamma \dot{\gamma}^2 - c_\gamma \ddot{\gamma}) c_\gamma^2 \dot{\theta}.$$

Находим орт касательной к горизонтальной окружности, проходящей через точку  $M$ :

$$\vec{\tau}_\Pi = (\vec{e}_3 \times \vec{t}) / |\vec{e}_3 \times \vec{t}| = -s_\theta \vec{e}_1 + c_\theta \vec{e}_2.$$

Пусть  $\Pi$  - плоскость, касательная к прямому круговому конусу с углом  $\gamma$ , содержащая векторы  $\vec{t}$  и  $\vec{\tau}_\Pi$ . Тогда  $\vec{n}_\Pi = \vec{t} \times \vec{\tau}_\Pi$  - нормаль к  $\Pi$ . Имеем далее:

$$\vec{\tau} = c_\gamma \dot{\theta} (-s_\theta \vec{e}_1 + c_\theta \vec{e}_2) - \dot{\gamma} [s_\gamma (c_\theta \vec{e}_1 + s_\theta \vec{e}_2) + c_\gamma \vec{e}_3] = c_\gamma \dot{\theta} \vec{\eta} - \dot{\gamma} \vec{\tau}_\Pi.$$

Рассмотрим угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{\eta}$  и  $\vec{\tau}$ , т.е. между касательными плоскостями к круговому конусу и к деформированному. Тогда справедлива следующая интерпретация:

$$\dot{\theta} \cos \gamma = \cos \varphi = c_\varphi, \quad -\dot{\gamma} = \sin \varphi = s_\varphi.$$

Тождество  $c_\varphi^2 + s_\varphi^2 = 1$ , или

$$(\dot{\theta} \cos \gamma)^2 + \dot{\gamma}^2 = 1 \quad (2.4)$$

выражает нерастяжимость срединной поверхности. Действительно, лагранжевы координаты  $r, \alpha$  некоторой точки развертки сохраняются за нею и после дефор-

мации. Когда лоскут плоский,  $r, \alpha$  - полярные координаты точки лоскута, и линейный элемент поверхности есть  $ds_0^2 = dr^2 + (r d\alpha)^2$ . После деформации  $ds^2 = dr^2 + r^2(\cos^2 \gamma d\theta^2 + d\gamma^2)$ , и из условия сохранения метрики  $ds^2 = ds_0^2$  следует выражение (2.4). Оно же обеспечивает равенство единице модулей векторов  $\vec{\tau}, \vec{n}$ .

Из (2.4) следует, что, когда складка поверхности начинает подгибаться назад и  $\dot{\theta} = 0$ , должно выполняться  $\dot{\gamma} = d\gamma/d\alpha = \pm 1$ , т. е. касательная плоскость проходит через ось  $Oz$ . Когда образующая конуса стремится занять вертикальное положение, и  $\cos \gamma \rightarrow 0$ , то  $\dot{\theta} \rightarrow \infty$  или  $\dot{\gamma} = \pm 1$ .

С учетом (2.4) и выражения  $c_\gamma \ddot{\theta} - s_\gamma \dot{\gamma} \dot{\theta} = \dot{c}_\varphi$  получаем:

$$\begin{aligned} k &= s_\gamma c_\gamma^2 \dot{\theta}^3 + c_\gamma \dot{\gamma} \dot{\theta} + 2s_\gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\theta} - c_\gamma \dot{\gamma} \ddot{\theta} = c_\gamma \ddot{\theta} + s_\gamma \dot{\theta} - \dot{\gamma}(c_\gamma \ddot{\theta} - s_\gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}) = \\ &= s_\gamma \dot{\theta} - c_\varphi \dot{s}_\varphi + s_\varphi \dot{c}_\varphi = s_\gamma \dot{\theta} - \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогичное выражение в других обозначениях получено в работе [86].

Рассмотрим трехгранник  $\{\vec{t}, \vec{\tau}, \vec{n}\}$ , сопровождающий точку  $M$  при ее движении по опорной направляющей. Пусть  $\vec{\omega} = \omega_t \vec{t} + \omega_n \vec{n} + \omega_\tau \vec{\tau}$  - вектор угловой скорости трехгранника (аналог вектора Дарбу). Тогда  $\vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{t}$ . Из соотношений

$$\vec{\tau} \times \vec{n} = \vec{t}, \quad \vec{t} \times \vec{\tau} = \vec{n}, \quad \vec{n} \times \vec{t} = \vec{\tau}$$

следует

$$\vec{\tau} = \omega_n \vec{n} \times \vec{t} + \omega_\tau \vec{\tau} \times \vec{t} = \omega_n \vec{\tau} - \omega_\tau \vec{n},$$

и тогда  $\omega_n = 1$ ,  $\omega_\tau = 0$ , вектор кривизны равен

$$\vec{K} = (\vec{n} + \omega_t \vec{t}) \times \vec{\tau} = -\vec{t} + \omega_t \vec{n}.$$

Геодезическая кривизна поверхности в точке  $M$  при ее изгибе остается равной единице, а нормальная кривизна равна  $k = -k_{c,n} = -\omega_t$ . Обозначим:

$$\omega_t = \frac{d\beta}{d\alpha} = \dot{\beta}.$$

Из (2.5) получаем выражение для проекции абсолютной угловой скорости угловой трехгранника на ось  $OM$  :

$$\dot{\beta} = \omega_t = \dot{\varphi} - \dot{\theta} \sin \gamma. \quad (2.6)$$

Действительно, ось  $OM$  интерпретируем как ось собственного вращения с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ , углом нутации полагаем угол  $\Theta = \pi/2 + \gamma$  (тогда  $\cos \Theta = -s_\gamma$ ,  $\sin \Theta = c_\gamma$ ,  $\dot{\Theta} = \dot{\gamma}$ ), углом прецессии  $\Psi = \pi/2 + \theta$  (тогда  $\sin \Psi = c_\theta$ ,  $\cos \Psi = -s_\theta$ ,  $\dot{\Psi} = \dot{\theta}$ ). Ось  $ON$  трактуем как линию узлов. Кинематические уравнения Эйлера для проекций угловой скорости сферического движения твердого тела на подвижные оси [91] принимают вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sin \varphi \sin \Theta \dot{\Psi} + \cos \varphi \dot{\Theta} = \dot{\theta} s_\varphi c_\gamma + \dot{\gamma} c_\varphi = 0 = \omega_\tau, \\ \omega_y &= \cos \varphi \sin \Theta \dot{\Psi} - \sin \varphi \dot{\Theta} = \dot{\theta}^2 c_\gamma^2 + \dot{\gamma}^2 = 1 = \omega_n, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \cos \Theta \dot{\Psi} = \dot{\varphi} - \sin \gamma \dot{\theta} = \dot{\beta} = \omega_t. \end{aligned}$$

Из формулы (2.6) находим угол  $\beta_c$ , соответствующий полному конусу:

$$\beta_c = \int_0^{2\pi} \dot{\beta} d\alpha = \int_0^{2\pi} \dot{\varphi} d\alpha - \int_0^{2\pi} \dot{\theta} \sin \gamma d\alpha. \quad (2.7)$$

Отсутствие самопересечений требует выполнения условия

$$\varphi_c = \int_0^{2\pi} \dot{\varphi} d\alpha = 0.$$

Отметим, что угол  $\beta(\alpha) = \int_0^\alpha \dot{\beta} d\alpha$  поворота трехгранника вокруг вектора  $\vec{t}$ ,

согласно теореме Гамильтона [91], равен телесному углу, образованному вращением вектора  $\vec{t}$ . Пусть  $\Omega_E$  - телесный угол между экватором единичной сферы и опорной направляющей, равный площади соответствующей части сферы:

$$\Omega_E = \iint_S \sin \Theta d\Theta d\Psi,$$

где  $S$  - область изменения переменных. Имеем:

$$\Omega_E = \iint_S \sin \Theta d\Theta d\Psi = \iint_S \cos \gamma d\gamma d\theta = \iint_S d(\sin \gamma) d\theta = \int_\theta \sin \gamma d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \gamma \dot{\theta} d\alpha.$$



С учетом (2.7) получаем:

$$\beta_c = -\Omega_E = \Omega_I - 2\pi,$$

где  $\Omega_I$  - телесный угол внутри опорной направляющей,  $2\pi$  - величина телесного угла для полусферы.

Сравним складчатый конус с прямым круговым конусом. Пусть прямой круговой конус, задаваемый углом  $\gamma = const$ , имеющий угол развертки  $A = 2\pi \cos \gamma$ , радиус основания  $r$  (рисунок 2.27). Для него имеем:

$$ds = t d\alpha = r d\theta \rightarrow \frac{d\theta}{d\alpha} = \dot{\theta} = \frac{t}{r} = \frac{t}{t \cos \gamma} = 1/\cos \gamma,$$

длина дуги развертки  $s = tA = 2\pi r$ , и тогда

$$\dot{\theta} = \frac{t}{r} = \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{2\pi}{A},$$

$$\cos \varphi = \dot{\theta} \cos \gamma = 1, \sin \varphi = -\dot{\gamma} = 0 \rightarrow \varphi = 0 = const,$$

$$\dot{\beta} = \dot{\varphi} - \dot{\theta} \sin \gamma = -\tan \gamma = const. \beta(\alpha) = -\alpha \tan \gamma.$$

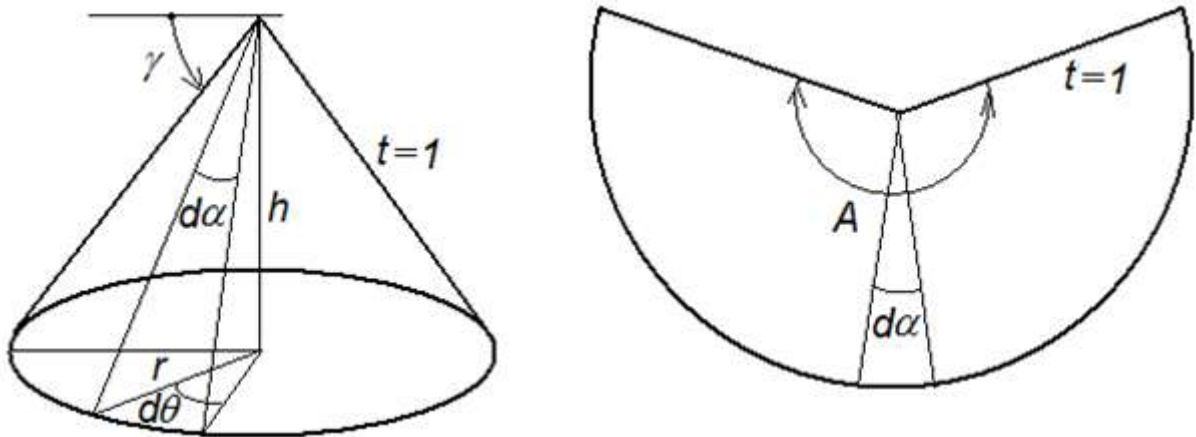


Рисунок 2.27 – Прямой круговой конус и его развертка

Крайнее значение угла  $\beta$ :  $\beta_c = -A \cdot \tan \gamma = -2\pi \sin \gamma$ .

Телесный угол внутри конуса:  $\Omega_I = 2\pi(1 - \sin \gamma)$ .

### 2.3.2. Основные принципы моделирования конической поверхности

Коническую поверхность представляем как многогранную поверхность следующим образом.

- 1) Задаемся шагом  $\Delta\alpha$  основного параметра, определяющим размер сектора одной грани.
- 2) Задаемся двумя параметрами  $\gamma_0, \beta_0$ , определяющими положение первой (опорной) грани в пространстве. Систему координат  $OXYZ$  поворачиваем на угол  $\gamma_0$  вокруг оси  $OY$ , преобразуем в систему  $Ox_1y_1z_1$  так, что ось  $Ox_1$  занимает положение первой (базовой) образующей  $Ox_1$  (рисунок 2.28).
- 3) Систему координат  $Ox_1y_1z_1$  поворачиваем на угол  $\beta_0$  вокруг оси  $Ox_1$  так, что плоскость  $Ox_1y_1z_1$  занимает положение первой грани моделируемой поверхности, а ось  $Oz_1$  занимает положение нормали  $Oz_1$  к этой грани.
- 4) Систему координат  $Ox_1y_1z_1$  поворачиваем на угол  $\Delta\alpha$  вокруг оси  $Oz_1$  так, что ось  $Ox_1$  переходит в положение  $Ox_2$ , связанное со следующей образующей. Затем систему координат поворачиваем вокруг оси  $Ox_2$  на угол  $\Delta\beta_1$  и переходим к системе координат  $Ox_2y_2z_2$ , связанной со второй гранью.
- 5) Переходим к 3-й и последующим граням аналогично пункту 4.

Таким образом, при возрастании числа граней  $n \rightarrow \infty$  получаем коническую поверхность, задаваемую функцией

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \dot{\beta}(\alpha). \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) можно трактовать как натуральное уравнение направляющей на сфере.

Как известно [92], натуральные уравнения кривой задают форму кривой с точностью до масштаба и положения кривой. Условие п.1 о размещении кривой на единичной сфере задает ее масштаб. Условия, описанные в пунктах 2 и 3, задают положение этой кривой.

Условие 3 можно сформулировать иначе: пусть  $\beta_0 = 0$ , и тогда базовая грань направлена по касательной к прямому круговому конусу с углом  $\frac{\pi}{2} - \gamma_0$  между высотой и образующей ( $\gamma_0$  - экстремальное значение угла  $\gamma$ ).

В результате последовательного построения граней последняя грань должна соединиться с первой гранью. Не допускается самопересечение поверхности. В расчетах удобнее построение граней осуществлять в двух направлениях от базовой грани.

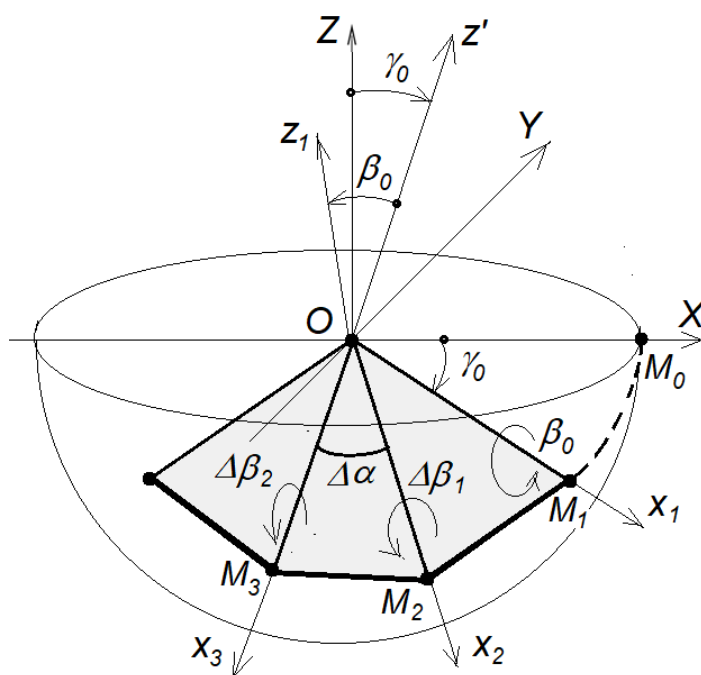


Рисунок 2.28 – Грани модели конической поверхности

### 2.3.3. Состояние материала лоскута в области конической вершины

Опыты показывают, что при захвате текстильного лоскута вакуумной воронкой та часть лоскута, которая попадает внутрь воронки, образует область выпучивания. По мере приближения к теоретической вершине конуса нормальная кривизна направляющей срединной поверхности, как и кривизна «переломленной» образующей, устремляется к бесконечности, что означает бесконечное возрастание изгибающих моментов. Поскольку радиус кривизны не может быть

меньше, чем половина толщины лоскута, форма деформации срединной поверхности усложняется за счет возникновения участков ее растяжений и сдвигов. Область вокруг конической вершины может быть определена путем расчета расстояния  $R_{p,\alpha}$  от точки  $O$  до того места, в котором достигается некоторое предельное значение напряжения  $[\sigma] = \sigma_p$  внутри материала на срединной поверхности лоскута, вызывающее перестройку структуры переплетения нитей внутри материала.

В статье [93] выпученная область вокруг конической вершины названа ядром конической дислокации. Здесь, как и в статье [94], изучается конический изгиб круглого листа радиусом  $R$ , вдавливаемого силой  $P$  в цилиндр радиусом  $R_c < R$  на глубину  $d$ . Вводится параметр состояния  $\varepsilon = d / R_c$ . Через него выражается радиус сингулярного ядра дислокации:

$$R_p \sim \varepsilon^{-0.33 \pm 0.01} \text{ для } \varepsilon < 0.1 \text{ и } R_p \sim \varepsilon^{-0.50 \pm 0.02} \text{ для } \varepsilon \geq 0.1.$$

При этом лист считается тонким [73], т. е. выполняется условие:  $h / R < 0.1$ , где  $h$  – толщина листа,  $R$  – его характерный размер.

В статье [86] исследован конический изгиб круглого тяжелого листа, подвешенного в центральной точке  $O$ . Параметром состояния служит величина

$$\xi = R / l_g. \quad (2.9)$$

Здесь  $l_g = \sqrt[3]{D / \rho_s g}$  – так называемая гравитационная длина цилиндрически изгибающегося гибкого тяжелого прямоугольного листа, имеющего изгибную жесткость  $D$  и поверхностную плотность  $\rho_s$ ,  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ . Величина ядра дислокации  $R_p$  и параметр  $\xi$  определяют характер деформации.

Проблема ядра дислокации изучается и в работе [95].

Исследовать форму захваченного лоскута мы предполагаем путем минимизации его потенциальной энергии в равновесном состоянии. Если учитывать энергию лоскута в выпученной области, то надо изучать геометрию этой области. На рисунке 2.29 изображен лист бумаги после захвата его вакуумной воронкой и втягивания внутрь воронки. Тенденции образования специфических ребер шаржиро-

ваны искусственно вызванными переломами. Вместо конической вершины наблюдается почти плоская область. Лист похож на накидку или скатерть, брошенную на небольшой стол. На рисунке 2.30 представлены лоскуты разного драпа диаметром 270 мм, опирающиеся на острие в центральной точке и свободно свисающий. Области выпучивания невелики по площади. Форма изгиба близка к накидке с тремя симметричными фолдами. Форма накидки проявляется в случае опирания лоскута на торец цилиндрического стержня (рисунок 2.31). На рисунке 2.32 видна втянутая в вакуумную воронку часть лоскута, похожая на растянутую мембрану.

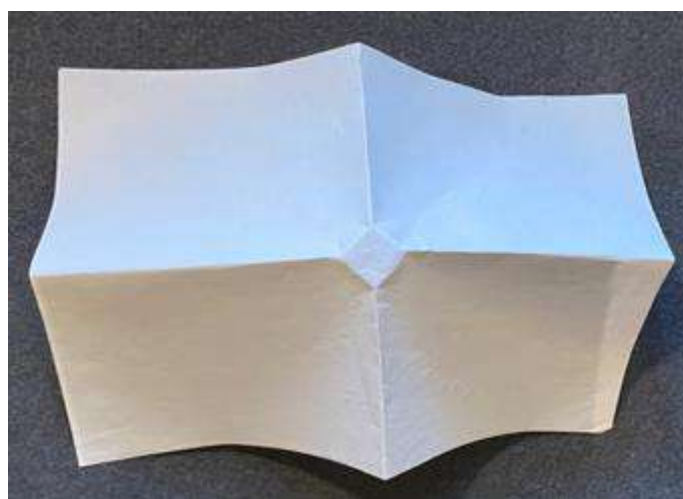


Рисунок 2.29 – Бумажный лист после захвата вакуумной воронкой



Рисунок 2.30 - Лоскуты драпа, опирающиеся на острие



Рисунок 2.31 - Лоскут драпа опирается на торец цилиндра диаметром 22 мм



Рисунок 2.32 – Втянутая в воронку область лоскута

Один из вариантов моделирования области вблизи конической вершины является представление ее в виде развертывающейся накидки («скатерти»), деформированная часть которой состоит из плоских (белых) лепестков и затемненных конических областей (рисунок 2.33). Будем пренебрегать энергией выпученных

областей вокруг конических вершин и ребер отгибания лепестков ввиду малости их площадей сравнительно с площадью лоскута.

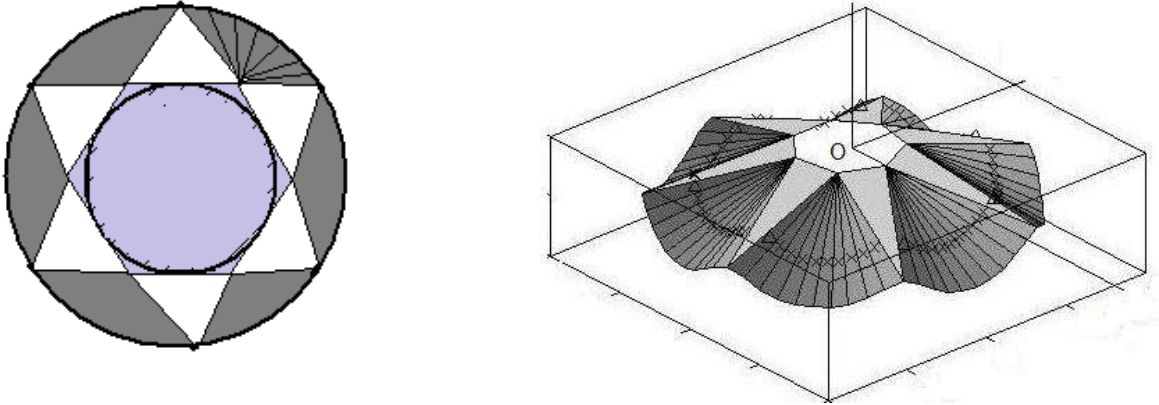


Рисунок 2.33 – Развертка накладки и ее компьютерная модель

#### 2.3.4. Потенциальная энергия лоскута как упругой тяжелой оболочки

Захватываемый и перемещаемый лоскут ткани считаем тяжелой упругой оболочкой, потенциальная энергия которой складывается из упругой и гравитационной энергии.

Рассмотрим упругую энергию изгиба. Нормальная кривизна направляющей  $k_r$  выражается через нормальную кривизну  $k_n = -\beta' = -\frac{d\beta}{d\alpha}$  в точках опорной направляющей:  $k_r = \frac{1}{r}k_n = -\frac{\beta'}{r}$ . Тогда упругая энергия рассчитывается по формуле (1.12), которая будет иметь вид:

$$U_e = 0.5 \iint_F D(\alpha, r) \frac{\beta'^2(\alpha)}{r} d\alpha dr.$$

Коническая вершина  $O$  окружена сингулярной областью переменного радиуса  $R_{p,\alpha}(\alpha)$ . В этой области срединная поверхность может иметь растяжения и сдвиги, а микроструктура ткани искажается. Площадь сингулярной области мала по сравнению с площадью всего лоскута (рисунок 2.32), поэтому мы упругой энергией этой области пренебрегаем. Обозначив как  $R_\alpha(\alpha)$  радиус края лоскута, получаем:

$$U_e = 0.5 \int_0^{2\pi} D(\alpha) \beta'^2 \left( \int_{R_{p,\alpha}}^{R_\alpha} \frac{dr}{r} \right) d\alpha = 0.5 \int_0^{2\pi} D \beta'^2 \ln \frac{R_\alpha}{R_{p,\alpha}} d\alpha.$$

В расчетах формы круглого изотропного лоскута, захваченного в центре, будем полагать  $R_{p,\alpha} = R_p = const$ , и тогда

$$U_e = 0.5 D \ln \frac{R}{R_p} \int_0^{2\pi} \beta'^2 d\alpha. \quad (2.10)$$

**Гравитационная энергия.** Пусть элементарный сектор круга раствором  $d\alpha$  имеет радиус  $R_\alpha$ . Центр тяжести сектора находится на расстоянии  $2R_\alpha/3$  от вершины, площадь сектора равна  $0.5R_\alpha^2 d\alpha$ . Если  $S_Q$  - площадь всей плоской развертки лоскута, то радиус-вектор центра тяжести  $C$  конической поверхности по отношению к полюсу  $O$  определяется выражением

$$\vec{\rho}_C = \frac{1}{3S_Q} \int_0^{2\pi} R_\alpha^3 \vec{t} d\alpha.$$

Для круглого изотропного лоскута, подвешенного в центральной точке, получаем:

$$Z_C = -\frac{R}{3\pi} I_3, \text{ где } I_3 = \int_0^{2\pi} s_\gamma d\alpha,$$

где  $s_\gamma = \sin \gamma$ . Тогда гравитационная потенциальная энергия лоскута:

$$U_g = \pi \rho_s g R^2 z_C = -\frac{\rho_s g R^3}{3} I_3. \quad (2.11)$$

Итак, упругая энергия выражается через функцию  $\dot{\beta}(\alpha)$ , а гравитационная энергия – через функцию  $s_\gamma(\alpha)$ . Используя методику, описанную в работе [96] получаем уравнение связи между этими функциями:

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\ddot{s}_\gamma + s_\gamma}{\dot{\beta}} \right) = -s_\gamma \cdot \dot{\beta}, \text{ или } s_\gamma^2 + \dot{s}_\gamma^2 + \left( \frac{\ddot{s}_\gamma + s_\gamma}{\dot{\beta}} \right)^2 = 1. \quad (2.12)$$

Таким образом, определение формы конической поверхности является решением вариационной задачи о минимизации функционала энергии, складываю-



щегося из частей (2.10) и (2.11) при условии (2.12), которое можно трактовать как уравнение неголономной связи. Ввиду сложности условия (2.12) задачу для прикладных нужд удобнее всего решать числовыми методами. При этом срединная поверхность лоскута представляется как многогранная поверхность из  $n$  треугольных граней с общей вершиной  $O$ .

Полагая изгибную жесткость и среднюю кривизну направляющих внутри грани с номером  $k$  постоянными, можно представить упругую энергию грани в следующем виде:

$$U_{e,k} = 0.125D \frac{(\Delta\beta_k + \Delta\beta_{k+1})^2}{\Delta\alpha_k} \ln \frac{R_{g,k}}{R_{p,k}}. \quad (2.13)$$

Здесь  $\Delta\beta_k + \Delta\beta_{k+1}$  - углы между нормальными к данной грани и соседними гранями,  $\Delta\alpha_k$  - раствор грани,  $R_{g,k}$  - радиус кругового сектора, площадь которого равна площади грани,  $R_{p,k}$  - радиус удаляемой из расчетов зоны вокруг конической вершины. Он находится из условия (1.10) достижения на границе зоны таких изгибных напряжений, при которых происходит перестройка микроструктура ткани.

Гравитационная энергия грани определяется положением ее центра тяжести.

## **2.4. Исследование формы изгиба лоскута, захваченного плоским вакуумным захватом**

### **2.4.1. Опыты по захвату лоскутов драпа плоской прямоугольной воронкой**

Воронкой прямоугольной формы размерами 152 x 106 мм и глубиной 27 мм пытаемся захватить лоскут Л1 с поверхности линолеума. При номинальной мощности от  $N_1$  до  $N_3$  захвата не происходит; отрыв воронки при силе отрыва от 50 до 120 Н. При мощности  $N_6$  отрывы воронки перемежаются со случаями захвата и подъема лоскута с образованием 5 или 4 складок.

Воронка далее закрывается снизу крышкой с 6 отверстиями (рисунок 2.34). Мощности варьируются от  $N_3$  до  $N_6$ . Если воронку захвата сначала сильно прижать к лоскуту, то наблюдается отрыв воронки ( $P_{отр} = 18 \text{ Н}$ ). Если воронку подводить постепенно, то происходит захват и подъем лоскута (см. рисунок 2.35). Наблюдается комбинированный изгиб, обычно с 4 флейтами. Если смотреть сверху, то выпуклости флейт располагаются вокруг биссектрис углов прямоугольника.

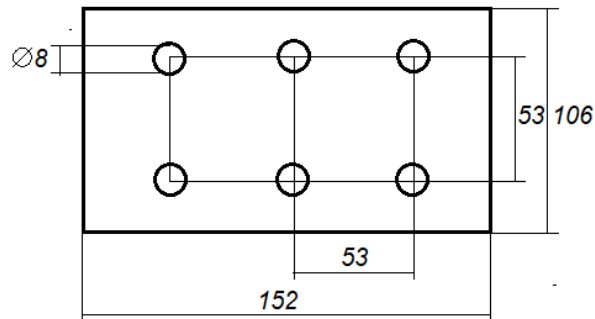


Рисунок 2.34 – Отверстия в крышке прямоугольной воронки



Форма изгиба с 5 секторами



Форма изгиба с 4 секторами

Рисунок 2.35 – Захват лоскута Л1 прямоугольной воронкой с отверстиями

Захват лоскута бязи с линолеума происходит уверенно. Изгибная жесткость бязи примерно в 5 раз меньше, чем жесткость драпа. Лоскут плотно прилипает к прямоугольной области захвата (рисунок 2.36).



Рисунок 2.36 – Захват лоскута бязи прямоугольной воронкой с отверстиями

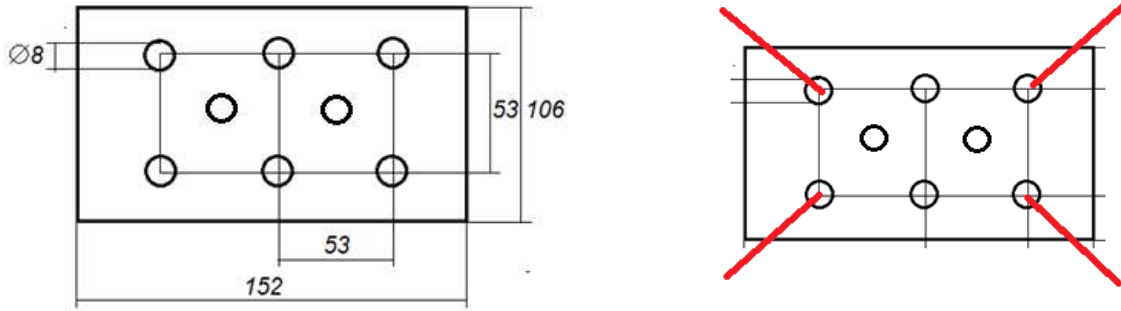
При захвате двух лоскутов драпа Л1, находящихся на большом неподвижном лоскуте Л2 драпа, с номинальной мощностью  $N_3$ , наблюдается захват обоих лоскутов. Число флейт 4.

При захвате лоскута Л1, отделенного от других лоскутов полиэтиленовой пленкой, наблюдается уверенный захват с силой, немного большей, чем вес лоскута. Пленка иногда присасывается, иногда нет.

Заметим, что при выключении насоса лоскут Л1, отделившись от воронки и падая с высоты 40 см, успевает распрямиться и принять приблизительно плоскую форму.

Если добавить по центрам квадратов отверстия в крышку захвата (рисунок 2.37), то лоскут Л1 с линолеума не захватывается, происходит отрыв воронки. И меньшие лоскуты драпа диаметром 190 мм (Л01) и диаметром 267 мм (Л02) с линолеума не снять. Захват возможен при медленном приближении воронки к лоскуту со сдвигом в сторону.

Наблюдается захват лоскута Л01 с фиксированной поверхности лоскута Л1 при мощности  $N_3$ . Форма изгиба комбинированная – накидка с 4 флейтами, положения которых отмечено красными линиями.



Крышка воронки с дополнительными  
отверстиями

Положения флейт на лоскуте Л01

Рисунок 2.37 – Захват плоской воронкой с дополнительными отверстиями

#### 2.4.2. Опыты по захвату лоскутов драпа плоской круглой воронкой

Плоской воронкой с четырьмя эллиптическими отверстиями площадью  $1,2 \text{ см}^2$  каждое (рисунок 2.38) захватываем лоскуты Л01 и Л02.

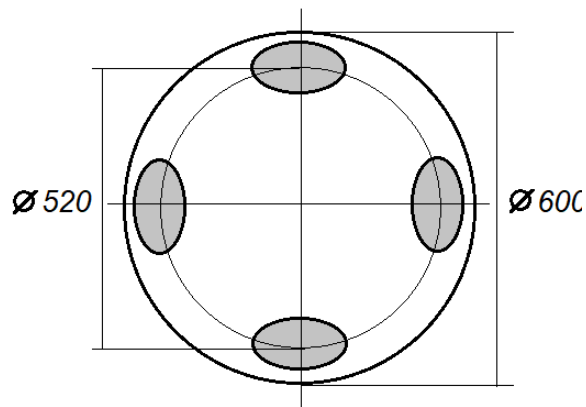


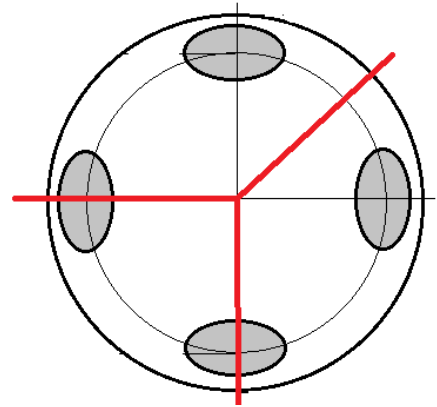
Рисунок 2.38 – Плоская воронка с эллиптическими отверстиями

Происходит захват лоскута Л01 с линолеума при мощности от  $N_1$  до  $N_4$  силой  $P_{\text{захв}} = 13 \text{ Н}$ . Наблюдается 2, 3 или 4-х секторная форма изгиба (рисунок 2.39).

Захват лоскута Л02 с линолеума происходит при мощности  $N_4$  силой  $P_{\text{захв}} = 17 \text{ Н}$ . Наблюдается чаще всего 4-х секторная форма изгиба (рисунок 2.40). Иногда захват не происходит.



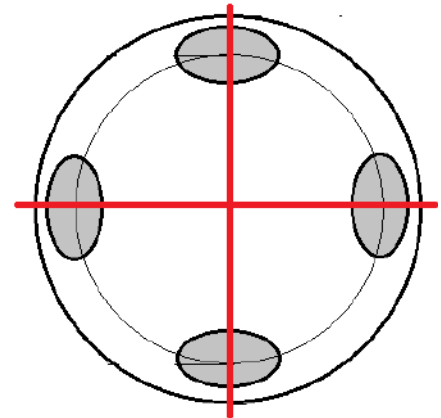
Трехсекторный изгиб лоскута Л01



Расположение 3 флейт



Четырехсекторный изгиб лоскута Л01



Расположение 4 флейт

Рисунок 2.39 – Захват плоской воронкой с эллиптическими отверстиями

Захват прямоугольного лоскута Л1 с линолеума происходит при мощности  $N_4$  с силой  $P_{захв} = 0.8 \text{ Н}$  (наблюдается 3-х или 4-х секторная форма изгиба). Иногда случается отрыв воронки ( $P_{отр} = 2.8 \text{ Н}$ ).



Рисунок 2.40 – Захват лоскута Л02 плоской круглой воронкой

### 2.4.3. Комбинированный изгиб лоскута

Отверстия вакуумных воронок располагаются на захвате, скорее всего, регулярным образом. Часть воронок может оказаться не задействованной в захвате лоскута. Рассмотрим выпуклый многоугольник, образованный касательными к краям присосавшихся к лоскуту вакуумных воронок (рисунок 2.41), который является выпуклой оболочкой  $F$  области, сформированной отверстиями воронок. Пусть  $F$  принадлежит области  $G$ , занимаемой разложенным на заготовительном столе лоскутом. При подъеме захваченного лоскута над столом края лоскута, окружающие область  $F$ , свешиваются, деформируясь тем или иным образом.

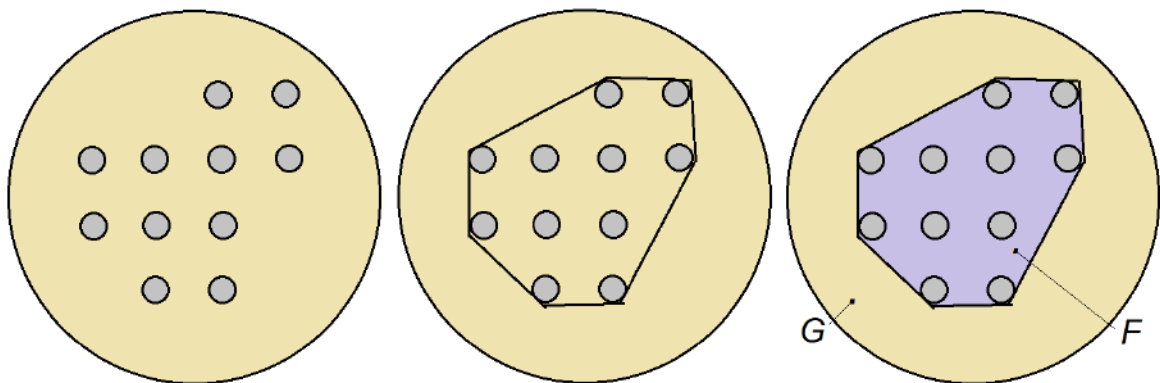


Рисунок 2.41 - Область отверстий принадлежит области лоскута:  $F \subset G$

При определенном соотношении между удельным весом, изгибной жесткостью и размерами лоскута, а также размерами и формой области  $F$ , можно наблю-

дать изгиб, при котором часть срединной поверхности лоскута между образующими  $g_1, g_2$ , остается плоской, а свешивающиеся края являются торсовыми поверхностями (рисунок 2.42).

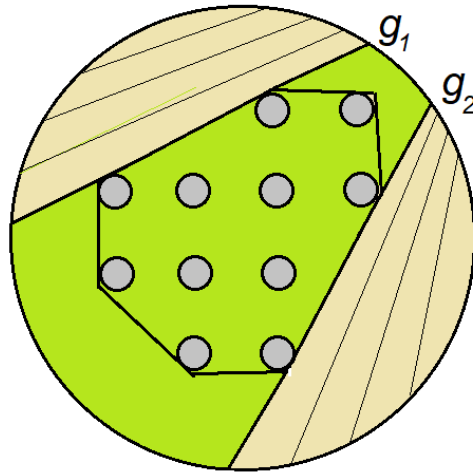
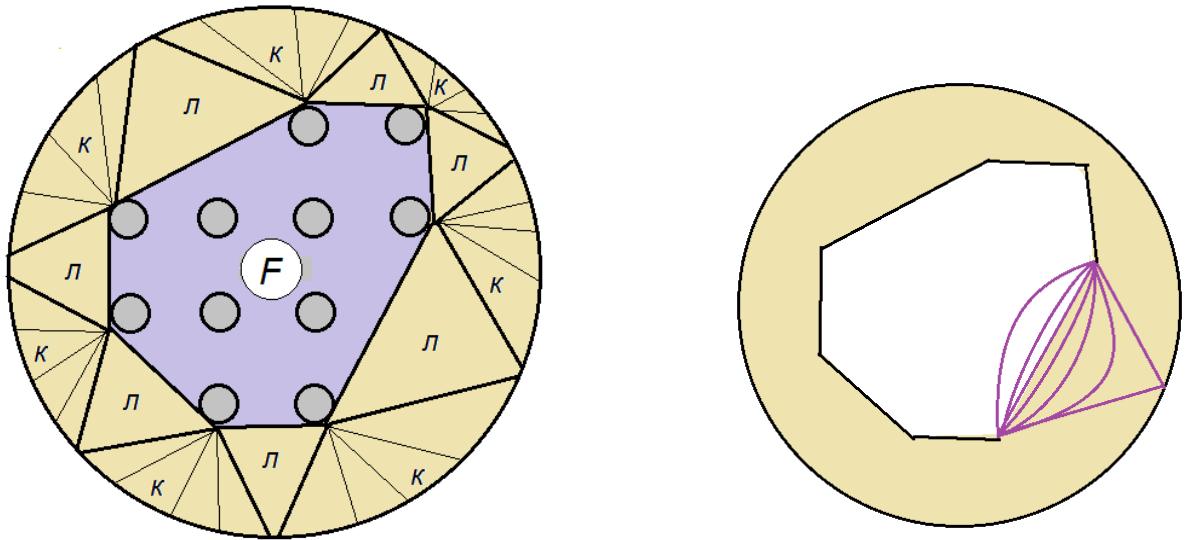


Рисунок 2.42 – Развертка лоскута, совершающего торсовый изгиб



Развертка комбинированного изгиба лоскута

Складки вдоль ребра

Рисунок 2.43 – Комбинированный изгиб лоскута

Если изгибная жесткость лоскута мала, а вес свешивающейся части значителен, то форма захваченного и свисающего лоскута имеет вид накидки или скатерти, наброшенной на стол, где роль «стола» играет многоугольник  $F$  (рисунок 2.43). Как показывают опыты, деформирующаяся область  $G \setminus F$  состоит из плоских частей (лепестков) «л» и областей «к» конических форм изгиба (фолд или флейт). Коническими вершинами при этом являются вершины многоугольника  $F$ . Такой изгиб будем называть комбинированным.

В реальности «острых» углов и ребер мы не наблюдаем, поскольку материал в окрестностях конических вершин и ребер, вокруг которых отгибаются плоские области, растягивается. Вдоль ребер располагаются пологие складки. Складки образуются и вокруг конических вершин.

Моделируем комбинированный изгиб лоскута в виде накидки, имеющей минимум потенциальной энергии. Проще всего рассчитывается симметричная модель накидки, когда образуется некоторое количество одинаковых фолд и плоских лепестков (рисунок 2.44).



Рисунок 2.44 – Накидки с 4 и с 7 фолдами и лепестками. Вид сверху

Пусть лоскут имеет форму круга радиуса  $R$  и пусть он захвачен вокруг его центра  $C$  горизонтальным плоским вакуумным захватом радиуса  $r$ . Потенциальную энергию недеформированного лоскута, расположенного в горизонтальной плоскости  $SXY$ , примем за нуль. Ось  $SXYZ$  направлена вертикально вверх. Пусть  $k_{\text{sec}}$  - число секторов (число сторон многоугольника, описанного вокруг контура захвата). Тогда  $2\alpha_d = \frac{2\pi}{k_{\text{sec}}}$  - угол раствора одного сектора. Сторона описанного около окружности радиуса  $r$  многоугольника  $a = 2r \cdot \text{tg} \alpha_d$  (рисунок 2.45) . Далее имеем соотношения:

$$\text{tg} \tilde{\beta} = \frac{2(R-r)}{a} = \left( \frac{R}{r} - 1 \right) \text{ctg} \alpha_d ;$$



$$\frac{\pi}{2} - \alpha_d + \check{\beta} + \frac{\alpha_{\text{sec}}}{2} = \pi;$$

и тогда максимальный угол раствора сектора (когда лепесток имеет форму треугольника)

$$\alpha_{\text{sec}}^{\text{max}} = \pi + 2\alpha_d - 2\text{arctg}\left[\left(\frac{R}{r} - 1\right)\text{ctg}\alpha_d\right].$$

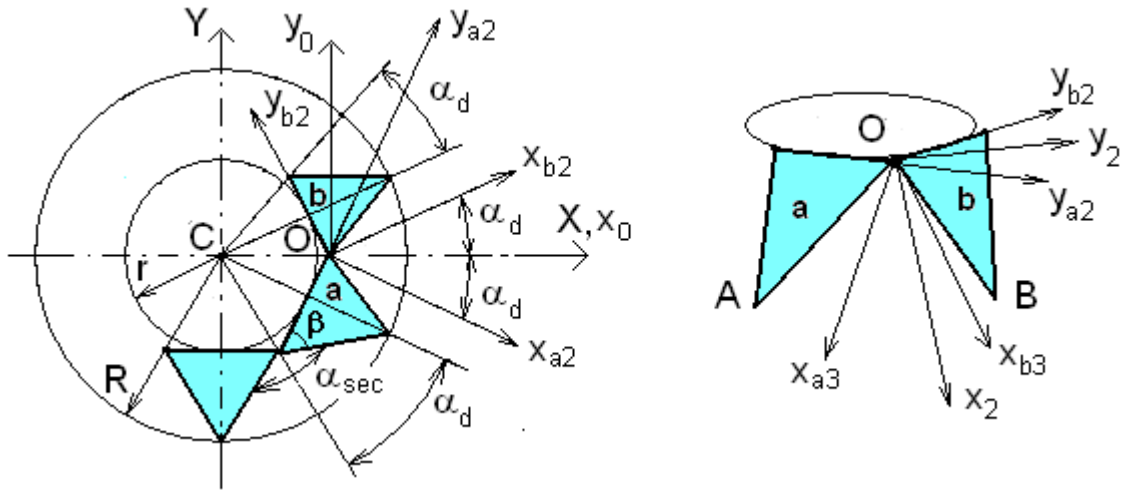


Рисунок 2.45 – Геометрия накладки

Угол раствора сектора в программе расчета формы накладки принимается равным  $\alpha_{\text{sec}} = \alpha_{\text{sec}}^{\text{max}} - 2\alpha_v$ , где  $\alpha_v$  - варьируемый параметр.

Пусть плоская область (лепесток) поворачивается при изгибе лоскута на угол  $\gamma_p$  вокруг ребра, разделяющего многоугольную недеформирующуюся часть накладки и изгибающуюся часть. Рассмотрим систему координат  $Ox_0y_0z_0$ , сдвинутую относительно абсолютной системы  $SXYZ$  по оси  $Ox_0$  на величину  $x^* = \frac{r}{\cos\alpha_d}$ . Пусть  $\vec{X}_{\text{abs}}$  - вектор-столбец компонентов некоторого вектора в абсолютной системе координат; тогда в системе  $Ox_0y_0z_0$  этот вектор равен

$$\vec{X}_0 = \vec{X}_{\text{abs}} - \vec{S}_3, \text{ где } \vec{S}_3 = \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Соответственно } \vec{X}_{\text{abs}} = \vec{X}_0 + \vec{S}_3.$$

По заданному углу  $\gamma_p$  наклона лепестка можно рассчитать угол  $\gamma^*$  наклона сектора  $AOB$ .

Рассмотрим преобразования координат точек, связанные с лепестком  $a$ . Пусть  $\vec{X}_0^a$  – вектор-столбец координат некоторой точки лепестка  $a$  в системе координат  $Ox_0y_0z_0$ .

1) Переходим от системы координат  $Ox_0y_0z_0$  к системе координат  $Ox_2^a y_2^a z_2^a$  путём поворота вокруг оси  $Oz_0$  на угол  $-\alpha_d$ :  $\vec{X}_2^a = A_d^{-1} \vec{X}_0^a$ , где в матри-

це  $A_d^{-1} = \begin{pmatrix} c_{\alpha_d} & -s_{\alpha_d} & 0 \\ s_{\alpha_d} & c_{\alpha_d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  обозначены:  $c_{\alpha_d} = \cos \alpha_d$ ;  $s_{\alpha_d} = \sin \alpha_d$ . Матрица  $A_d^{-1}$  яв-

ляется обратной к матрице  $A_d = \begin{pmatrix} c_{\alpha_d} & s_{\alpha_d} & 0 \\ -s_{\alpha_d} & c_{\alpha_d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

2) Переходим к системе координат  $Ox_{a3}y_{a3}z_{a3}$  (рисунок 14, б) путём пово-

рота вокруг оси  $Oy_{a2}$  на угол  $\gamma_p$ :  $\vec{X}_3^a = \Gamma \vec{X}_2^a = \Gamma A_d^{-1} \vec{X}_0^a$ , где  $\Gamma = \begin{pmatrix} c_\gamma & 0 & -s_\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\gamma & 0 & c_\gamma \end{pmatrix}$  -

матрица, в которой обозначены  $c_\gamma = \cos \gamma_p$ ,  $s_\gamma = \sin \gamma_p$ .

Обратное преобразование:  $\vec{X}_0^a = A_d \Gamma^{-1} \vec{X}_3^a$ .

Вектор  $\vec{OA} = \vec{L}_3^a$  в системе координат  $Ox_{a3}y_{a3}z_{a3}$  имеет проекции

$\vec{L}_3^a = \begin{pmatrix} R-r \\ -\frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ , а в системе координат  $Ox_0y_0z_0$   $\vec{L}_0^a = A_d \Gamma^{-1} \vec{L}_3^a$ .

Рассмотрим преобразования, связанные с лепестком  $b$ :

1) поворот на угол  $\alpha_d$ :  $\vec{X}_2^b = A_d \vec{X}_0^b$ ;

2) преобразование вектора:  $\vec{X}_3^b = \Gamma \vec{X}_2^b = \Gamma A_d \vec{X}_0^b$ .

Обратное преобразование:  $\vec{X}_0^b = A_d^{-1}\Gamma^{-1}\vec{X}_3^b$ .

Вектор  $\vec{OB} = \vec{L}_3^b = \begin{pmatrix} R-r \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{L}_3^a + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{L}_3^a + \vec{S}_a$  в системе  $Ox_0y_0z_0$  есть

$$L_0^b = A_d^{-1}\Gamma^{-1}L_3^b = A_d^{-1}\Gamma^{-1}L_3^a + A_d^{-1}\Gamma^{-1}S_a.$$

Вектор  $L$ , направленный вдоль биссектрисы угла  $AOB$ , в системе координат

$$Ox_0y_0z_0 \text{ равен } \vec{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \vec{L}_0^a + \vec{L}_0^b = (A_d + A_d^{-1})\vec{\Gamma}^{-1}L_3^a + A_d^{-1}\vec{\Gamma}^{-1}\vec{S}_a.$$

При повороте лепестков на угол  $\gamma_p$  плоскость  $AOB$ , с которой связываем систему координат  $Ox'_2y'_2z'_2$ , поворачивается вокруг оси  $Oy_0$  на угол  $\gamma^*$  относительно плоскости  $Ox_0y_0$ . Косинус и синус угла поворота

$$\cos \gamma^* = \frac{l_1}{\|L\|}, \text{ где } \|L\| = \sqrt{(l_1)^2 + (l_2)^2 + (l_3)^2}, \quad \sin \gamma^* = -\frac{l_3}{\|L\|}.$$

Выполняя символьные преобразования в среде компьютерной математики MATLAB, находим, что

$$l_1 = 2(R-r)\cos\alpha_d \cos\gamma_p - 2r\sin^2\alpha_d / \cos\alpha_d, \quad l_3 = -2(R-r)\sin\gamma_p.$$

Внутри конусной зоны треугольники граней имеют углы  $\Delta\alpha_k$  при общей вершине и повернуты вокруг общей образующей на угол  $\Delta\beta_k$  друг относительно друга. Локальная система координат  $O_ix_ky_kz_k$  имеет ось  $O_ix_k$ , направленную вдоль одной из образующих и ось  $O_iz_k$ , направленную по нормали к  $k$ -ой грани. Преобразование вектора-столбца  $X$  координат при переходе от системы координат  $O_ix_ky_kz_k$ , связанной с  $k$ -ой гранью, к системе  $O_ix_{k+1}y_{k+1}z_{k+1}$ , связанной с  $k+1$ -ой гранью, происходит по формуле:

$$\vec{X}^{k+1} = R_{k,k+1}\vec{X}^k,$$

$$\text{где } R_{k,k+1} = \begin{pmatrix} c_{ak} & s_{ak} & 0 \\ -s_{ak}c_{bk} & c_{ak}c_{bk} & s_{bk} \\ s_{ak}s_{bk} & -c_{ak}s_{bk} & c_{bk} \end{pmatrix}.$$

Здесь обозначено:  $s_{ak} = \sin \Delta\alpha_k$ ,  $c_{ak} = \cos \Delta\alpha_k$ ,  $s_{bk} = \sin \Delta\beta_k$ ,  $c_k = \cos \Delta\beta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_{s_i}$  ( $n_{s_i}$  - число граней в  $i$ -ом секторе).

Отдельной проблемой является расчет энергии изогнутой области лепестка. Полагаем, что изгиб имеет часть лепестка, находящаяся на цилиндре радиуса  $\rho_p$  (рисунок 2.46). Расчет радиуса  $\rho_p$  можно осуществить из условия достижения напряжением на растянутой стороне лоскута предельного значения  $\sigma_{\text{lim}} = [\sigma]$ . Можно задавать этот радиус как толщину лоскута, умноженную на некоторый коэффициент, подбираемый из некоторых априорных соображений, связанных с деформацией внутренней структуры ткани.

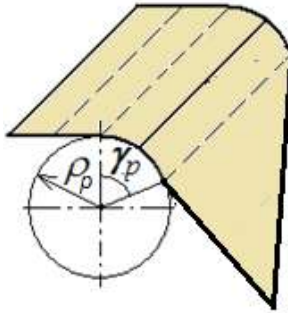


Рисунок 2.46 – Изгиб лепестка

Потенциальная энергия лоскута складывается из упругой энергии  $U_e$  и гравитационной энергии  $U_g$ .

При оптимизационном поиске равновесной формы накидки ищем минимум целевой функции, основной частью которой является потенциальная энергия  $U$  накидки как упругой оболочки. Она складывается из упругой энергии  $U_e$  и гравитационной энергии  $U_g$ . Варьируемыми параметрами формы служат углы наклона плоских областей «л» к горизонту, углы, задающие форму этих областей и углы  $\Delta\beta_k$  между гранями.

#### 2.4.4. Моделирование торсовых и цилиндрических форм изгиба лоскута

Цилиндрический изгиб полагаем частным случаем торсового изгиба. Когда свешивающаяся часть лоскута стремится принять форму торсового изгиба, моделируем его в два этапа. Сначала, задавшись множеством углов  $\{\alpha_k\}$ , проектируем развертку (рисунок 1.36). Затем, задавшись множеством углов  $\{\beta_k\}$ , проектируем многогранную поверхность. При проектировании развертки необходимо рассчитывать координаты точек пересечения, образующих с границами лоскута.

Если плоский лоскут имеет сложную криволинейную форму, требуется провести оцифровку (векторизацию) точек границы лоскута. В качестве опорной направляющей возьмем диагональную прямую, соединяющую наиболее удаленные точки развертки (рисунок 2.47, а). Вдоль нее направляем ось  $Ox$ . Предполагаем, что области по обе стороны от диагональной линии выпуклые. Путем сканирования изображения вдоль оси  $Oy$  получаем координаты точек границы. При построении развертки задаемся углами  $\alpha_k$  и строим образующие  $M_k N_k$  как прямые, проходящие через заданные точки направляющей под заданными углами к опорной направляющей. Координаты каждой крайней точки образующей определяем, находя ближайшие точкам границы «слева» и «справа» от точек  $M_k, N_k$  и выполняя линейную интерполяцию. На рисунке 2.47, б представлена развертка войлочной стельки 27 размера, захваченной сетчатым захватом, как это показано на рисунке 2.4. Захваченная область отмечена темным оттенком.

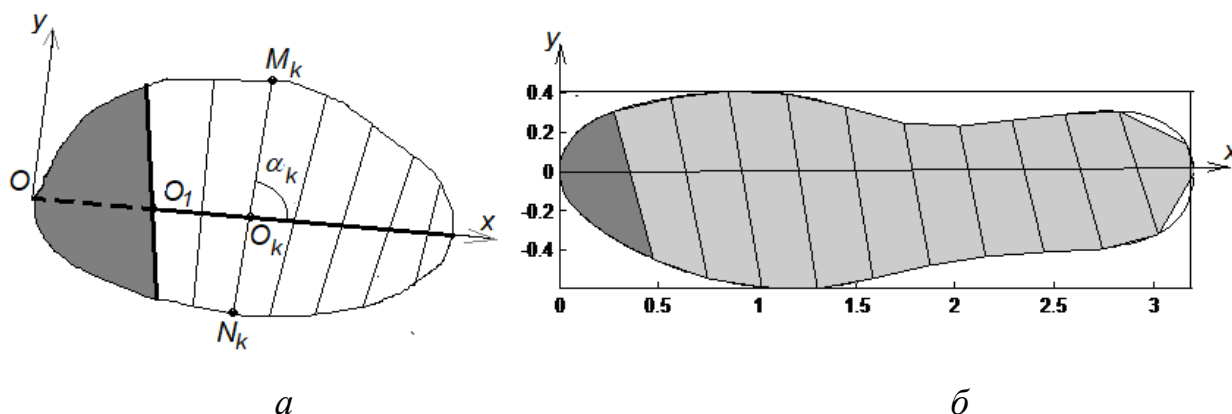


Рисунок 2.47 - Построение развертки лоскута (а). Развертка стельки (б)

Следует отметить, что по мере удаления от захваченной области лоскута к его свободно свешивающемуся краю  $\alpha' \rightarrow 0$  и  $\beta' \rightarrow 0$ , т.е. форма изгиба стремится к цилиндрическому виду, и лоскут стремится принять плоскую форму.

В случае, когда прямоугольный лоскут захвачен вдоль образующей, параллельной одной из сторон и свободно свешивается, его равновесное состояние может быть описано одним дифференциальным уравнением. Пренебрегая краевыми эффектами, предполагаем, что внутренние силы и моменты зависят только от переменной  $s$ . Тогда из третьего уравнения системы (1.9) следует:

$$\frac{d^2 M_g}{ds^2} + T_g \beta' + p_n = 0. \quad (2.14)$$

Вместо угла  $\beta$  удобнее ввести в рассмотрение угол  $\theta$  (рисунок 2.48), и тогда  $\beta' = -\theta'$ ,  $M_g = D\theta'$ . Из рассмотрения равновесия свешивающейся части следует, что

$$p_n = -\rho g \sin \theta, \quad T_g = -\rho g(L-s) \cos \theta.$$

Уравнение (2.14) приобретает вид:

$$\frac{d}{ds} \theta'' = \frac{p}{D} \frac{d}{ds} [-(L-s) \sin \theta].$$

Обозначим, как это сделано в [97]:

$$l_g = \sqrt[3]{D/p}, \quad \xi_g = \frac{L}{l_g}, \quad \sigma = \frac{s}{l_g} \in [0; \xi_g].$$

Получаем уравнение цилиндрического изгиба в терминах безразмерных величин:

$$\frac{d^2 \theta}{d\sigma^2} + (\xi_g - \sigma) \sin \theta = 0. \quad (2.15)$$

Граничные условия для заделанного лоскута:

$$\theta|_{\sigma=0} = \theta_0, \quad \left. \frac{d\theta}{d\sigma} \right|_{\sigma=\xi_g} = 0.$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (2.15) аналогично уравнению плоского изгиба стержня [98]. Его численное решение можно использовать для проверки оптимизационного решения задачи об изгибе лоскута.

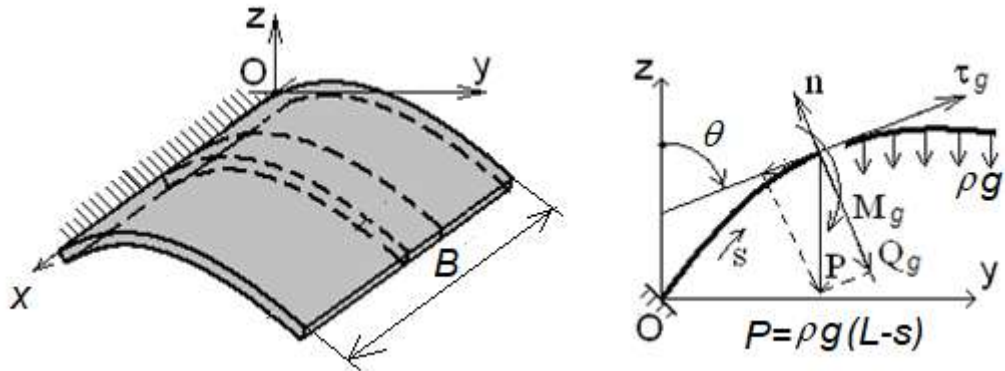


Рисунок 2.48 – Цилиндрический изгиб прямоугольного листа

## 2.5. Выводы по главе 2

Представлены результаты экспериментов по захвату и подъему лоскутов из разных материалов вакуумными захватами разных видов, в которых зафиксированы формы поднимаемых лоскутов, мощность всасывания, сила подъема. Акцентированы проблемы подъема лоскута с гладкой поверхности, а также подъема верхнего лоскута из пакета.

Как правило, срединная поверхность захватываемого вакуумной воронкой лоскута имеет коническую форму. Это может быть почти симметричная форма конической поверхности с несколькими складками или сложная форма со многими складками.

Лоскут, поднимаемый плоским захватом со многими вакуумными воронками относительно малого диаметра, принимает форму комбинированного изгиба в виде накидки или форму с отдельными свисающими краями.

Приведены математические основания для моделирования разных форм изгиба и описаны некоторые действия, на основании которых далее составляются программы моделирования форм захваченных лоскутов.

## ГЛАВА 3. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ЛОСКУТОВ ТКАНИ, ПЕРЕМЕЩАЕМЫХ ЗАХВАТАМИ

### 3.1. Симметричная модель изгиба круглого лоскута, захваченного вакуумной воронкой

Все программы моделирования форм изогнутых лоскутов состоят из трех основных частей: головная программа, программа-оптимизатор и программа расчета целевой функции при заданных значениях варьируемых параметров. К расчетам привлекаются различные подпрограммы, решающие частные задачи. В головной программе задаются:

$X_{\text{par}}$  – массив постоянных параметров задачи,

$X_{\text{in}}$  – массив начальных значений переменных параметров,

$X_{\text{serv}}$  – массив параметров оптимизации,

$n_{\text{ch}}$  – признак ввода массива  $X_{\text{in}}$ .

Кроме того, может быть задан массив  $X_{\text{org}}$  – массив номеров варьируемых элементов из числа  $X_{\text{in}}$ . В случае определения элементов массива  $X_{\text{in}}$  путем случайного поиска задается массив  $X_{\text{ch}}$  ограничений на значения варьируемых величин. Предполагается, что плотности распределения значений варьируемых величин в соответствующих интервалах их изменений постоянны. Случайный поиск дает возможность обнаружить область внутри пространства переменных параметров  $\mathbf{X}$ , содержащую абсолютный экстремум целевой функции.

В результате счета выводятся:

$X_{\text{out}}$  – массив рассчитанных (выходных) значений переменных параметров, соответствующих минимуму целевой функции;

гравитационная, упругая и полная энергия деформированного лоскута и значение целевой функции;



графические фигуры, изображающие многогранную модель срединной поверхности лоскута, и другая информация.

Рассмотрим процесс и результаты моделирования симметричного конического изгиба круглого текстильного лоскута радиусом  $R$ , удерживаемого за вершину  $O$ . Форма конической поверхности определяется количеством складок (секторов)  $k_{sec}$ . Самая простая модель получается на основе предположения, что материал изотропен, и форма изгиба внутри каждого сектора одна и та же: имеет место поворотная симметрия формы порядка  $k_{sec}$ . Будем также считать, что внутри каждого сектора имеет место зеркальная симметрия. Такая симметричная модель конического изгиба может служить приближенным образцом для изучения более сложных моделей.

В программе моделирования конической поверхности назначается параметр  $k_m$  наличия симметрии. Например, при наличии только осевой симметрии  $k_m = 1$ , а при наличии осевой и зеркальной  $k_m = 2$ .

Многогранную поверхность внутри каждого сектора моделируем как поверхность, состоящую из  $2n_s$  граней. Сектор строится в процессе моделирования от его краев к середине. Форма сектора задается углами поворота  $\{\Delta\beta_k\}$  граней друг относительно друга, причем  $k = 1, \dots, n_s - 2$ . Положения двух внутренних граней определяется положениями предыдущих, «наружных» граней, так что количество варьируемых углов  $\{\Delta\beta_k\}$  равно  $n_{pd} = n_s - 2$ . Внутренние грани могут образовывать две конфигурации (два варианта сборки). В специальной подпрограмме исследуется пирамида, образованная внутренними гранями (рисунок 3.1), и выбирается сборка, имеющая минимальную потенциальную энергию.

Все грани имеют форму одинаковых треугольников с общим вершинами, углы при которых равными  $\Delta\alpha$ :

$$n_s \Delta\alpha = \pi / k_{sec}.$$

Эти треугольники играют роль конечных элементов, для которых рассчитывается потенциальная энергия.

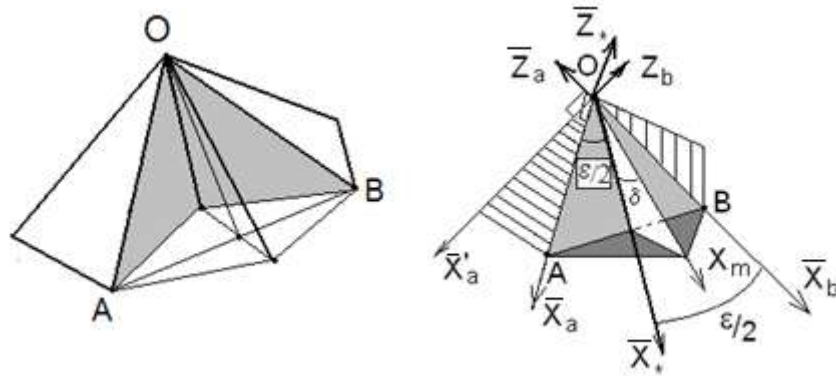


Рисунок 3.1 – К расчету положения внутренних граней  
( $\vec{X}$  - орты образующих,  $\vec{Z}$  - орты нормалей к граням)

Абсолютная система координат  $OXYZ$  связана с вершиной  $O$  конуса, и ось  $OZ$  направлена вверх. Потенциальная энергия плоского недеформированного лоскута, находящегося в плоскости  $OXY$ , принимается за нуль. Многогранная срединная поверхность лоскута строится следующим образом. Считаем, что крайняя образующая некоторого сектора в недеформированном положении совпадает с осью  $OX$ . В равновесном деформированном положении эта образующая повернута вокруг оси  $OY$  на угол  $\gamma_0$ . Вместе с образующей поворачивается и сопровождающая система координат. Совершая далее поворот вокруг первой образующей на угол  $\beta_0 / 2$ , переходим на первую грань сектора ( $\beta_0$  – угол между нормальными к соседним граням двух секторов). Совершая поворот вокруг нормали к первой грани на угол  $\Delta\alpha$ , переходим ко второй образующей и т.д.

С каждой  $k$ -той гранью связываем  $k$ -тую локальную систему координат, ось абсцисс которой направляется от вершины конуса вдоль «младшей» образующей. Ось аппликата направлена по нормали к грани. Преобразование вектор-столбца  $\vec{X}_{M,k}$  координат точки  $M$  из  $k$ -ой системы грани в вектор  $\vec{X}_{M,k-1}$  координат этой же точки в предыдущем базисе дается выражением

$$\vec{X}_{M,k-1} = R_{k,k-1} \vec{X}_{M,k}, \quad k \geq 2,$$

$$\text{где } R_{k,k-1} = \begin{pmatrix} c_a & -s_a \cdot c_{b,k} & s_a \cdot s_{b,k} \\ s_a & c_a \cdot c_{b,k} & -c_a \cdot s_{b,k} \\ 0 & s_{b,k} & c_{b,k} \end{pmatrix}, \quad c_a = \cos \Delta\alpha, \quad s_a = \sin \Delta\alpha,$$

$$c_{b,k} = \cos \Delta\beta_k, \quad s_{b,k} = \sin \Delta\beta_k.$$

Вектор абсолютных координат точки  $M$  задается выражением

$$X_{M,abs} = X_{M,0} = R_{1,0} \cdot R_{2,1} \cdots R_{k-1,k-2} \cdot R_{k,k-1} X_{M,k} = R_{k,0} X_{M,k},$$

$$\text{При этом } R_{1,0} = \begin{pmatrix} c_g & s_{b,0}s_g & c_{b,0}s_g \\ 0 & c_{b,0} & -s_{b,0} \\ -s_g & s_{b,0}c_g & c_{b,0}c_g \end{pmatrix}, \quad c_{b,0} = \cos \Delta\beta_0 / 2, \quad s_{b,0} = \sin \Delta\beta_0 / 2,$$

$$c_g = \cos \gamma_0, \quad s_g = \sin \gamma_0.$$

Построение равновесной конической поверхности производится путем оптимизационного поиска минимума целевого функционала энергии, содержащего варьируемые параметры  $\gamma_0, \Delta\beta_0, \dots, \Delta\beta_{npd}$ , с добавлением через множители Лагранжа дополнительных членов, обеспечивающих неразрывность поверхности, ее цикличность и отсутствие самопересечений.

Исследование отсутствия самопересечений поверхности сводится к исследованию возможности пересечения каждого очередного треугольника грани с треугольниками ранее построенных граней.

Вопрос исследования пересечений треугольников рассмотрен, например, в [99]. Треугольники в нашей модели имеют общую вершину, что упрощает решение задачи об их возможном пересечении. Два треугольника  $\Delta OA_1 B_1$  и  $\Delta OA_2 B_2$  (рисунок 3.2) не пересекаются, если вершины основания одного из них находятся по одну сторону от плоскости другого треугольника. Это условие можно представить как условие одинаковых знаков смешанных произведений следующих векторов:

$$\overrightarrow{OA_1} \times \overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OA_1} \times \overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_2}.$$

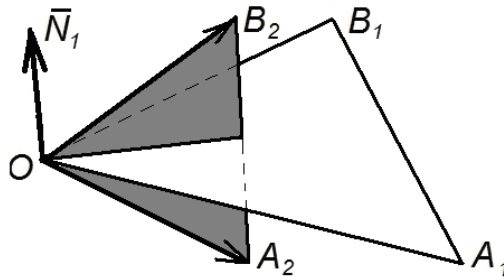


Рисунок 3.2 – Пересечение треугольников с общей вершиной

Варьируемые величины  $\gamma_0$  и  $\{\Delta\beta_k\}$  должны доставить минимум потенциальной энергии листа  $U = U_e + U_g$ . В головной программе поиск этого минимума происходит в несколько этапов. На каждом последующем этапе расчёта количество граней в полу-секторе удваивается. Удвоения продолжаются, пока относительная погрешность расчёта целевой функции не станет меньше некоторого критерия.

При расчете целевой функции учитываем, что отношение  $\Delta\beta_k / \Delta\alpha$  численно равно приближенному значению ненулевой нормальной главной кривизны опорной (единичной) направляющей. Упругую энергию  $k$ -ой грани вычисляем в соответствии с формулой (2.13) в виде:

$$U_{e,k} = 0.125D \frac{(\Delta\beta_k + \Delta\beta_{k-1})^2}{\Delta\alpha} \ln \frac{R}{R_p}.$$

Здесь  $R_p$  – радиус сингулярной зоны.

Отметим, что ввиду гладкости и периодичности функции  $\beta(\alpha)$  иногда целесообразно представить ее в виде осциллирующей функции

$$\beta = \int_0^\alpha \dot{\beta} d\alpha = \beta_0 + b_*\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin jk_{\text{sec}} \alpha. \quad (3.1)$$

Последнее слагаемое в правой части выражения (3.1) будем обозначать как  $\beta_{osc}$ . Тогда варьируемыми параметрами будут величины  $\beta_0$ ,  $\beta_*$  и коэффициенты Фурье  $B_j$ .

Рассмотрим результаты моделирования симметричной конической срединной поверхности лоскута драпа радиусом  $R = 40$  см. За основу возьмем программу `bendconcirc` [100]. Будем искать форму односекторного конуса.

Задаем вектор постоянных параметров  $X_{par}$  в виде следующего списка:

$X_{par} = [20 \ 0 \ 0.1 \ 1.275 \ 0.08 \ 2700 \ 0.1 \ 6 \ 1 \ 2 \ 0.8 \ 0.25 \ 1],$

элементы которого имеют следующий смысл:

$[R \ \alpha_{g0} \ h \ D \ p \ [\sigma] \ R_p \ n_s \ k_{sec} \ k_{mir} \ c_0 \ c_w \ k_{mat}] .$

Здесь  $R$  – радиус листа,  $\alpha_{g0}$  – угол от «уточного» направления волокон материала лоскута к оси  $Ox$  при наличии анизотропии,  $h$  – толщина листа,  $D$  – изгибная жесткость лоскута,  $p$  – распределенная гравитационная нагрузка,  $[\sigma]$  – предельное напряжение,  $R_p$  – радиус сингулярной зоны,  $n_s$  – число граней в полу-секторе,  $k_{sec}$  – число секторов,  $k_{mir}$  – качество симметрии,  $c_0, c_w$  – параметры управления тонами рисунков,  $k_{mat}$  – признак качества анизотропии ( $k_{mat} = 0$  для изотропного материала,  $k_{mat} = 1$  для ортотропного). Длины задаем в сантиметрах.

Специальная подпрограмма по заданному предельному напряжению  $[\sigma]$  по формуле (1.10) определяет радиус  $r_p$ , при котором достигается это напряжение. Если  $r_p > R_p$ , то в качестве радиуса сингулярной зоны берется  $r_p$ .

Задаем флаг способа расчета начальных значений переменных величин:  $n_{ch} = 2$ : в этом случае входные значения варьируемых переменных определяются путем случайного поиска.

Задаем массив параметров оптимизации:

$X_{serv} = [0.01 \ 6 \ 0.5 \ 0.001 \ 1000 \ 0 \ 3500 \ 10].$

Эти величины имеют следующий смысл:

$[dx \ n_{xv} \ r_{al} \ e_{ps} \ n_{step} \ p_{lo} \ t_{work} \ d_{twork}] .$

Здесь обозначено:  $dx$  – величина основного шага в пространстве переменных  $\mathbf{X}$ ,  $n_{xv}$  – число варьируемых величин,  $r_{al}$  – величина шага в направлении антиградиента целевой функции,  $e_{ps}$  – погрешность счета целевой функции,  $n_{step}$  –

максимальное число шагов в направлении антиградиента,  $p_{10}$  – признак вывода фигур,  $t_{work}$  – предельное время счета,  $d_{work}$  – промежуток времени, спустя который выводятся промежуточные результаты счета.

Получив первоначальный вариант счета, удваиваем число граней в полусекторе путем присвоения флагу значения  $n_{ch} = 4$ , затем еще раз. При этом уменьшаем шаг  $dx$  и погрешность  $e_{ps}$ .

Получаем следующие результаты счета.

1) Массив выходных значений варьируемых переменных:

Xout =

Columns 1 through 14

0 0.3098 -0.0825 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
-0.1709 -0.2489 -0.2299 -0.2219 -0.2530 -0.2620 -0.1962 -0.1405 -0.1148 -0.1211 0.0916 0.3169 0.2724 0.2097

Columns 15 through 22

0 0 0 0 0 0 0 0  
0.1664 0.1137 0.1378 0.1619 -0.0183 -0.1985 -0.3625 -0.5265

В первой строке этой матрицы – рассчитанные значения  $\gamma_0, \Delta\beta_0$ , во второй строке – остальные углы  $\Delta\beta_k$  между нормальными к граням внутри сектора. Значения углов даются в радианах. Знаки углов определяются обычным образом в соответствии с правилом правого винта.

Отдельно выводятся углы в середине сектора  $\Delta\beta_{npd+1}$  и  $\Delta\beta_{npd+2}$ :

betsec: [-0.6587 -0.3895].

Выводятся значения упругой энергии модели, гравитационной энергии, штрафного слагаемого целевой функции (при нарушении условий неразрывности поверхности или при наличии самопересечений) и всей целевой функции:

Uel\_Ugr\_Ust\_U = [ 43.7758 -903.7377 0 -859.9620].

Выводятся значения параметров  $l_g = \sqrt[3]{D/\rho g}$ ,  $\xi = R/l_g$ ,  $\chi = \frac{2}{3\pi \ln R/R_p} \xi^3$ ,

определяющих характер изгиба:

[Lg\_ksi\_hi] = [ 20.0000 2.5166 7.9474 20.1044].

Выводятся значения площади лоскута, площади горизонтальной проекции его модели и первый условный коэффициент драпируемости  $k_{sq}$ , выражающий отношение этих проекций:

$$[\text{scirc\_spro}] = 1.0\text{e}+03 * [1.2566 \quad 0.4155],$$

$$\text{ksquar} = 0.3306.$$

Выводится также величина телесного угла  $\Omega_I$ , условный коэффициент драпируемости  $k_\Omega = \frac{\Omega_I}{2\pi}$  и другие характеристики модели.

На рисунке 3.3 представлена модель односекторного изгиба с 24 гранями в полу-секторе. Энергия модели  $U = -859.96 \frac{\text{кг} \cdot \text{см}^2}{\text{с}^2} \approx -860 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

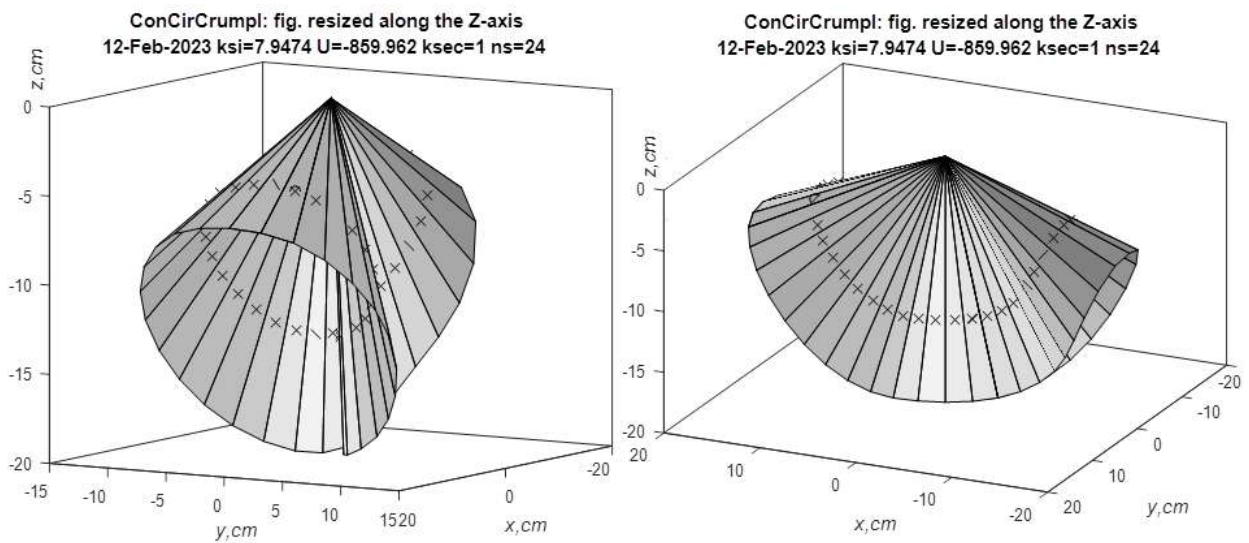


Рисунок 3.3 – Односекторная модель лоскута

Данная форма может быть названа «шатровой» в отличие от «полулунной», когда одна из полостей вдавлена внутрь, и край лоскута имеет серповидную форму.

Выводятся другие изображения и графики. Например, изображенные на рисунке 3.4 графики функций  $\sin \gamma(\alpha)$ ,  $\cos \gamma(\alpha)$ ,  $\beta_{osc}(\alpha)$  и  $\gamma(\alpha)$  ( $\gamma$  - угол наклона образующей к горизонту).

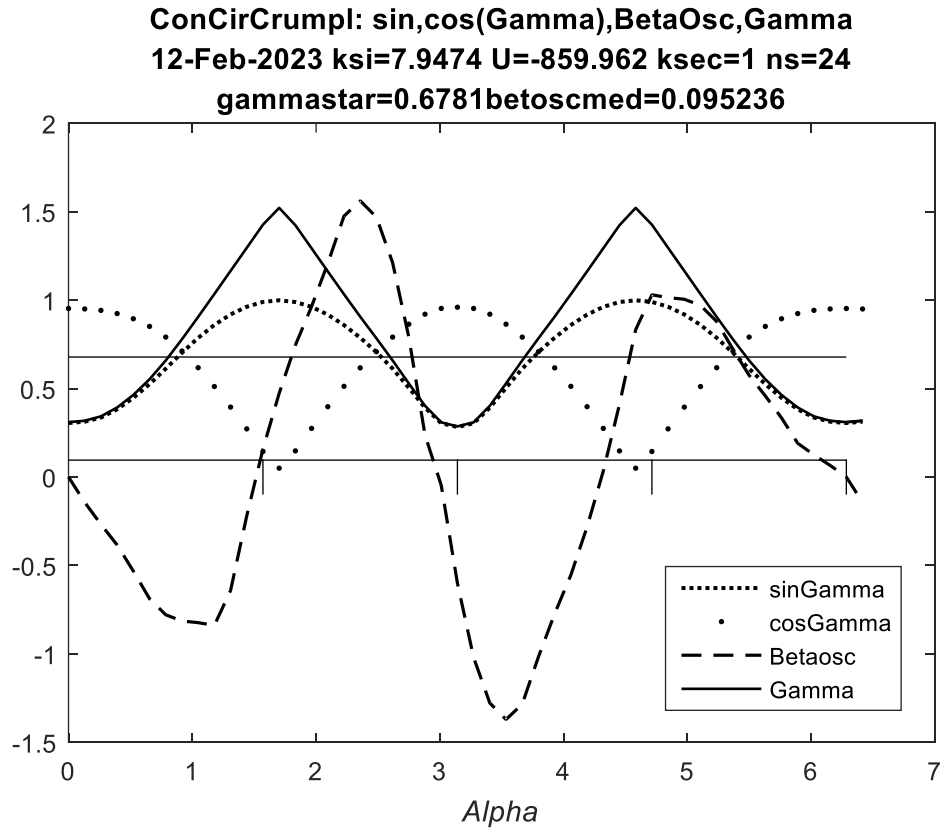


Рисунок 3.4 – Графики некоторых функций, выведенные в результате счета

На рисунке 3.5 представлена модель двухсекторного изгиба. Энергия модели  $U = -862.1 \cdot 10^{-4}$  Дж. Изображения построенных поверхностей демонстрируют важность отслеживания самопересечений: полости лоскута смыкаются в нижних точках.

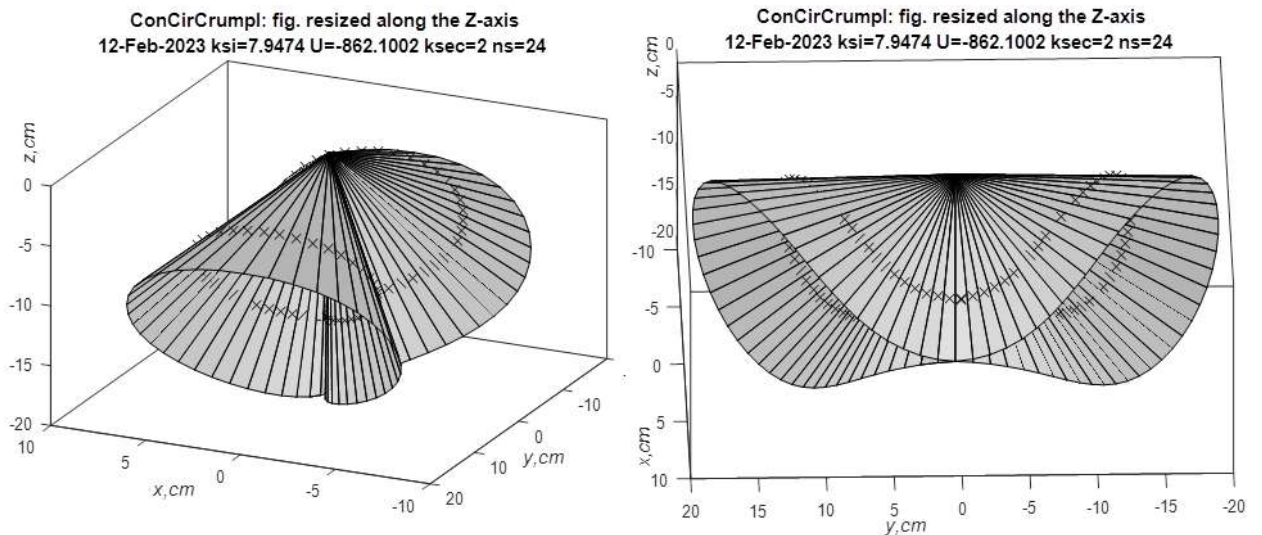


Рисунок 3.5 - Модель двухсекторного изгиба



На рисунке 3.6, а представлена модель четырехсекторного изгиба с 12 гранями в полу-секторе и вид на нее сверху (рисунке 3.6, б). Энергия модели  $U \approx -926.4 \cdot 10^{-4}$  Дж. Эта модель обладает минимальной энергией в семействе конусов  $R = 20$  см с разным количеством секторов.

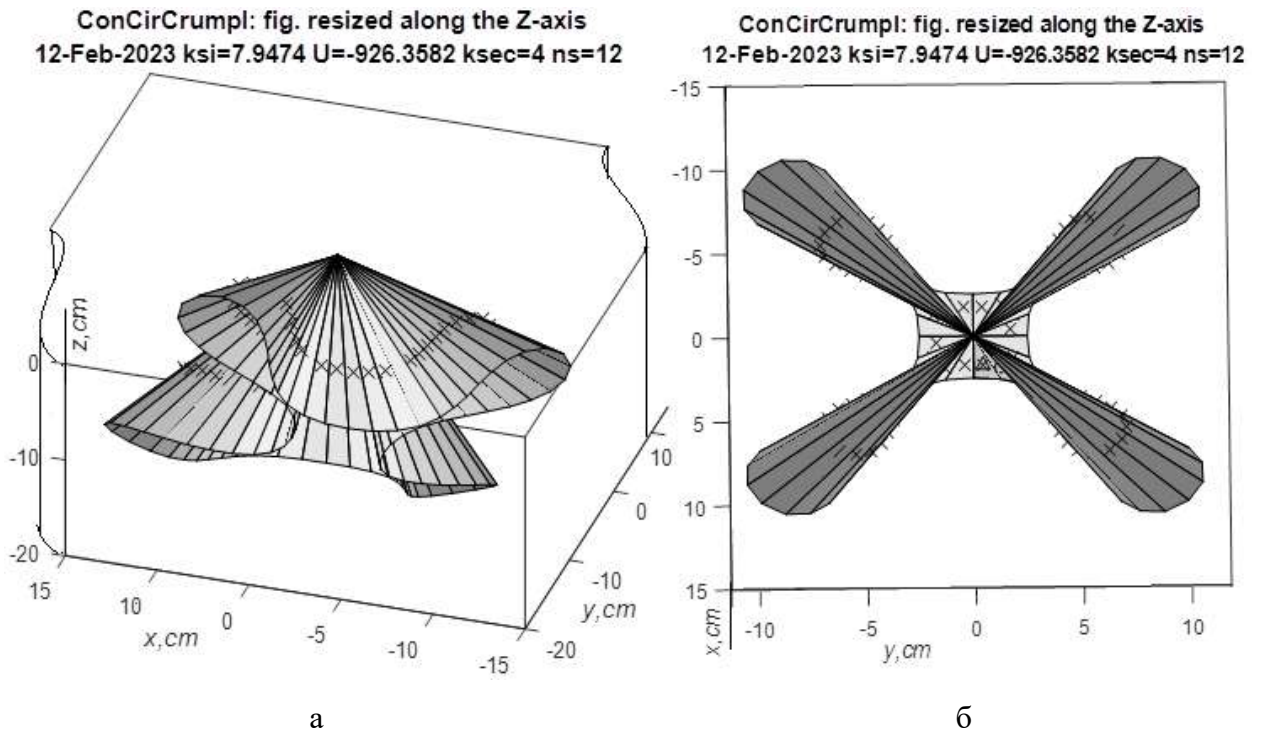


Рисунок 3.6 - Модель 4-секторного изгиба (а). Вид сверху (б).

На рисунке 3.7 приведены графики функций  $\beta(\alpha)$ ,  $\beta_{osc}(\alpha)$ , а также результат интерполяции функции  $\beta_{osc}(\alpha)$ .

На рисунке 3.8 приведены модели с 5 и 6 секторами. Полости этих поверхностей уже не смыкаются. Строить конусы далее, увеличивая количество секторов. При этом результаты предыдущего счета берем в качестве начальных параметров для последующего счета. Получаем, в частности, модели 15-секторного конуса и 30-секторного конуса (рисунке 3.9).

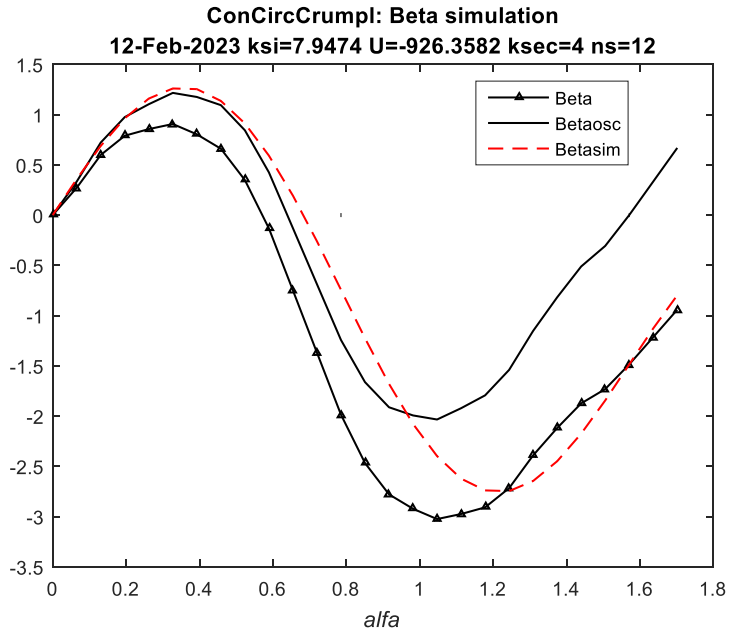


Рисунок 3.7 - Графики функций  $\beta(\alpha)$ ,  $\beta_{osc}(\alpha)$

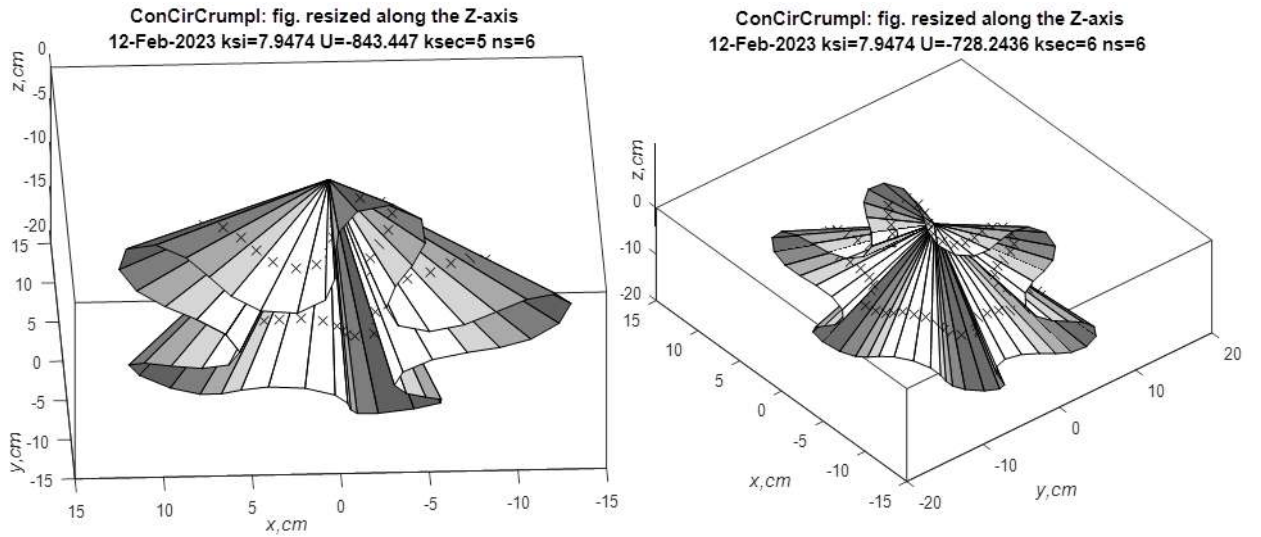


Рисунок 3.8 – Модели с 5 и 6 секторами

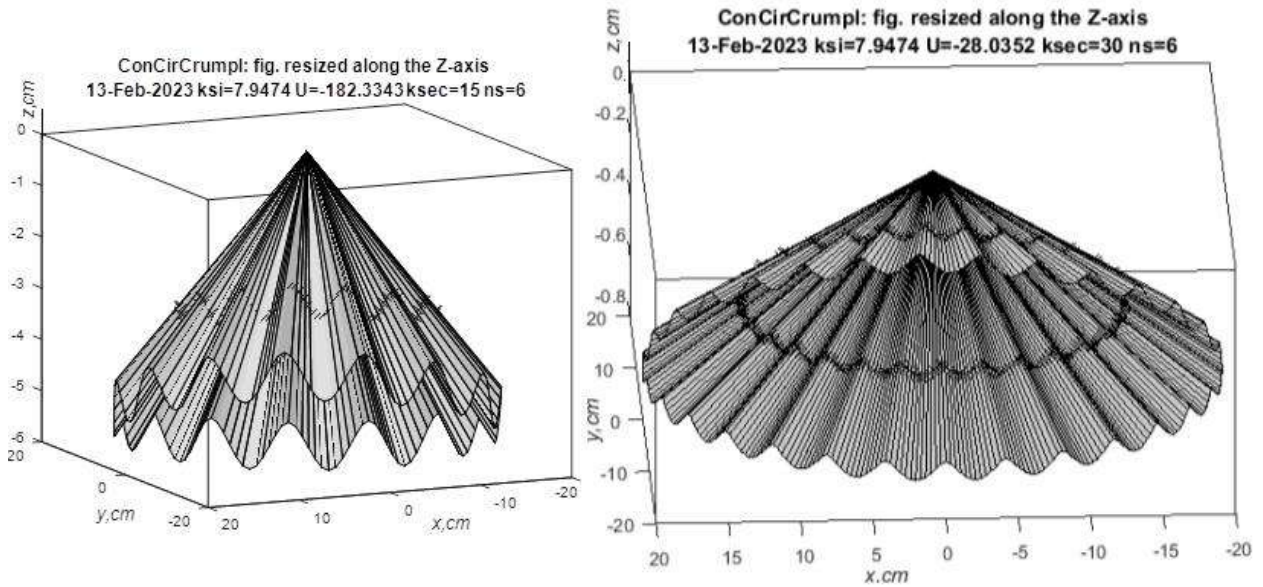


Рисунок 3.9 – 15-секторный и 30-секторный конус

Заметим, что многосекторные конусы в экспериментах не наблюдаются ввиду того, что обладают значительной упругой энергией. Диаграмма зависимости потенциальной энергии описанных форм изгиба от количества секторов этих форм приведена на рисунке 3.10. Видно, что минимальной энергией обладает четырехсекторная форма, что и подтверждается опытами (рисунок 3.11).

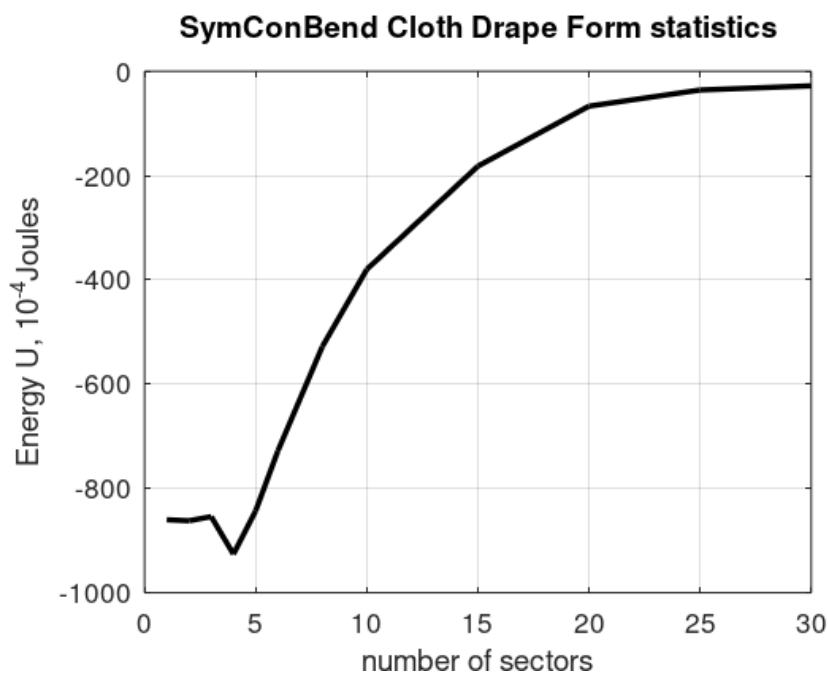


Рисунок 3.10 – Диаграмма зависимости энергий симметричных конических форм изгиба лоскута драпа  $R = 20$  см от количества секторов



Рисунок 3.11 – Четырехсекторный изгиб лоскута драпа радиусом 20 см

### 3.2. Симметричная модель изгиба прямоугольного лоскута, захваченного вакуумной воронкой

Модель изогнутой срединной поверхности втянутого в вакуумную воронку лоскута (рисунки 2.15, 2.19) строим с помощью программы `bendconsym`, которая создана как модификация программы `bendconcirc`. Программа `bendconsym` использует подпрограмму `polygon` для анализа выпуклого многоугольника. Подпрограмма `polygon` рассматривает произвольный набор координат вершин многоугольника, расставляет вершины по порядку их следования, находит положение центра тяжести многоугольника как двумерного тела и его площадь.

Строим коническую модель изгиба лоскута драпа размерами 20x20 см. Вводим массив постоянных параметров `Xpar`, имеющий в программе следующую структуру:

`Xpar= [lx ly h D p slim rsng ns X0 Y0 ALFX ALFY ksec kmir colf0 colw].`

Здесь обозначены:

`lx, ly, h` – размеры прямоугольника лоскута и его толщина,

`D` - изгибная жесткость, `p` - распределенная гравитационная нагрузка,

slim – предельное напряжение на срединной поверхности,

rsng – радиус сингулярной зоны,

ns - планируемое число граней в полу-секторе,

X0, Y0 - координаты вершины конуса в системе координат, связанной с недеформированным лоскутом,

ALFX, ALFY - углы поворота оси вакуумной воронки относительно абсолютной системы координат СК0,

ksec – число секторов модели,

kmir – наличие зеркальной симметрии внутри сектора,

colf0, colw – интенсивность цвета первой грани и вес шага интенсивности.

Задаем:

$$X_{\text{par}} = [20 \ 20 \ 0.2 \ 1.275 \ 0.08 \ 3e+003 \ 0.5 \ 6 \ 10. \ 10. \ 0 \ 0 \ 4 \ 2 \ 0.6 \ 1].$$

Длины задаем в сантиметрах.

Вводим массив служебных параметров, организующих работу оптимизатора:

$$X_{\text{serv}} = [dx \ \text{pxvar} \ \text{roalong} \ \text{epsil} \ \text{nstepmax} \ \text{plo}].$$

Здесь, как и в программе `bendconcirc`, обозначено: `dx` - величина поискового шага в пространстве варьируемых переменных, `roalong` – вес итерационного шага `roalong*dx` в направлении антиградиента, `pxvar` - максимальное число самых значимых варьируемых переменных, `nstepmax` - максимальное число шагов в анти-градиентном направлении, `epsil` - погрешность вычисления целевой функции, `plo` - указатель на построение фигур. Задаем:

$$X_{\text{serv}} = [0.01 \ 5 \ 0.5 \ 0.0001 \ 200 \ 0].$$

Вводим параметр `nachalo = 3`, значение которого указывает на случайный поиск вектора  $X_{\text{in}}$  входных значений входных переменных. Поскольку число граней в полу-секторе заявлено `ns = 6`, то число варьируемых углов  $\Delta\beta_i$ ;  $n_{\text{pd}} = 4$ . Матрица входных параметров имеет следующую структуру:

$$X_{\text{in}} = [\text{alf0} \ \text{gam0} \ \text{bet0} \ 0\dots0; \ \Delta\beta_1 \ \dots \ \Delta\beta_{n_{\text{pd}}}].$$

В первой строке - углы перехода к локальной системе координат СК1, связанной с первой гранью (повороты вокруг осей OZ, Oy', Ox<sub>1</sub>). Во второй строке – углы между гранями полу-сектора.

Задаем матрицу Org, служащую для выбора варьируемых параметров из списка Xin. Адрес параметра (номер строки и номер столбца в матрице Xin) задается столбцом матрицы Org: Xvar(i)=Xin(Org(1,i),Org(2,i)). Задаем:

$$\text{Org} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

Результат случайного поиска дал следующие значения компонентов матрицы входных значений варьируемых переменных:

$$\text{Xin} = [0 \quad 0.2614 \quad -0.1738 \quad 0; \quad -0.4516 \quad -0.1024 \quad 0.2997 \quad 0.3973].$$

Этому набору параметров соответствует значение целевой функции

$$U = -51.734.$$

После оптимизации, выполненной функцией-оптимизатором *minimat2*, получаем матрицу выходных значений варьируемых переменных:

$$\text{Xout} = [0 \quad 0.2364 \quad -0.1788 \quad 0; \quad -0.4516 \quad -0.1024 \quad 0.2997 \quad 0.2473].$$

Значение целевой функции  $U = -70.4156$ . Структура целевой функции следующая: упругая энергия лоскута  $U_{el} = 22.9558 \cdot 10^{-4}$  Дж, гравитационная энергия  $U_{gr} = -93.3714 \cdot 10^{-4}$  Дж, штраф отсутствует. Углы на стыке полу-секторов равны

$$\beta_{sec} = [-0.015279 \quad 0.022519 \quad -0.015279].$$

В результате счета выведены фигуры. На рисунке 3.12 представлена развертка многогранной поверхности и сама поверхность в реальных пропорциях. На рисунке 3.13 представлена модель срединной поверхности деформированного лоскута в шаржированных пропорциях. Из рисунка следует, что края лоскута опускаются примерно на 6 см, что следует учитывать при перемещении лоскута в зону технологических операций.

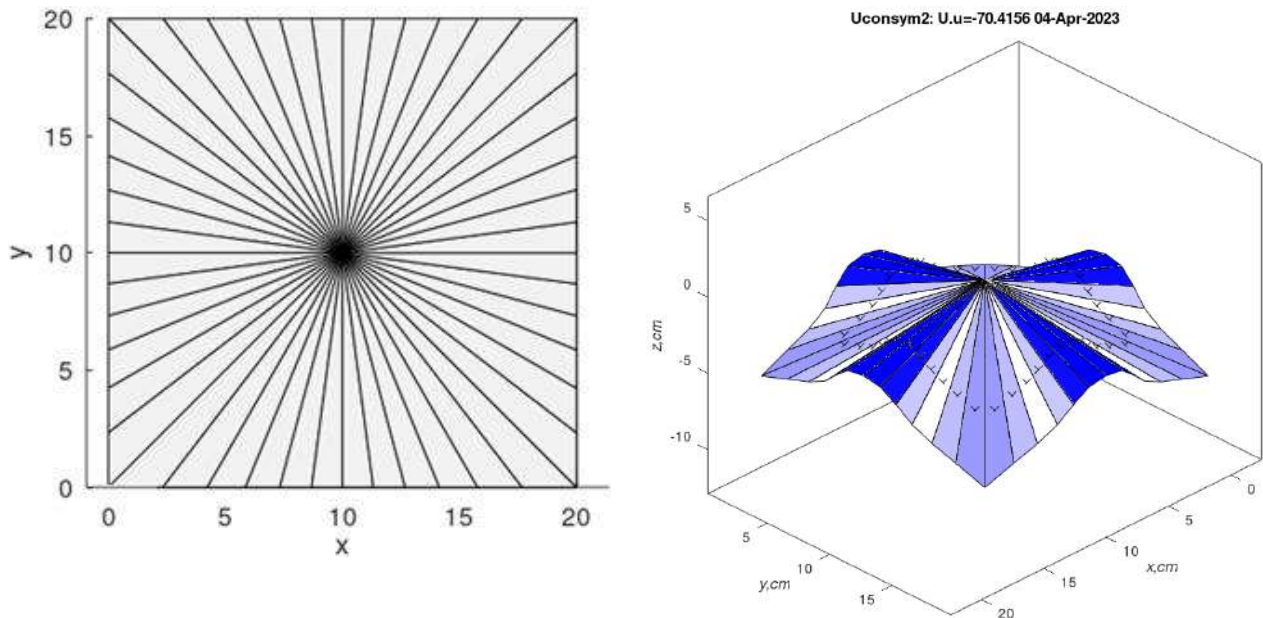


Рисунок 3.12 – Развертка и деформированная форма квадратного лоскута

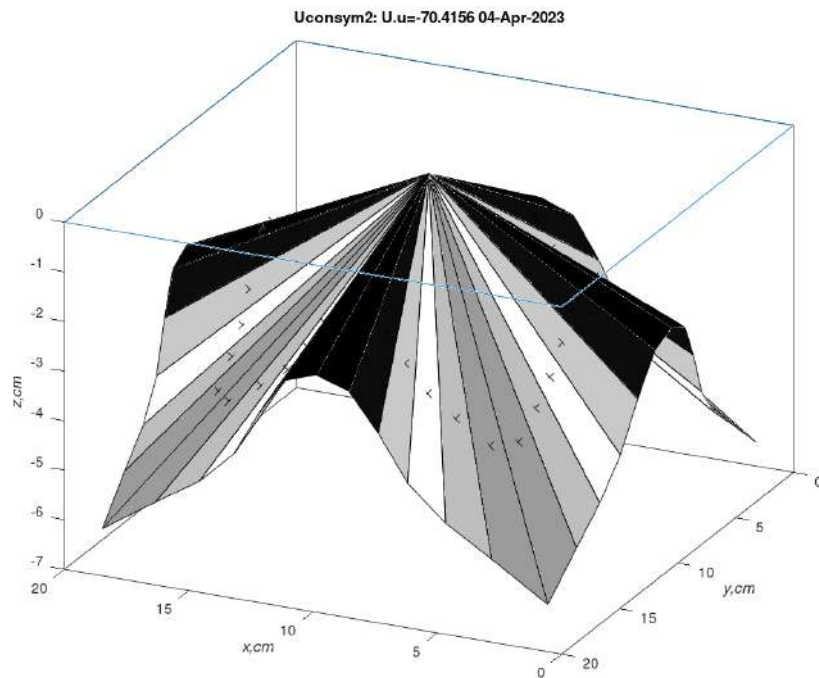


Рисунок 3.13 – Модель квадратного лоскута 20x20 с шаржированными вдоль оси OZ размерами

Наряду с полученной формой изгиба данного лоскута, которую можно назвать выпуклой (convex), может существовать вогнутая форма (concave). Для ее расчета задаем:  $nachalo = 1$ ,

$$X_{in} = [0 \ 0.27 \ 0.059 \ 0; -0.029 \ 0 \ 0 \ 0]; \%concave$$

В результате оптимизационного счета получаем:

$$X_{out} = [0 \ 0.530 \ 0.064 \ 0; 0.111 \ 0.040 \ 0.200 \ -0.060].$$

Значение целевой функции  $u = -66.3834$ , при этом упругая энергия лоскута  $U_{el} = 23.2271 \cdot 10^{-4}$  Дж, гравитационная энергия  $U_{gr} = -89.6105 \cdot 10^{-4}$  Дж. Углы на стыке полу-секторов равны

$$\beta_{sec} = [-0.4087 \ -0.5226 \ -0.4087].$$

На рисунках 3.14 представлена модель срединной поверхности лоскута в реальных пропорциях и вид сверху. Видно, что складки между углами лоскута вогнуты при взгляде сверху (в отличие от предыдущей модели типа convex). Середины сторон опускаются на высоту 5 см. Горизонтальная проекция деформированного лоскута мало отличается от исходного квадрата.

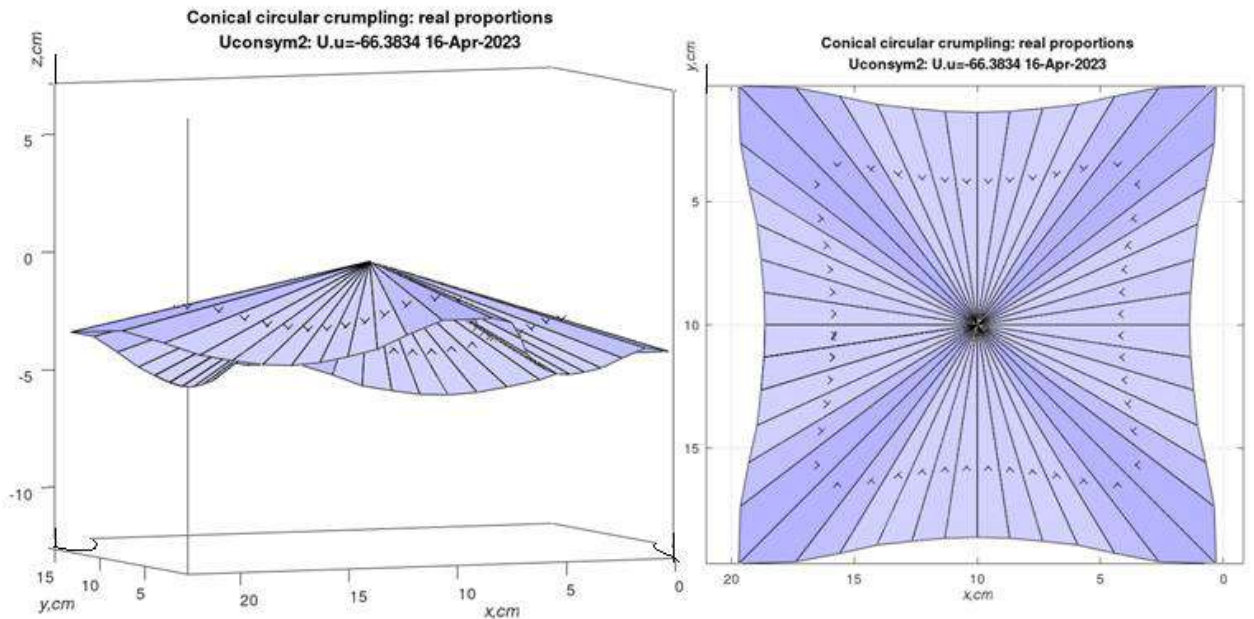


Рисунок 3.14 – «Вогнутая» форма изгиба лоскута 20x20 и вид сверху

Для лоскута размерами 30x30 см записываем исходные данные:

$X_{par} = [30 \ 30 \ 0.2 \ 1.275 \ 0.08 \ 3e+003 \ 0.5 \ 6 \ 15 \ 15 \ 0 \ 0 \ 4 \ 2 \ 0.8 \ 0.1];$

$nachalo = 1;$

$X_{in} = [0 \ 0.27 \ 0.059 \ 0; \ -0.029 \ 0 \ 0 \ 0].$

Получаем результаты:

$$X_{out} = [0 \ 1.410 \ 0.314 \ 0; \ 0.566 \ 0.195 \ 0.050 \ -0.440].$$

Значение целевой функции  $u = -542.0954$ , при этом упругая энергия лоскута  $U_{el} = 144.4309 \cdot 10^{-4}$  Дж, гравитационная энергия  $U_{gr} = -686.5263 \cdot 10^{-4}$  Дж. Углы на стыке полу-секторов равны



$$\beta_{\text{sec}} = [-0.8944 \ -1.0157 \ -0.8944].$$

На рисунке 3.15 представлена модель срединной поверхности лоскута в реальных пропорциях и вид на нее сверху. Имеем «вогнутую» форму изгиба. Края опускаются на 25 см. Узкие фолды (флейты) свидетельствуют о хорошей драпировке лоскута.

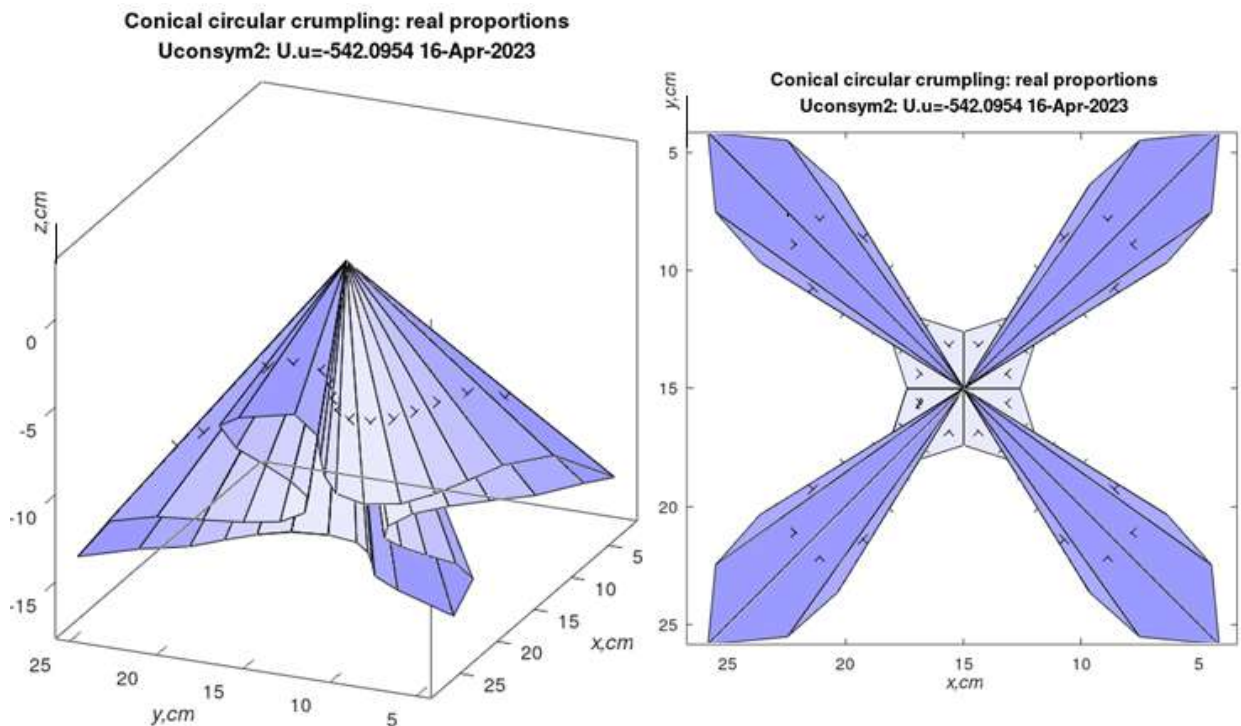


Рисунок 3.15 – Форма изгиба лоскута 30x30 и вид на нее сверху

### 3.3. Моделирование формы асимметричного конического изгиба анизотропного лоскута

Для моделирования срединной поверхности анизотропного текстильного лоскута произвольной формы создана программа `bendconasym` [101], которая обрабатывает информацию о форме и механических свойствах лоскута. Считается, что манипулятор с захватом обладает машинным зрением и способен установить вакуумную воронку так, чтобы ее центр попал в заданную точку лоскута.

Программа `bendconasym` (Приложение А) использует методы компьютерной геометрии. Представив изображение лоскута в виде `vrp`-файла, создаем

карту цветов изображения. Выделяем пиксели цвета данного лоскута, и присваивается этому цвету значение «0». Остальным цветам присваиваем значение «1». В процессе сканирования файла изображения определяем координаты центра тяжести лоскута (в «пиксельной» системе координат) и оцифровываем его границы. Для этого очередная вектор-строка цветов фрагмента изображения, состоящая из нулей и единиц, умножается на вектор-столбец фильтра:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

По результату скалярного умножения «1» или «2» выделяем «левую» и «правую» границы лоскута:

$$(0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0; \quad (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1; \quad (0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2; \quad (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Производим масштабирование изображения. Пусть известно расстояние (например, в метрах) между двумя помеченными на изображении лоскута точками. Пусть это диаметральные (наиболее удаленные друг от друга) точки, и тогда считается заданным диаметр фигуры  $D_f$ . Найдя диаметр изображения  $d_f$  в пикселях, переходим к размерам в метрах, умножая в дальнейшем все пиксельные размеры на масштабный коэффициент  $\mu = \frac{D_f}{d_f}$ .

Для определения диаметра  $d_f$  находим выпуклое замыкание изображения лоскута и применяем модифицированный алгоритм так называемых вращающихся калиперов, используемый в вычислительной геометрии [102]. Идея алгоритма отображена на рисунке 3.16: это вращение выпуклого многоугольника и фиксация наибольшего расстояния между вершинами.

Создаем развертку лоскута. Задавшись числом  $n_f$  граней, рассчитываем раствор  $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{n_f}$  граней. Строим образующие, исходящие из конической вершины. Используя заданную диаграмму зависимости изгибной жесткости от по-

лярного угла, путем интерполяции определяем изгибную жесткость при изгибе вокруг очередной образующей. При этом надо знать положение исходного «уточного» направления диаграммы относительно диаметральной линии или относительно осей абсолютной системы координат. Путем линейной интерполяции рассчитываем координаты точек пересечения образующих с границей лоскута.

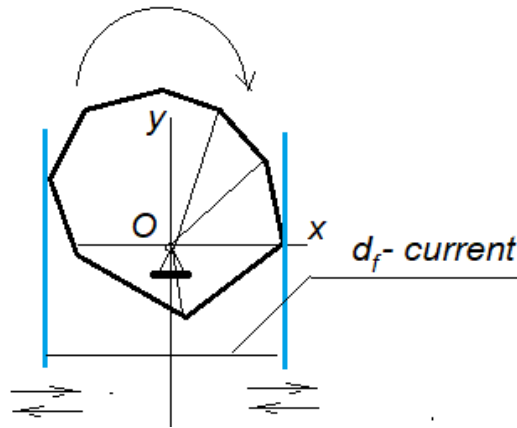


Рисунок 3.16 - Иллюстрация алгоритма вращающихся калиперов

Задаем начальные значения углов  $\gamma_0, \beta_0$ , определяющих положение в пространстве первой грани моделируемой поверхности, а также углов  $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \dots, \Delta\beta_{n_f-3}$  между гранями. При этом величины  $\Delta\beta_i$  формируются на основе представления функции  $\frac{d\beta}{d\alpha}$  конечным рядом Фурье:

нове представления функции  $\frac{d\beta}{d\alpha}$  конечным рядом Фурье:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} \approx a_0 + \sum_{j=1}^{n_{osc}} (a_j \cos j\alpha + b_j \sin j\alpha). \quad (3.2)$$

Задаем границы изменения варьируемых параметров  $\gamma_0, \beta_0, a_0, a_1, \dots, b_{n_s}$ . Их начальные значения находим методом Монте-Карло (методом случайного поиска внутри области ограничений).

В качестве примера взят лоскут драпа, изображенный на рисунке 3.17, а, характеризующийся диаметральной размером  $D_f = 40$  см. В качестве конической вершины взят центр тяжести лоскута (рисунок 3.17, б). Угол  $a_0$  от абсолютной оси Oх

до «уточного» направления  $\alpha_{g0} = \frac{2\pi}{3}$ . На рисунке 3.17, в изображена оцифрованная граница лоскута, на рисунке 3.17, г – его развертка. Там же показана диаграмма изгибной жесткости, наложенная на лоскут, и диаметральные точки.

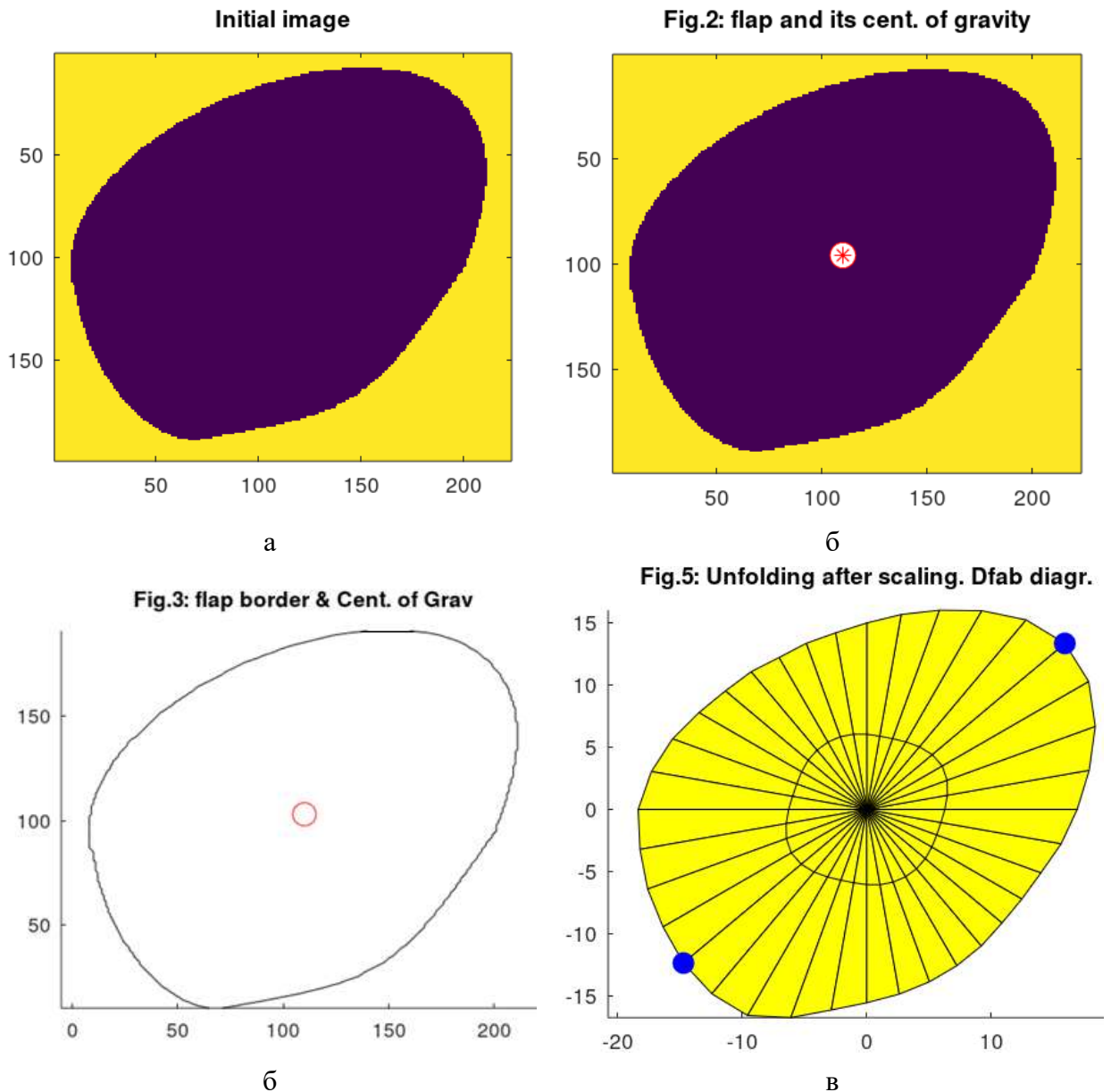


Рисунок 3.17 - Этапы обработки изображения лоскута: а – исходный образ, б – исходный образ с его центром тяжести, в – векторизованная граница лоскута, г – развертка с диаметральными точками и диаграммой изгибной жесткости

Массив постоянных параметров, вводимый в головную программу, имеет вид:

Xpar=[2\*pi/3 0.2 0 0.08 2 36 4 0 0 40 0.8  
0.25]

Его элементы имеют следующий смысл:

$[\alpha_{g0} \ h \ D \ p \ k_r \ n_s \ n_{osc} \ x_0 \ y_0 \ D_f \ c_0 \ c_w]$

Здесь, в дополнение к предыдущему, обозначено:

$k_r$  – коэффициент:  $R_p = k_r * h$ ,  $n_s$  – число граней,  $n_{osc}$  – число осциллирующих слагаемых в ряде Фурье (3.2),  $x_0$  и  $y_0$  – координаты конической вершины, Если они равны нулю, то вершина берется в центре тяжести.

Если параметр  $D = 0$ , то материал считается анизотропным.

Результат оптимизационного поиска конической формы изгиба лоскута представлен на рисунке 3.18. Размеры заданы в см, потенциальная энергия  $U$  выражена в  $Дж \cdot 10^{-4}$ . Изучая это изображение, мы видим, что данная форма изгиба близка к двухсекторной форме конического симметричного изгиба круглого изотропного лоскута, подвешенного в центре (рисунок 3.5).

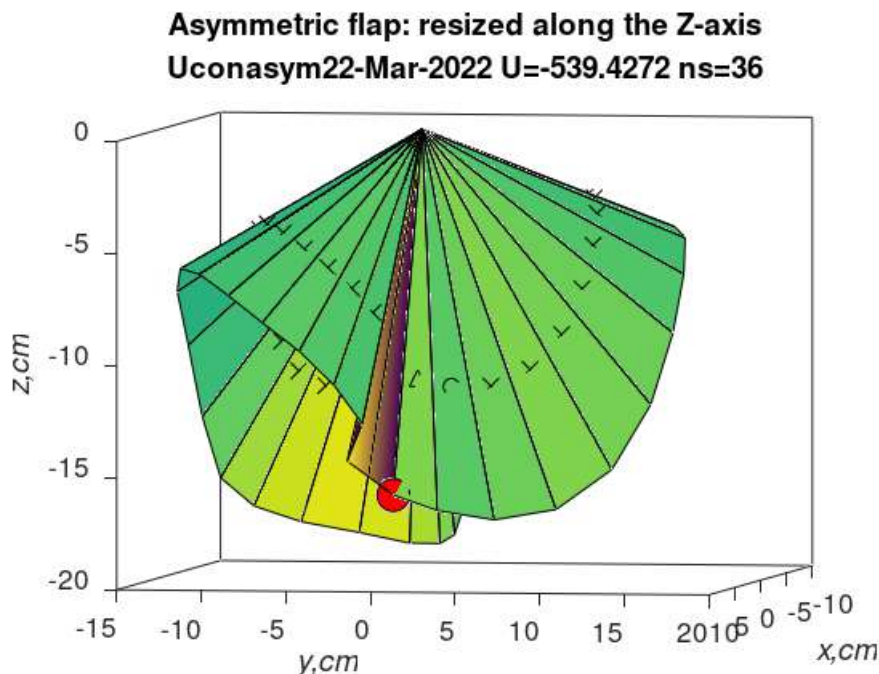


Рисунок 3.18 - Коническая форма изгиба лоскута шинельного драпа (цветом выделена первая и последняя грани)

Похожие формы можно наблюдать в экспериментах (рисунок 3.19).



Рисунок 3.19 - Захват эллиптического лоскута и вид на лоскут сверху

### 3.4. Моделирование сложного конического изгиба лоскута драпа

#### 3.4.1. Обработка эскиза края лоскута

Зададимся целью смоделировать сложный изгиб круглого лоскута драпа радиусом  $R = 20$  см, зафиксированный на рисунке 2.13. Захват выполнен вакуумной воронкой диаметром 8 см. Ось симметрии  $Oz$  вакуумной воронки вертикальна. Начальное приближение этой формы получим путем обработки изображения края лоскута.

Создаем эскиз проекции края лоскута на горизонтальную плоскость (рис. 2, а) как файл типа `bmp`. Эскизная кривая (рисунок 3.20, а) является приближением образа края с обязательным соблюдением числа перегибов кривой, изображающей край на рисунке 2.13.

Выполняем векторизацию данной кривой так, чтобы точки границы образовали последовательность, соответствующую возрастанию натурального параметра кривой. Заметим, что существует много способов векторизации кривой

(например, [103]). Переводим изображение кривой в черно-белый формат и создаем заливку внутренней части (рисунок 3.20, б).

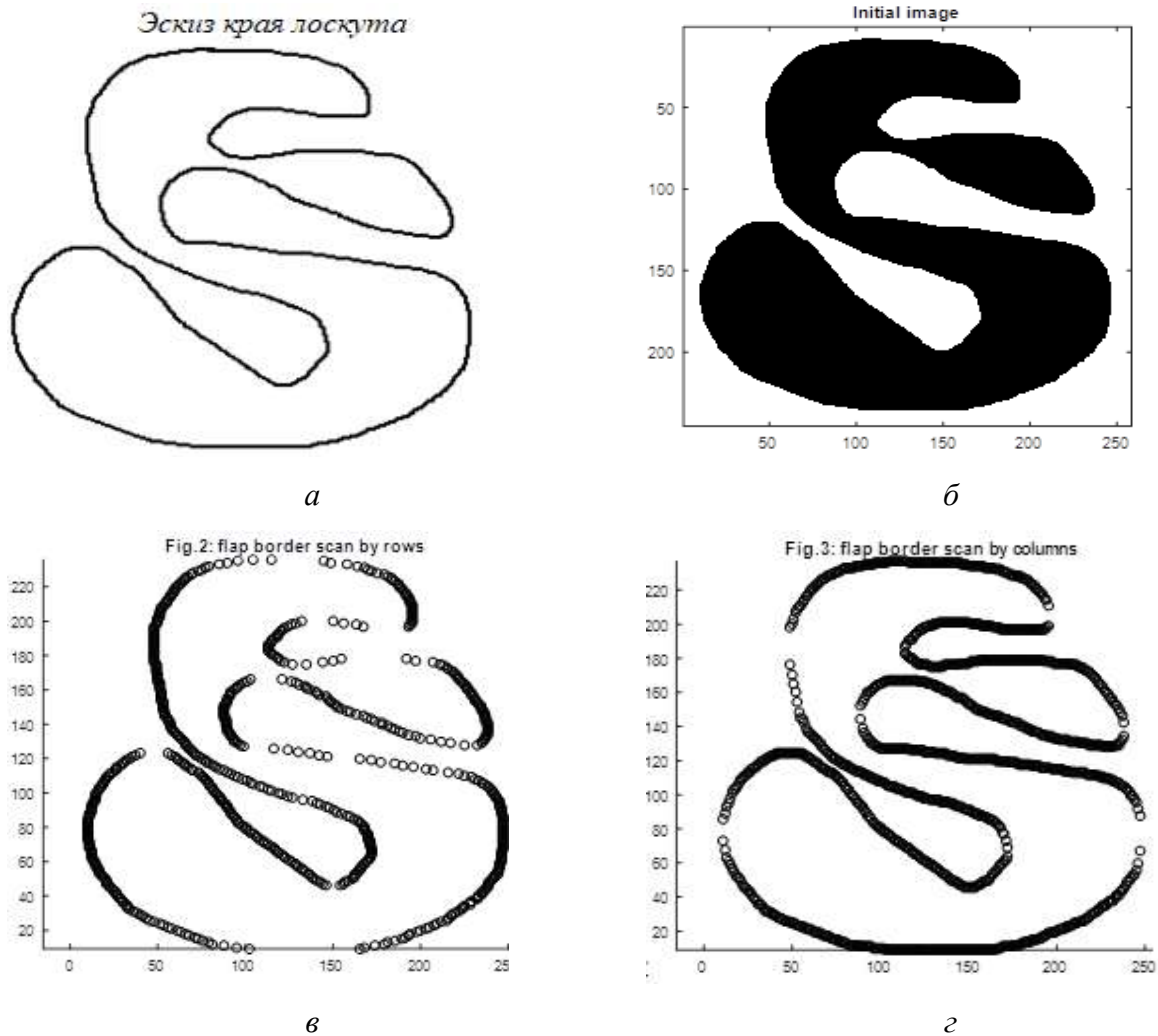


Рисунок 3.20 - Обработка изображения края: а – эскиз, б – заливка внутренней области, в и г – результаты сканирования

Сканируем изображение дважды: сначала по строкам, затем по столбцам. В результате первого сканирования имеем погрешности в окрестностях вертикальных экстремумов, в результате второго – погрешности в окрестностях горизонтальных экстремумов (рисунок 3.20, в, г). Координатами точек считаем адреса представляющих их пикселей в «пиксельной» системе координат. При этом учитываем адреса пикселей при переходе от белого цвета к черному и наоборот. Для этого вектор значений цветов двух последовательных пикселей (клеток) умножаем скалярно на поверочный вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Если это произведение равно 1, то теку-

щую клетку включаем в соответствующее множество  $G_{row}$  или  $G_{col}$  точек границы.

Объединяем множества:  $G_{rc} = G_{row} \cup G_{col}$ . Производим перебор точек, начиная с некоторой начальной точки (клетки). Клетку считаем квадратом со стороной 1. Для каждой текущей точки границы подбираем ближайших соседей. Поскольку линия края лоскута не имеет самопересечений, то соседей у центральной клетки может быть 4, 3 или 2 (рисунок 3.21). Соседи могут быть диагональные (находящиеся на расстоянии  $dist = \sqrt{2}$  от центральной клетки) или латеральные ( $dist = 1$ ). Соседей, учтенных ранее, игнорируем. Если новых соседей 2, то игнорируем латерального соседа, и следующей точкой создаваемой кривой считаем диагонального соседа. В итоге из множества  $G_{rc}$  выделяем множество  $G$  упорядоченных точек границы (рисунок 3.22, а).

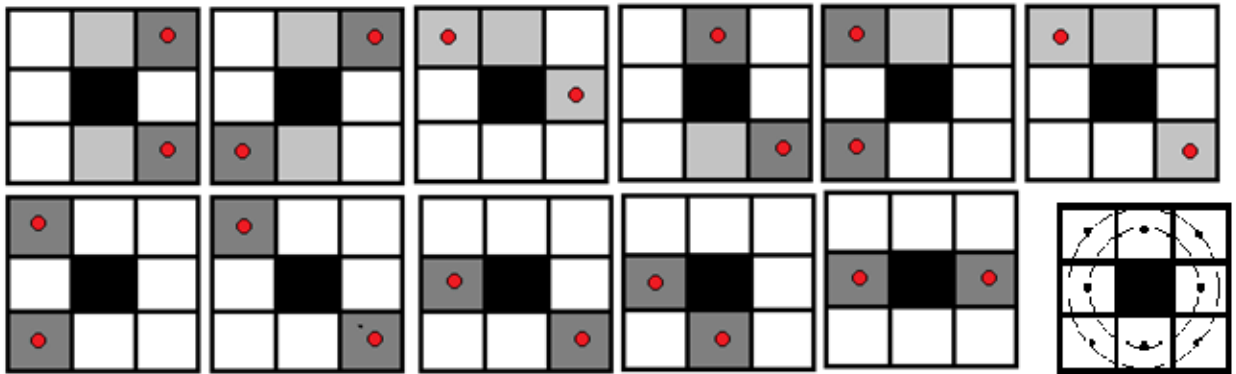


Рисунок 3.21 – Выбор соседних точек

Заключаем множество  $G$  точек в минимальный круг, находим его радиус  $r_{min}$  в «пиксельной» системе координат и точки на границе круга. Для этого применяем специальную подпрограмму `mincirc`. Находим точки на границе круга. Считаем, что это точки образующих конуса, касающихся края воронки и наклоненных к горизонту на угол  $\gamma_0$ . Центр  $O_I$  круга полагаем находящимся на оси  $Oz$ . Переходим к метрическим размерам, умножая координаты точек на масштабный множитель  $\mu_m = \frac{R_I}{r_{min}}$ , где  $R_I$  – радиус окружности, в плоскости которой находится





Пусть в равновесном положении лоскут втянут в воронку на расстояние  $H$ .

Угол  $\gamma$  наклона образующих к горизонту ограничен условием  $\tan \gamma \leq \tan \gamma_0 = \frac{R_B}{H}$ .

Данная схема деформации лоскута соответствует задаче о вдавливании упругого листа в цилиндр [93].

Энергию недеформированного лоскута, занимающего в плоскости  $O_B X_B Y_B$  область  $Q_0$ , полагаем равной нулю. Потенциальная гравитационная энергия многогранной модели лоскута, захваченного воронкой, равна

$$U_g = -G \cdot H + \sum_i U_{i,g}.$$

Здесь  $U_{i,g} = p_0 S_i (Z_{C_i} + H)$  - гравитационная энергия  $i$ -ой грани. При этом  $S_i$  - площадь грани,  $Z_{C_i}$  - аппликата центра тяжести  $C_i$  грани в системе координат с полюсом  $O$  в вершине конуса.

Пусть полученное множество  $G_s$  есть результат проектирования точек края лоскута на единичной сфере на плоскость  $\Pi$ , касающуюся этой сферы (рисунок 3.24, а). Пусть точка  $V(v_x, v_y, v_z)$  сферы проектируется в точку  $U(u_x, u_y)$  плоскости  $\Pi$ , и при этом  $r_u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ . Находим координаты точки  $V$  по заданным координатам точки  $U$ :

$$v_z = -\frac{1}{\sqrt{1+r_u^2}}, \quad v_x = u_x \frac{1}{\sqrt{1+r_u^2}}, \quad v_y = u_y \frac{1}{\sqrt{1+r_u^2}}.$$

Радиусу  $R_B$  соответствует сфера радиуса  $R_B / \cos \gamma_0$ , так что коэффициент масштабирования под сечение воронки равен  $\frac{R_B}{R_1} = R_B \tan \gamma_0 = H$ .

Имея набор ортов образующих  $\{V_i\}$ , находим углы  $\Delta \alpha_i$  между ними, нормали к граням и углы между нормальными  $\Delta \beta_i$ , дающие возможность построить начальное приближение многогранной модели (рисунок 3.24, б).

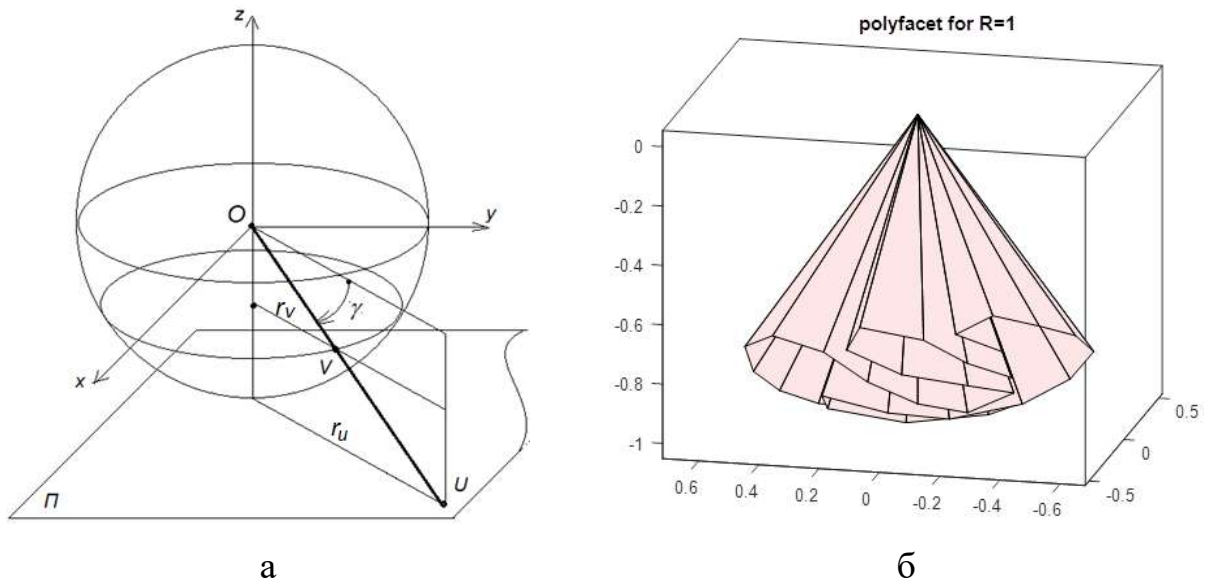


Рисунок 3.24. Проектирование на плоскость  $\Pi$  исходящими из точки  $O$  лучами (а).  
Многогранная исходная модель конической поверхности (б)

Угол раствора граней делаем одинаковым:  $\Delta\alpha = 2\pi / n_s$ . Для этого путем интерполяции создаем новый набор углов  $\{\Delta\beta_i\}$  для регулярной сетки на интервале  $[0, 2\pi]$ .

Для поиска оптимальной формы лоскута создана программа `bendconvassim` [104] в среде MATLAB (Приложение А). Для инициации ее работы надо ввести путь к файлу с эскизом края листа, массив постоянных параметров задачи, массив параметров оптимизации и указать способ формирования начального приближения массива варьируемых параметров

$$X_{in} = \gamma_0, \beta_0, \Delta\beta_1, \Delta\beta_2 \dots \Delta\beta_{n_s-3},$$

Величины  $\Delta\beta_i$  могут задаваться непосредственно или формироваться на основе представления рядом Фурье (3.2).

Моделируем сложную поверхность при условии, что сила тяжести противовеса  $G = 20P$ , где  $P = 1,004 \text{ Н}$  – вес лоскута. На рисунке 3.25, а изображен подготовленный к дальнейшим расчетам эскиз края 36-гранной поверхности, а на рисунке 3.25, б – соответствующая срединная поверхность лоскута, где условно обозначена вакуумная воронка.

Путем удвоения числа граней получена 72-гранная модель (рисунок 3.26). Данная модель характеризуется потенциальной энергией  $U = -1,171$  Дж, при этом доля упругой энергии  $U_e = 0,017$  Дж. Высота втянутой части лоскута  $H = 5,5846$  см, угол  $\gamma_0 = 0,9492$ , угол  $\beta_0 = -0,3001$ . График зависимости  $\beta(\alpha) = \beta_0 + \sum_i \Delta\beta_i$  представлен на рисунке 3.27, а. На рисунке 3.27, б приведены координаты точек контакта воронки с лоскутом.

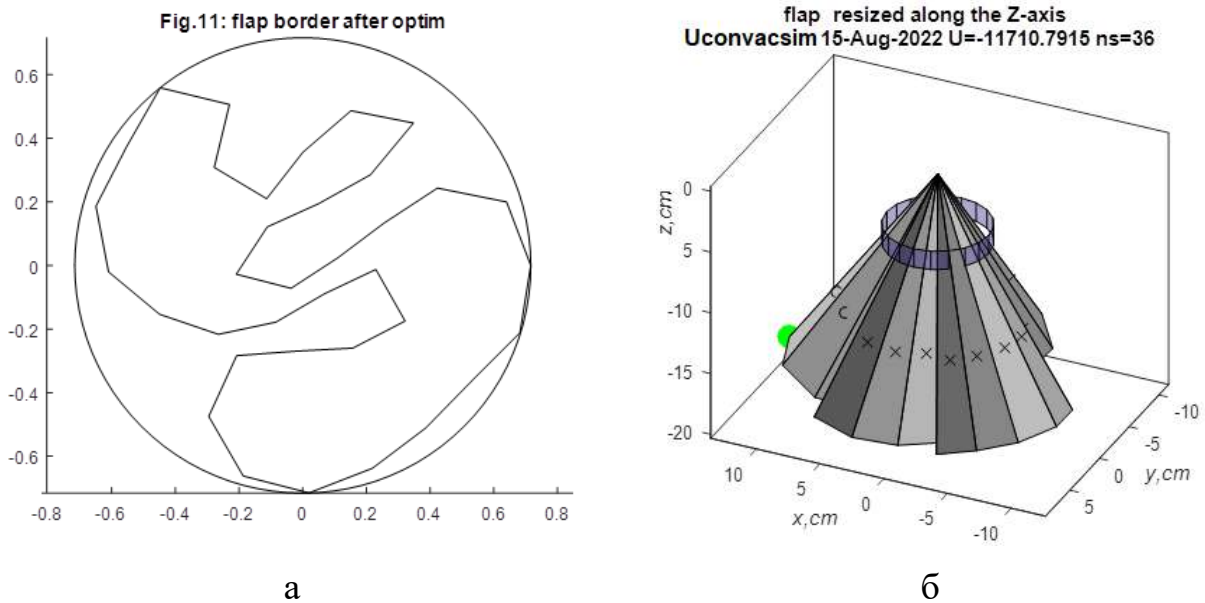


Рисунок 3.25 - Начальная стадия моделирования изгиба лоскута в виде 36-гранной поверхности: а – подготовленный эскиз края, б – построенная поверхность

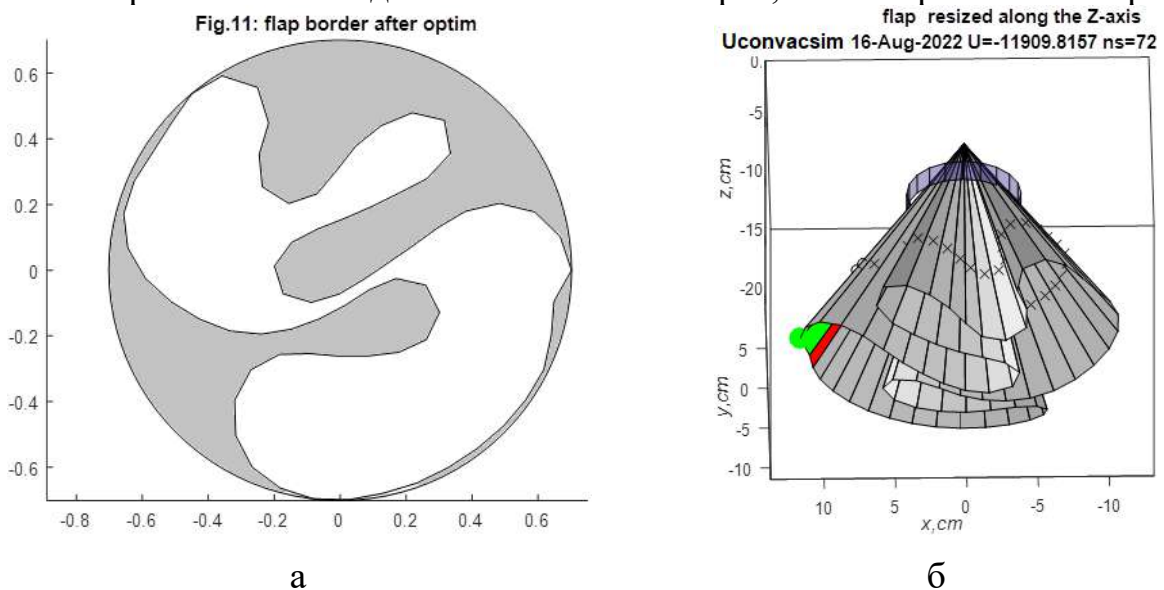


Рисунок 3.26 - Эскиз края 72-гранной поверхности с выделенным зазором между лоскутом и краем воронки (а) и модель поверхности (б)

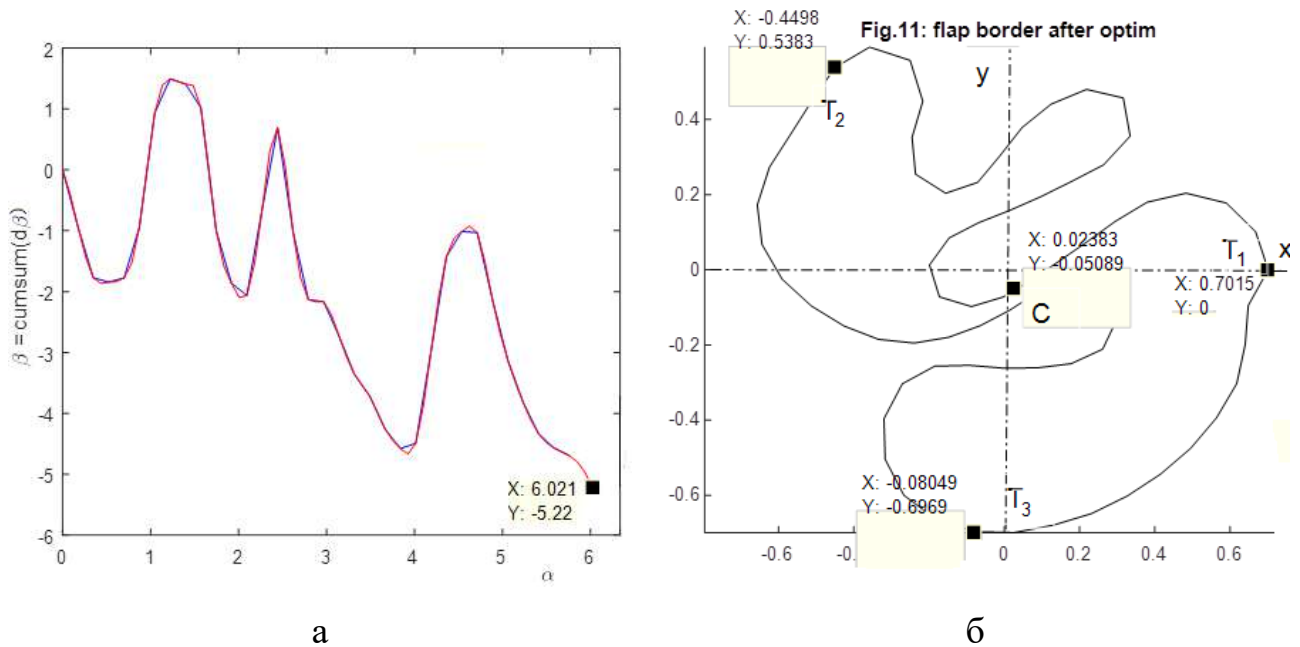


Рисунок 3.27 - График зависимости  $\beta = \beta(\alpha)$  (а). Координаты точек приложения сил в плоскости края воронки (б).

### 3.5. Моделирование формы лоскута, захваченного плоским сетчатым захватом

Рассмотрим захват лоскута плоским захватом, представляющим собой вакуумную воронку с сеткой или захват с несколькими воронками, края которых находятся в одной плоскости, причем захваченная область находится в границах лоскута. Тогда поднятый захватом лоскут может принимать форму накидки. Простейшая модель накидки – симметричная накидка, описанная в п. 2.4.3 «Комбинированный изгиб лоскута». Моделирование такой накидки выполняем с помощью модернизированной программы *bendcape* [105].

Для работы этой программы задаем вектор постоянных параметров задачи:

$$X_{par} = [r \ R \ h \ D \ p \ [\sigma] \ R_p \ n_s \ k_{sec} \ k_{mir} \ c_0 \ c_w \ p_{ro} \ n_r].$$

Здесь  $r$  – радиус плоского круглого захвата,  $R$  – радиус лоскута,  $h$  – его толщина,  $D$  – его изгибная жесткость,  $p$  – интенсивность гравитационной нагрузки на лоскут,  $[\sigma]$  – некоторое предельное напряжение,  $R_p$  – радиус сингулярной зоны вокруг конической вершины,  $2n_s$  – число граней в каждой конической области накидки,  $k_{sec}$  – количество одинаковых секторов,  $k_{mir}$  – признак симметрии внутри

конической области,  $c_0$  – начальная интенсивность тона рисунка грани,  $c_w$  – шаг интенсивности тона,  $p_{ro}$  – признак способа расчета радиуса изгиба лепестка  $\rho_{pet}$ ,  $n_r$  – коэффициент при расчете радиуса  $\rho_{pet}$ :  $\rho_{pet} = n_r h$ .

Матрица входных значений переменных параметров  $X^{in}$  имеет 2 строки и  $n_{pd} = n_s - 2$  столбца. В первой строке находятся величины  $X^{in}(1, 1) = \gamma_p$ ; – угол наклона лепестка к горизонту и  $X^{in}(1, 2) = \alpha_v$  – угол, определяющий границу лепестка на развертке. Во второй строке находятся углы  $\Delta\beta_k$ , определяющие форму полу-сектора конической зоны.

Для моделирования накидки с 4 секторами из лоскута драпа задаем:

$X_{par} = [5 \ 10 \ 0.2 \ 1.75 \ 0.08 \ 3e+003 \ 0.5 \ 5 \ 4 \ 2 \ 0.6 \ 0.1 \ 4 \ 4]$ .

В результате оптимизационного счета получаем модель накидки, изображенную на рисунке 3.28 и ее развертку. Маркеры «х» указывают положения центров тяжести граней.

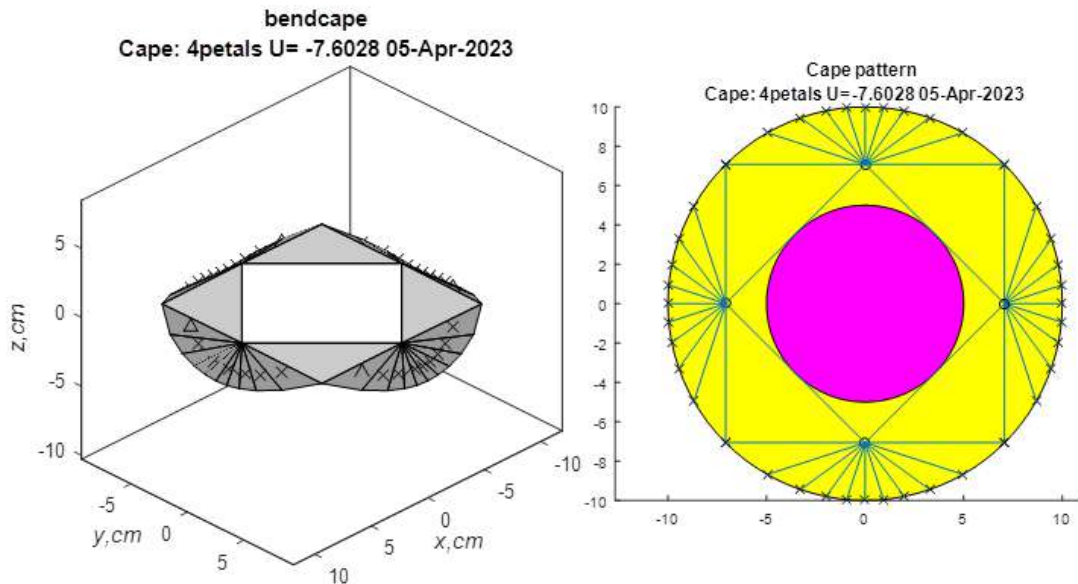


Рисунок 3.28 – модель накидки из драпа с 4 лепестками и ее развертка

Строим далее модели с 5 и 6 лепестками (рисунок 3.29). Энергия по мере возрастания числа лепестков становится меньше.

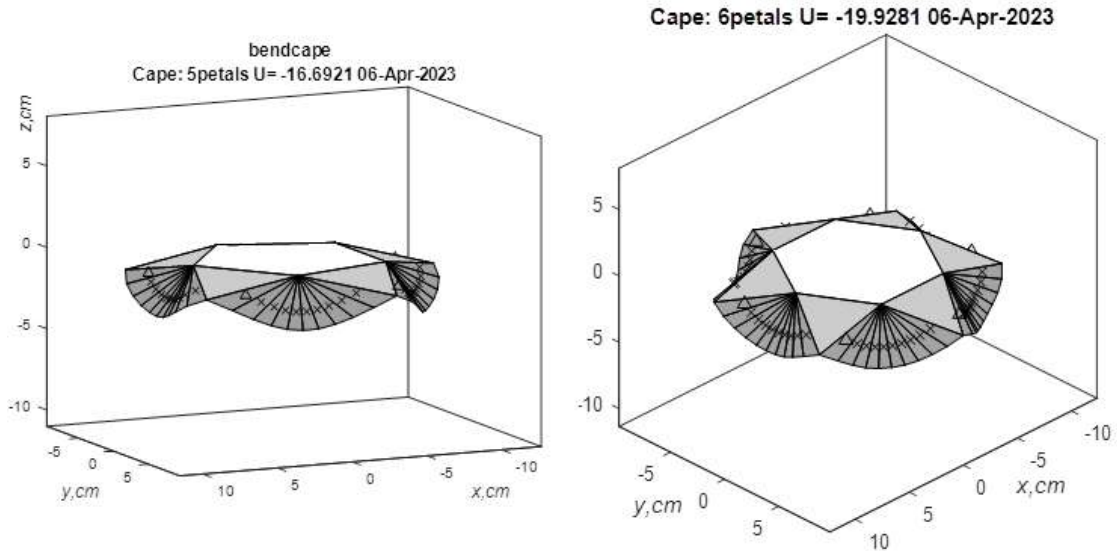


Рисунок 3.29 – Накидки из драпа с 4 и 6 лепестками

Модель с 7 лепестками (рисунок 3.30) имеет минимальную потенциальную энергию  $U = -20.5 \cdot 10^{-4}$  Дж в этом семействе накидок. Она и будет самой устойчивой в этом семействе. Следующая модель с 8 лепестками имеет энергию  $U = -17.8 \cdot 10^{-4}$  Дж. Наблюдая изображения накидок, видим, что провисание лоскута при  $3 < k_s < 10$  составляет величину от 6 до 3,5 см.

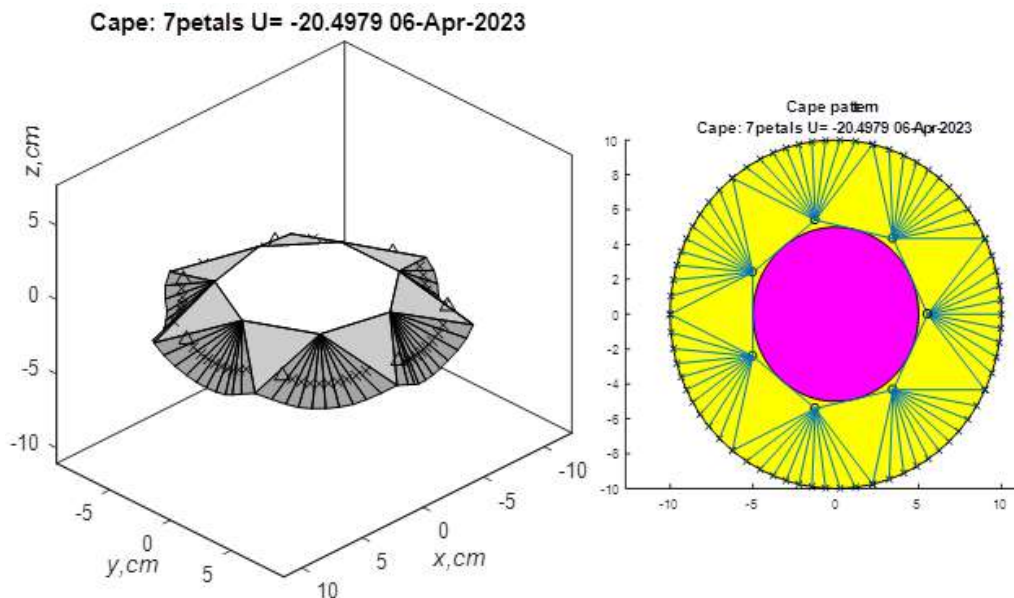


Рисунок 3.30 – Накидка из драпа с 7 лепестками и ее развертка

В этом семействе конические области являются вогнутыми (если смотреть сверху). Изменяя знаки углов между гранями внутри конической области, можно построить выпуклые модели накидки. Минимальную энергию теперь имеет накидка с 6 лепестками (рисунок 3.31).

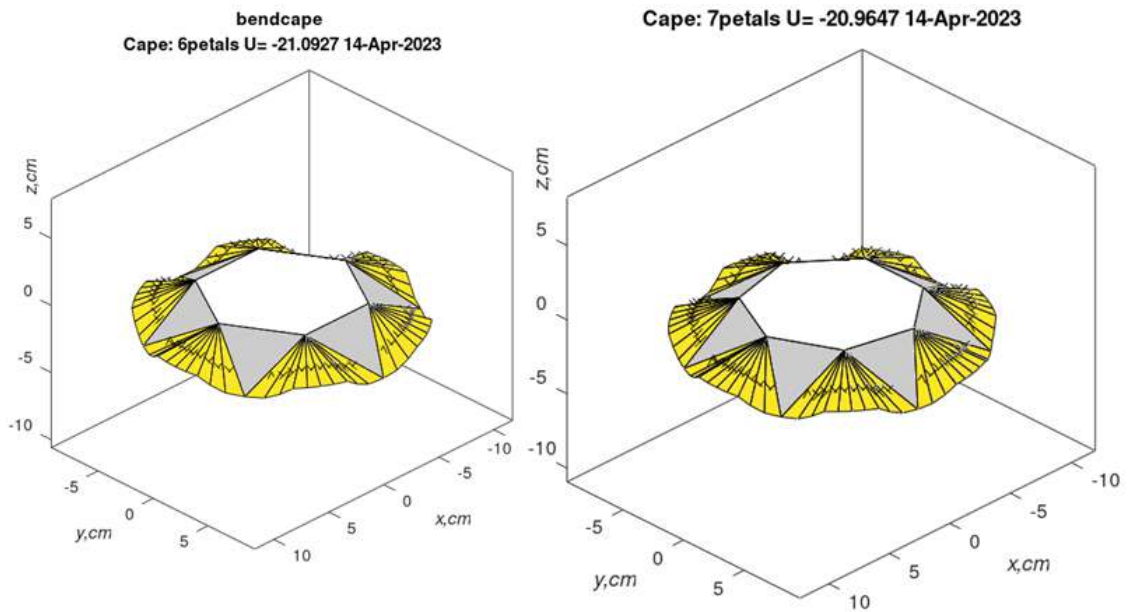


Рисунок 3.31 – «Выпуклые» накидки из драпа с 6 и 7 лепестками

Модель накидки с внутренним радиусом  $r = 13$  см и радиусом лоскута  $R = 30$  см, имеющая 7 лепестков, изображена на рисунке 3.32. Потенциальная энергия модели  $U = -915.2 \cdot 10^{-4}$  Дж. Модель вполне адекватна реальной накидке, изображенной на рисунке 3.33.

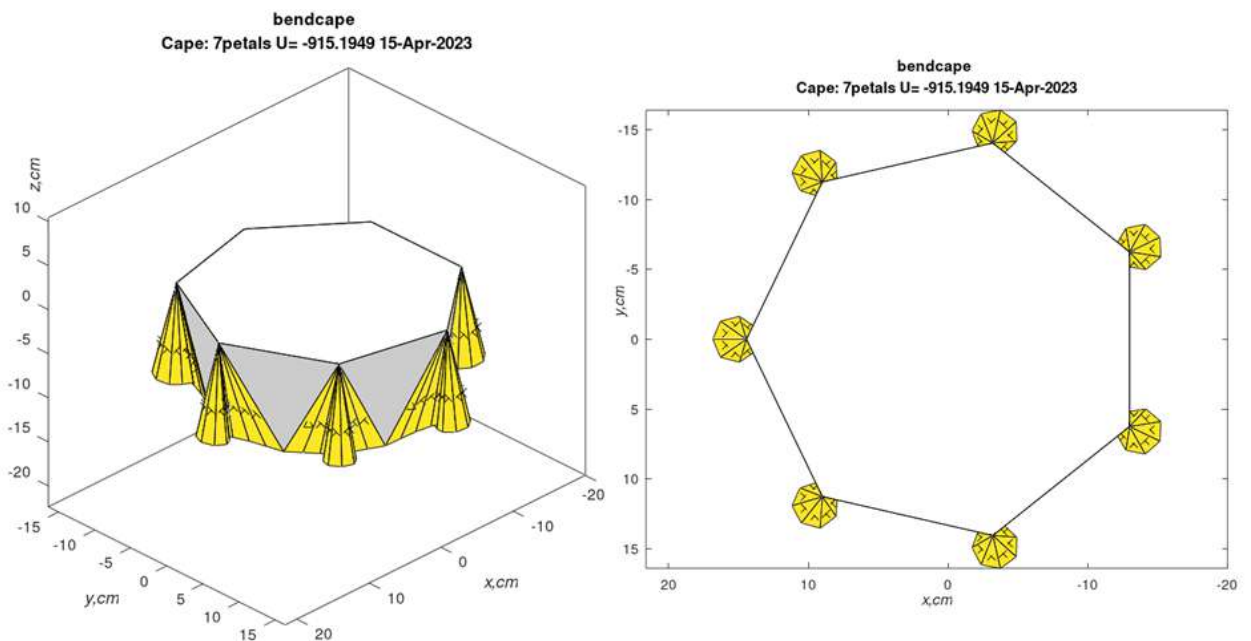


Рисунок 3.32 – Выпуклая накидка радиусом 40 см с 7 лепестками



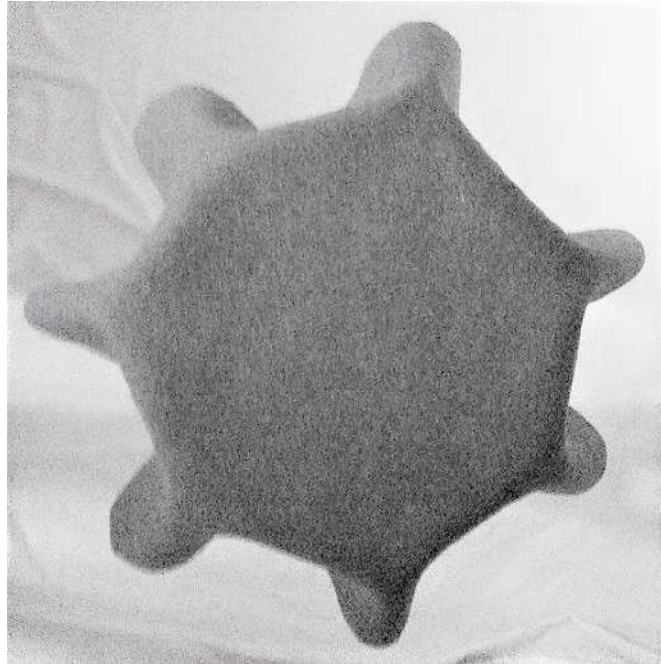


Рисунок 3.33 – Фотография накидки из драпа радиусом 40 см

### **3.6. Моделирование изгиба свешивающихся частей лоскута, удерживаемого плоским захватом**

Если лоскут удерживается плоским захватом, возможны случаи, когда отдельные части лоскута свешиваются, имея фиксированную образующую (рисунки 2.2, 2.4). Срединная поверхность такого лоскута может быть цилиндрической или торсовой. При построении торсовой модели срединная поверхность представляется в виде совокупности плоских граней, имеющих форму выпуклого многоугольника. На плоской развертке лоскута вводятся координатные линии. Одно их семейство – семейство прямых образующих, другое – семейство направляющих. Назначается опорная направляющая, вдоль которой отсчитывается координата  $s$ , и опорная образующая, вдоль которой отсчитывается координата  $r$ . Совершая шаги вдоль опорной направляющей, строим на каждом шаге образующую, и находим точки  $M_i$  пересечения ее с границами развертки. Строим многоугольник очередной грани с вершинами в точках пересечения, который считаем выпуклым.

Для исследования многоугольника грани создана специальная программа, внутри которой исследуется взаимное расположение точек  $M_i$ . Многоугольник

разделяется на отдельные треугольники (рисунок 3.34). Устанавливается последовательность вершин, обеспечивающая выпуклость многоугольника. Рассчитывается площадь многоугольника и положение его центра тяжести в локальном базисе.

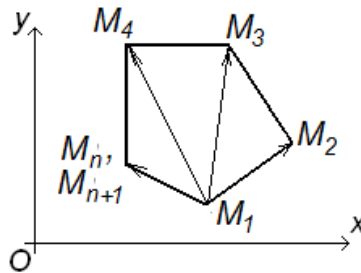


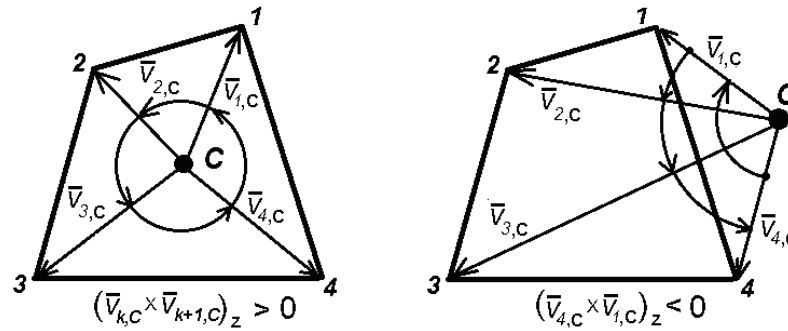
Рисунок 3.34 – Триангуляция многоугольника

Когда строится очередная грань модели, следует исследовать вопрос о возможном пересечении ее с ранее построенными гранями. Для исследования возможности пересечения выпуклых многогранников в вычислительной геометрии применяют разные методы, например алгоритм Лина–Кэнни [106] и другие. Мы исследуем положение точки  $C$  пересечения стороной одного многоугольника плоскости  $\Pi$  другого многоугольника (рисунок 3.35). Пусть  $\vec{N}$  - вектор нормали к плоскости  $\Pi$ . Строим векторы  $\vec{V}_{k,C}$ , соединяющие точку  $C$  и вершины  $V_k$  многоугольника. Если знаки всех смешанных произведений векторов

$$\vec{V}_{k,C} \times \vec{V}_{k+1,C} \cdot \vec{N}$$

одинаковы, то точка  $C$  находится внутри многоугольника, и, следовательно, грани пересекаются.

Торсовый изгиб свешивающегося фрагмента можно моделировать с помощью созданного на кафедре машиноведения СПбГУПТД пакета программ с общим именем `bendjaw`. Для фрагмента прямоугольной формы используем исходную программу `bendjaw` [107].

Рисунок 3.35 – Точка  $C$  внутри и вне многоугольника

Для работы программы надо задать матрицу  $X_{par}$  постоянных параметров:

$$X_{par}(1,:) = [l_x \quad l_y \quad D \quad p \quad \rho_{st} \quad \alpha_x]; \quad X_{par}(2,:) = [x_0 \quad y_0 \quad \alpha_0 \quad p_{ex} \quad n_s \quad \alpha_y].$$

Здесь обозначено:  $l_x$  и  $l_y$  – размеры лоскута;  $D$  и  $p$  – его изгибная жесткость и интенсивность распределенной гравитационной нагрузки;  $\rho_{st}$  – параметр изменения первого шага  $d_0$  по сравнению со стандартным шагом  $d$  вдоль опорной направляющей;  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  – углы, определяющие наклон захваченной грани;  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\alpha_0$  – параметры образующей, разделяющей захваченную и свешивающуюся части;  $p_{ex}$  – признак способа экстраполяции при выходе за пределы заданного количества граней;  $n_s$  – планируемое число граней.

В качестве примера рассмотрим лист писчей бумаги. Задаем:

$$X_{par} = [21 \quad 29.7 \quad 1.7361 \quad 0.00785 \quad 1 \quad 0; \quad 12 \quad 5 \quad \text{pi}/6 \quad 0 \quad 10 \quad 0]$$

Получаем модель, изображенную на рисунке 3.36, обладающую энергией  $U = -32.6323 \text{ кг*см}^2/\text{с}^2$ . Массив выходных значений варьируемых параметров имеет вид:

$$X_{out} = [-0.0330 \quad -0.0300 \quad -0.02 \quad -0.01 \quad -0.005 \quad -0.001 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \\ -0.8055 \quad -0.3105 \quad -0.20 \quad -0.10 \quad -0.050 \quad -0.020 \quad -0.01 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Первая строка – углы  $\Delta\alpha_k$  между образующими, вторая строка – углы  $\Delta\beta_k$  между гранями. Видно, что на удалении от захвата лист стремится принять форму цилиндрического изгиба и становится практически плоским.

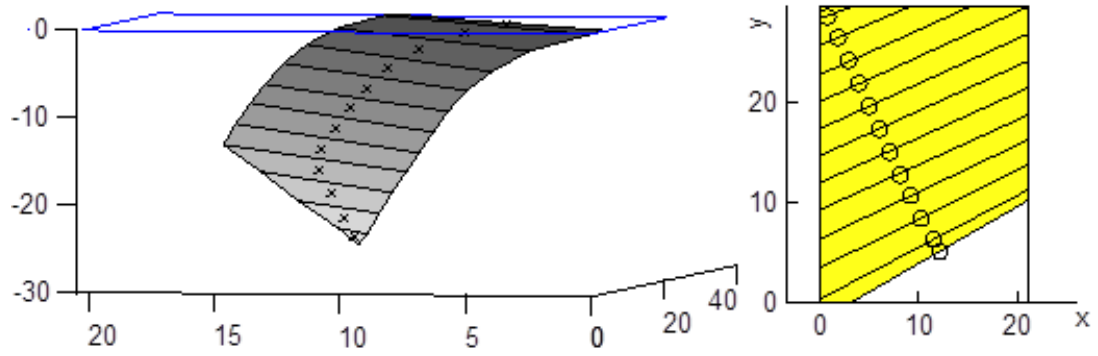


Рисунок 3.36 – Торсовая модель изгиба листа и ее развертка

Изгиб полоски драпа размерами 10 x 5 см, зажатой в вертикальных губках, и его модель изображены на рисунке 3.37. Модель стельки, развертка которой изображена на рисунке 2.47, представлена на рисунке 3.38.

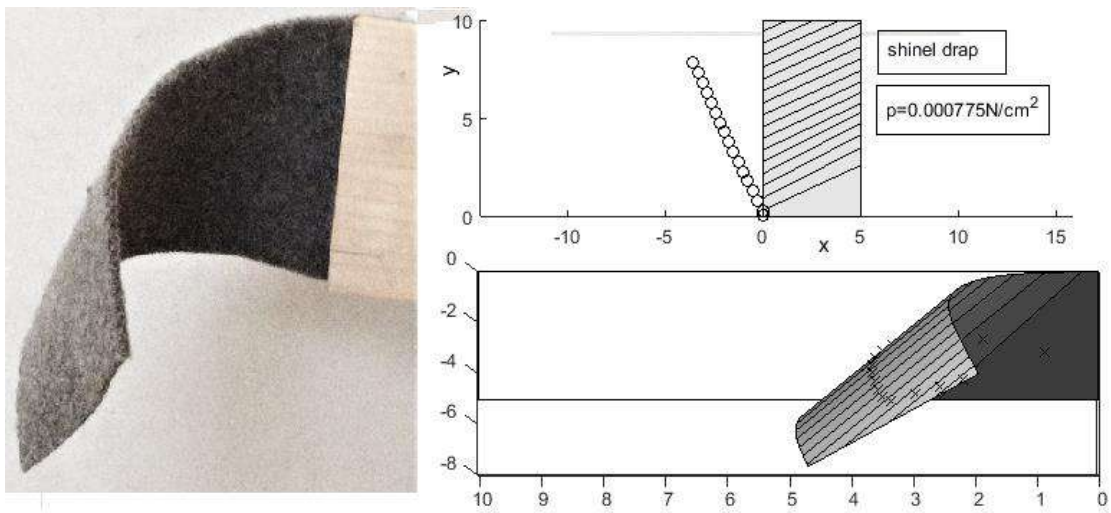


Рисунок 3.37 – Лоскут драпа в вертикальных губках, его развертка и модель

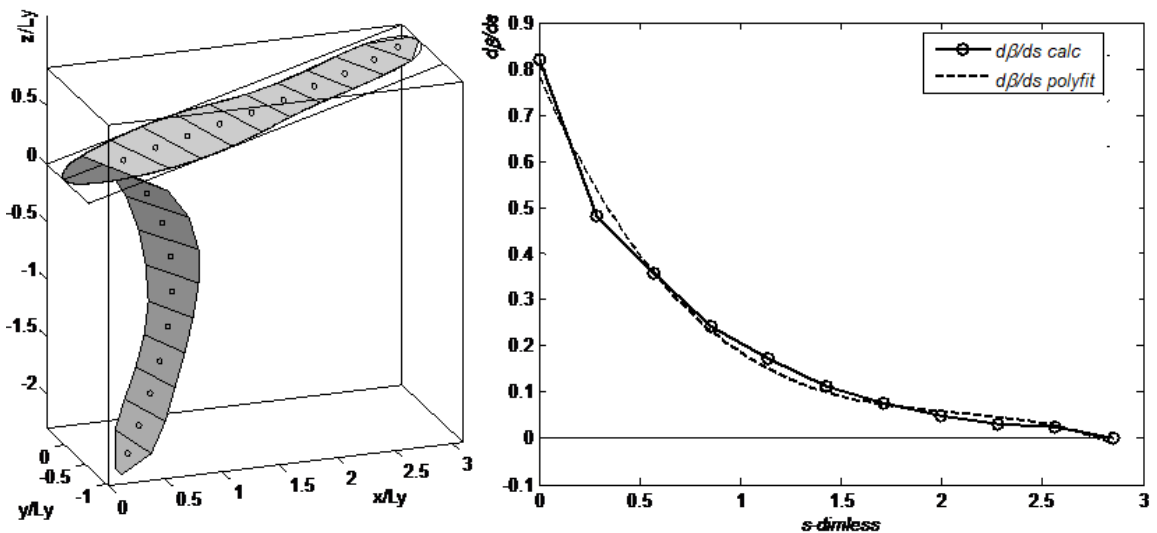


Рисунок 3.38 – Модель стельки и график зависимости  $\alpha = \alpha(s)$

При моделировании цилиндрического изгиба исследуем возможность пересечений отрезков  $MN$  и  $mn$  с окружающими полями (рисунок 3.39). Ширина полей равна толщине лоскута  $h$ .

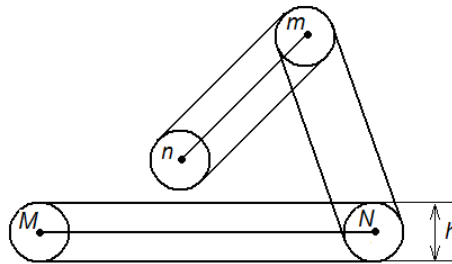


Рисунок 3.39 – Обеспечение зазоров между отрезками

На рисунке 3.40 представлено изображение полоски драпа шириной 5 см и длиной 10 см, заделанной горизонтально. Изображение подготовлено для экспериментального определения изгибной жесткости: лоскут изображен в профиль и зафиксирована длина  $H_e$  для масштабирования.

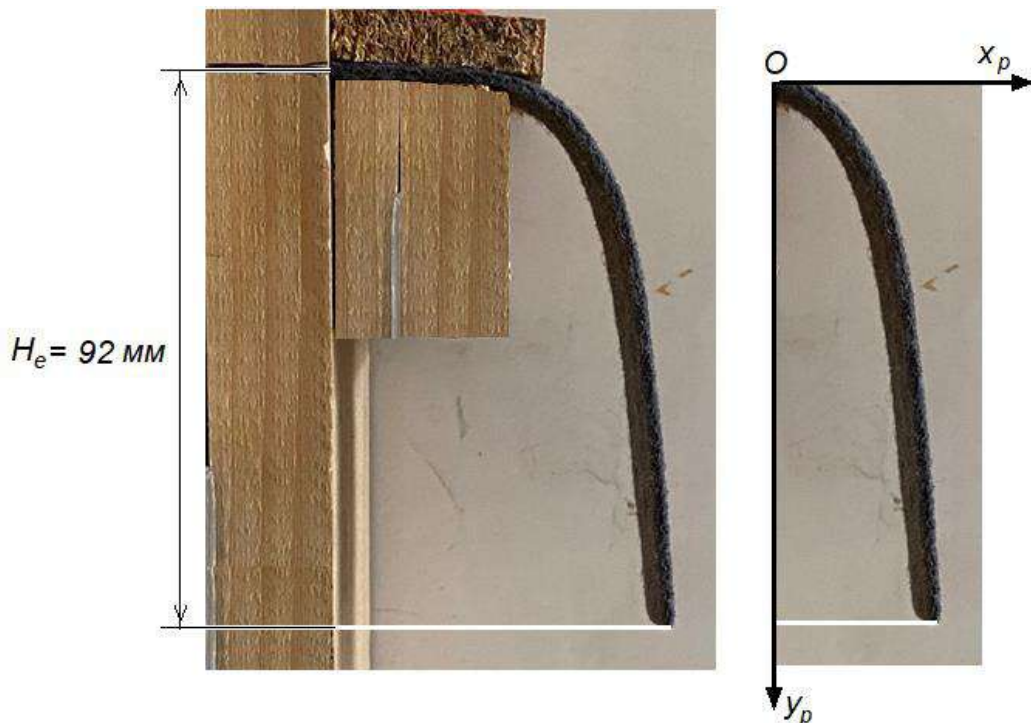


Рисунок 3.40 – Полоска драпа 5 x 10 см, заделанная горизонтально

Компьютерная модель изгиба этой полоски, полученная с помощью программы `bendjaw`, изображена на рисунке 3.41. Изгибная жесткость образца при изгибе вокруг образующих  $D=0.012 \text{ Н*см}$ . На рисунке 3.42 представлены три

профиля полоски: *opt* - профиль, полученный оптимизационным счетом по программе *bendjaw*, *bvp* - полученный путем решения дифференциального уравнения (2.15) и экспериментальный (*exper*). Экспериментальные координаты точек в «пиксельной» системе координат  $Ox_p y_p$  получены сканированием изображения 3.40:

$x_p = [0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1.0 \ 1.2 \ 1.4 \ 1.7 \ 1.8 \ 1.9 \ 2.0 \ 2.1 \ 2.2 \ 2.25 \ 2.3];$

$y_p = -[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.5 \ 0.75 \ 1.0 \ 2.0 \ 3.0 \ 4.0 \ 5.0 \ 6.0 \ 7.0 \ 8.0 \ 9.0 \ 9.25];$

Сплошной линией представлен результат интерполяции профиля полиномом 3 степени. Видно, что все профили примерно совпадают.

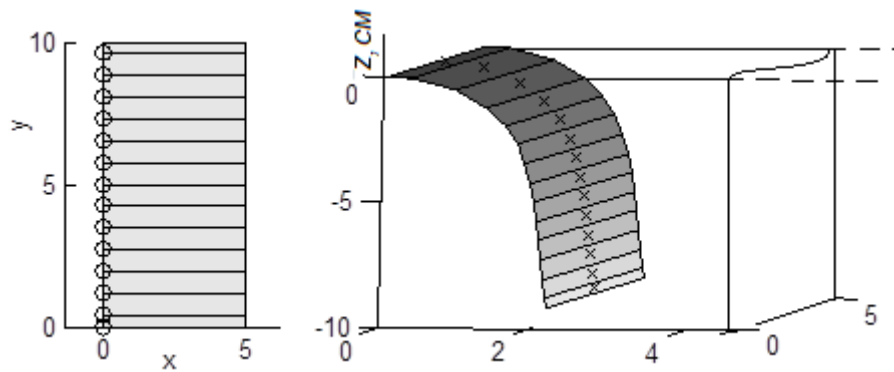


Рисунок 3.41 – Развертка и модель полоски драпа

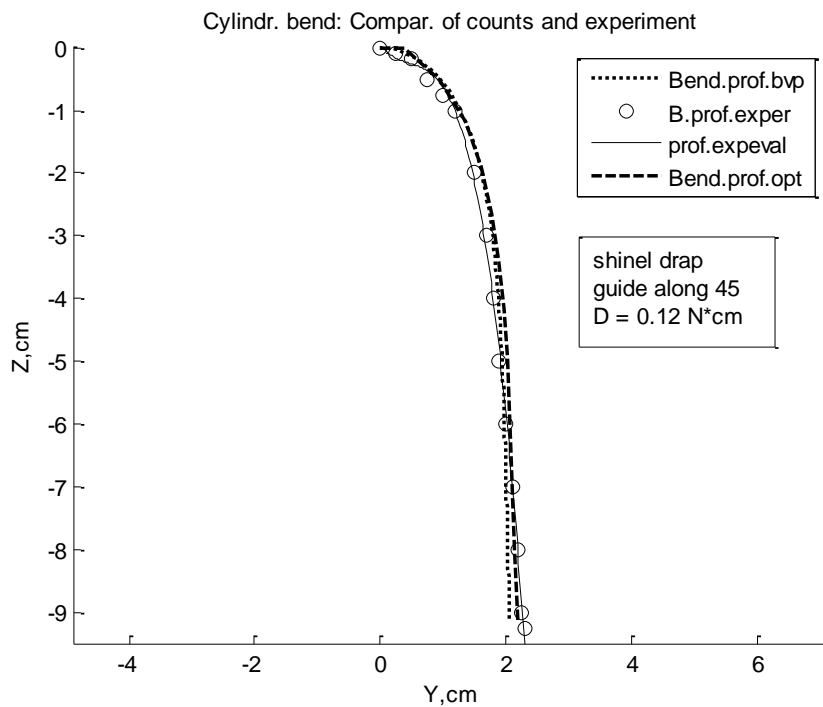


Рисунок 3.42 – Экспериментальный и расчетные профили полоски

### 3.7 Выводы по главе 3

Для моделирования срединной поверхности лоскута, захваченного вакуумными захватами, применены компьютерные программы, составленные в среде компьютерной математики MATLAB. Используются как модифицированные программы, разработанные ранее на кафедре машиноведения СПбГУПТД, так и созданные заново. Общий метод поиска равновесной формы срединной поверхности – оптимизационный, основанный на поиске экстремума целевой функции, являющейся потенциальной энергией, сложенной со штрафными компонентами, учитывающими дополнительные условия моделирования.

Представлены основные соотношения, заложенные в алгоритмы программ, в частности, принципы обеспечения отсутствия самопересечений моделируемых поверхностей. Описаны способы ввода в них исходных данных и вывода результатов счета.

Сравнение результатов счета с экспериментальными данными подтверждает эффективность оптимизационного подхода к решению задач о форме деформированных текстильных лоскутов.

## ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ЗАХВАТА, ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И УКЛАДКИ ЛОСКУТОВ ТКАНИ ВАКУУМНЫМИ ЗАХВАТНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ

### 4.1. Применение простейших моделей деформированных лоскутов для изучения их статики и динамики

Для оценочных суждений о форме деформированного лоскута можно применять простейшие модели его срединной поверхности с минимальным количеством граней. Например, односекторный конический изгиб круглого лоскута можно представить четырехгранной звездчатой пирамидой. Развертка пирамиды изображена на рисунке 4.1, а. При наличии зеркальной симметрии развертка задается углом  $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ . Деформированная фигура лоскута имеет 4 грани, и пусть при этом ребра  $OM_0$ ,  $OM_1$  и  $OM_3$  выпуклые при виде сверху, а ребро  $OM_2$  – вогнутое. Пирамида из четырех граней является механической системой с одной степенью свободы. Обобщенной координатой будем считать угол  $\gamma$  наклона ребра  $OM_0$  к горизонту.

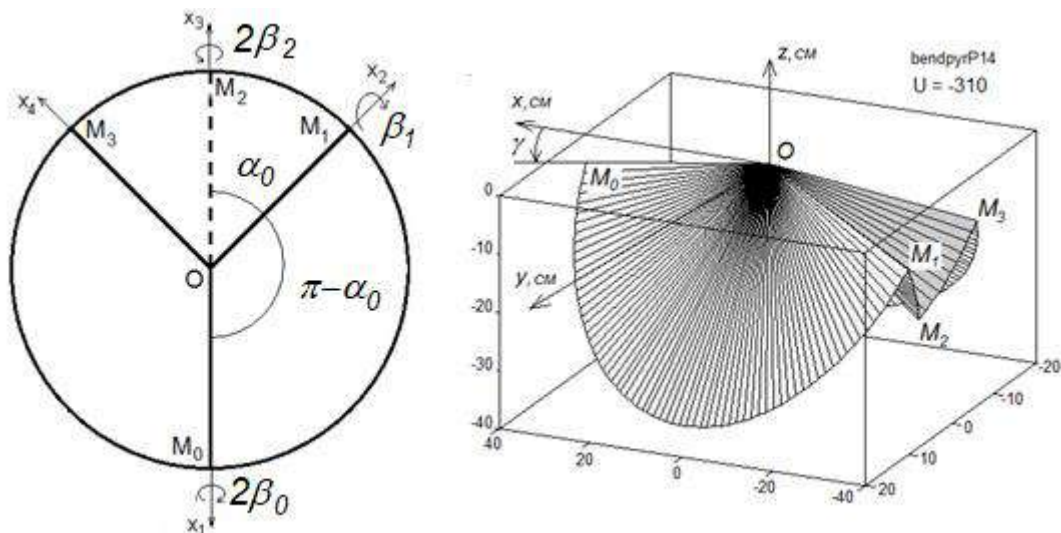


Рисунок 4.1 - Развертка (а) и модель (б) односекторного изгиба лоскута



Модель имеет шатровую и серповидную разновидности. Шатровая форма характеризуется углом  $\gamma_2$  наклона ребра  $OM_2$ , удовлетворяющим условию  $\gamma_2 < \frac{\pi}{2}$ . Серповидная форма образуется при условии  $\gamma_2 > \frac{\pi}{2}$ . Углы поворота граней пирамиды друг относительно друга обозначаем как  $2\beta_0$ ,  $\beta_1 = \beta_3$ ,  $2\beta_2$ . При этом  $\beta_2 = -\beta_0$ .

Изучая геометрию пирамиды, можно найти два соотношения для выражения углов поворота через угол  $\gamma$ :

$$\tan \frac{\beta_1}{2} \cos \alpha_0 - \tan \beta_0 = 0, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \sin \gamma \sin \beta_0 ((1 + \cos \alpha_0)(2 - \cos \alpha_0) - \cos \alpha_0 \cos \beta_1 (1 - \cos \alpha_0) + \\ + (1 - \cos \alpha_0)(\sin \gamma \cos \beta_0 \sin \beta_1 + \cos \gamma \sin \alpha_0 (1 - \cos \beta_1))) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Равновесную форму такой фигуры можно найти, не прибегая к оптимизационному процессу. Если  $R$  – радиус лоскута,  $D$  – его изгибная жесткость, одинаковая во всех направлениях,  $p$  – вес единицы его площади,  $R_p$  – радиус сингулярной зоны вокруг вершины конуса, то потенциальная энергия может быть представлена выражением:

$$U = \frac{2D}{\pi} \ln \frac{R}{R_p} V. \quad (4.3)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} V = \frac{\pi^2 \beta_0^2}{\alpha_0 (\pi - \alpha_0)} + \beta_1^2 + \eta \{ -\sin \gamma \sin \alpha_0 + \cos \gamma \sin \beta_0 (1 + \cos \alpha_0) + \\ + (\sin \gamma \sin \beta_0 \sin \alpha_0 + \cos \gamma \cos \alpha_0) \sin \alpha_0 + \\ + (1 - \cos \alpha_0) [\cos \gamma \cos \beta_0 \sin \beta_1 + (\sin \gamma \sin \alpha_0 - \cos \gamma \sin \beta_0 \cos \alpha_0) \cos \beta_1] \}, \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{\pi p R^3}{3D \ln R / R_p}.$$

Далее можно привлечь процедуру решения задачи на поиск экстремума функции (4.3) при условиях (4.1) и (4.2). Результат решения такой задачи изобра-

жен на рисунке 4.1, б. Заметим, что рассматриваемая четырехгранная модель лежит в основе сложения фигур оригами. Простейшая модель может быть заложена в память компьютера, управляющего вакуумным захватом.

Пусть круглый лист представлен в виде конической симметричной четырехсекторной модели с двумя гранями в каждом секторе. При этом складки вдоль образующих  $OA$ ,  $OA_1$ ,  $OB$  и  $OB_1$  становятся выпуклыми при взгляде сверху, складки вдоль образующих  $Oa$ ,  $Oa_1$ ,  $Ob$  и  $Ob_1$  – вогнутыми (исунок 4.2). Раствор каждого сектора  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ . Пусть форма конуса определяется углом  $\gamma$ , на который опускается каждая из «выпуклых» образующих. Найдем угол  $2\beta$  между гранями  $AOa$  и  $AOb_1$  и угол  $\beta_1$  между гранями  $AOa$  и  $BOa$ .

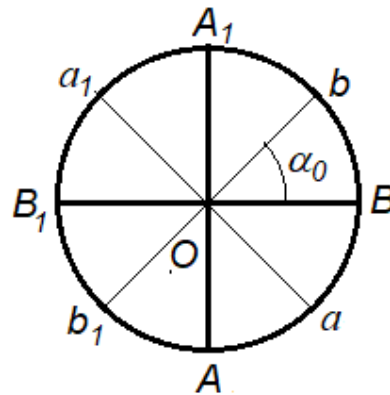


Рисунок 4.2 – Развертка 4-секторного лоскута

Находим угол  $\beta_1$ . Орт  $\vec{e}_x$  оси  $Ox$  (рисунок 4.3) после поворота вокруг оси  $Oy$  на угол  $\gamma$  имеет в абсолютном базисе вид:

$$\vec{e}_{x1} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ 0 \\ -\sin \gamma \end{pmatrix},$$

орт  $\vec{e}_y$  оси  $Oy$  после поворота вокруг оси  $Ox$  на угол  $-\gamma$  имеет вид:

$$\vec{e}_{y1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Косинус угла  $\delta$  между ортами равен:  $\cos \delta = \vec{e}_{x1} \cdot \vec{e}_{y1} = \sin^2 \gamma$ .

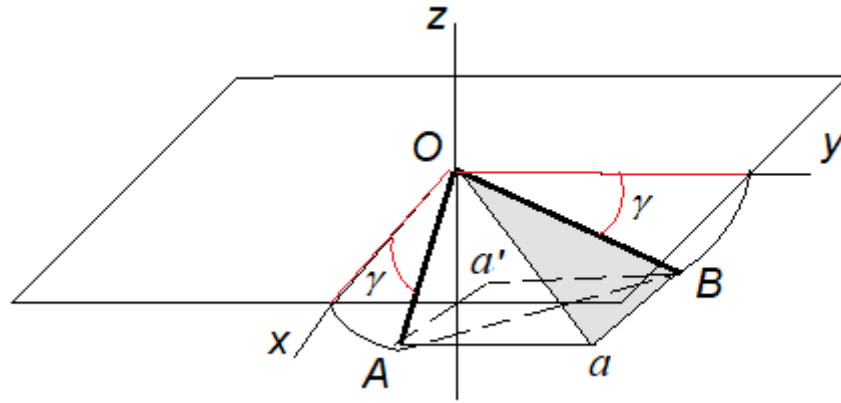


Рисунок 4.3 – Фрагмент звездчатой пирамиды

Находим угол  $\theta$  между боковыми гранями (Рисунок 4.4).

$$\text{Имеем: } AE = AO \sin \frac{\delta}{2} = \sin \frac{\delta}{2}, \quad AD = AO \sin \alpha = 1 \cdot \sin \alpha, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{AE}{AD} = \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Поскольку } \alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ то } \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}, \text{ или } 1 - \cos \theta = 2(1 - \cos \delta).$$

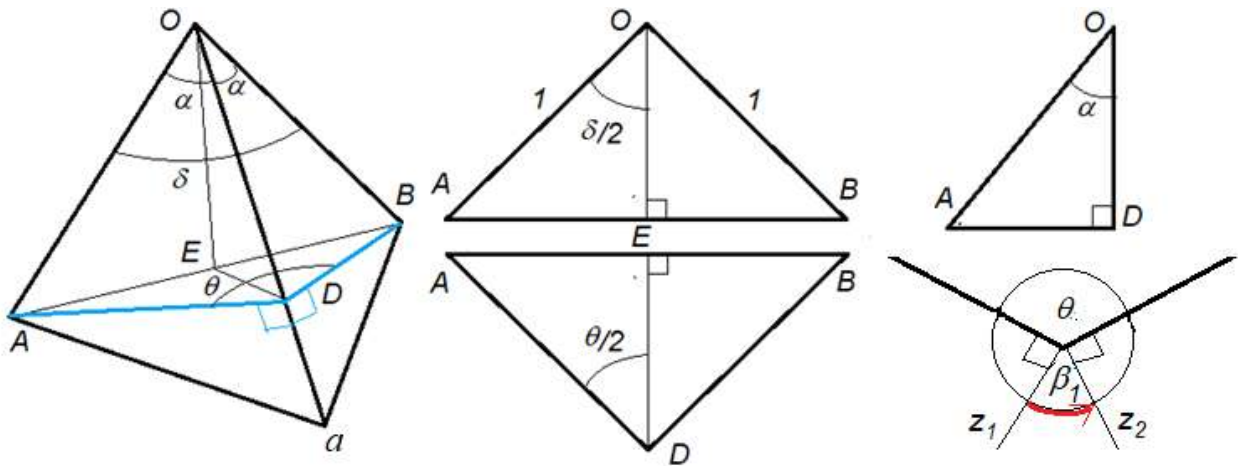


Рисунок 4.4 – Расчет углов

$$\text{Имеем: } \cos \theta = 1 - 2(1 - \cos \delta) = 1 - 2(1 - \sin^2 \gamma) = 2 \sin^2 \gamma - 1 = -\cos 2\gamma.$$

$$\cos \theta = 2 \sin^2 \gamma - 1 = 2 \sin^2 \gamma - (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma = -\cos 2\gamma.$$

Т. к.  $\beta_1 = 2\pi - \theta - \pi = \pi - \theta$ , получаем:

$$\sin \beta_1 = \sin \theta = \sin 2\gamma; \quad \cos \beta_1 = -\cos \theta = \cos 2\gamma.$$

Находим угол  $\beta$ . От абсолютной системы координат переходим к локальной системе, связанной с гранью  $BOa$ . Совершаем поворот вокруг оси  $Oy$  на угол  $\gamma$ , описываемый матрицей поворота  $G$ , затем поворот вокруг новой оси абсцисс на угол  $\beta$ , задаваемый матрицей  $\tilde{B}$ , поворот вокруг оси аппликат на угол  $\alpha_0$  с матрицей  $A_0$ , поворот вокруг оси абсцисс на угол  $\beta$  с матрицей  $B_1$  и еще один поворот, описываемый матрицей  $A_0$ . Матрицы поворота имеют вид:

$$G = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & \sin \beta_1 \\ 0 & -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}.$$

При этом орт оси  $Ox$  преобразуется в орт оси абсцисс локальной системы координат, направленный вдоль образующей  $OB$ :

$$\vec{e}_{x,loc} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование преобразует локальные проекции орта  $\vec{e}_{x,loc}$  в абсолютные, которые составляют орт  $\vec{e}_{y1}$ . Имеем матричное уравнение:

$$G^{-1} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot A_0^{-1} \cdot B_1^{-1} \cdot A_0^{-1} \cdot \vec{e}_{x,loc} = \vec{e}_{y1}.$$

В развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma (\sqrt{2} \cos \beta - \cos^2 \gamma - \sqrt{2} \cos \beta \cos^2 \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma + 1) \\ \cos \beta \cos^2 \gamma - \sqrt{2} \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \\ \cos^3 \gamma \sin \beta - \sin^3 \gamma + \sqrt{2} \cos \beta \cos^2 \gamma \sin \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix}$$

Выполняя преобразования, получаем линейную алгебраическую систему для неизвестных  $\sin \beta$ ,  $\cos \beta$ :

$$\begin{cases} -\sqrt{2} \sin \gamma \sin \beta + \cos \gamma \cos \beta = 1 \\ \cos \gamma \sin \beta + \sqrt{2} \sin \gamma \cos \beta = -\sin \gamma \end{cases}.$$

Решая систему, находим:

$$\sin \beta = -\frac{\sin \gamma (\sqrt{2} + \cos \gamma)}{1 + \sin^2 \gamma}, \quad \cos \beta = \frac{\cos \gamma - \sqrt{2} \sin^2 \gamma}{1 + \sin^2 \gamma}. \quad (4.4)$$

Анализируя эти выражения, заключаем, что  $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{4}$ . При  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  грани называются «склеенными» друг с другом.

Изображение 4-х секторной симметричной модели для значения  $\gamma = \frac{\pi}{18}$  приведено на рисунке 4.5.

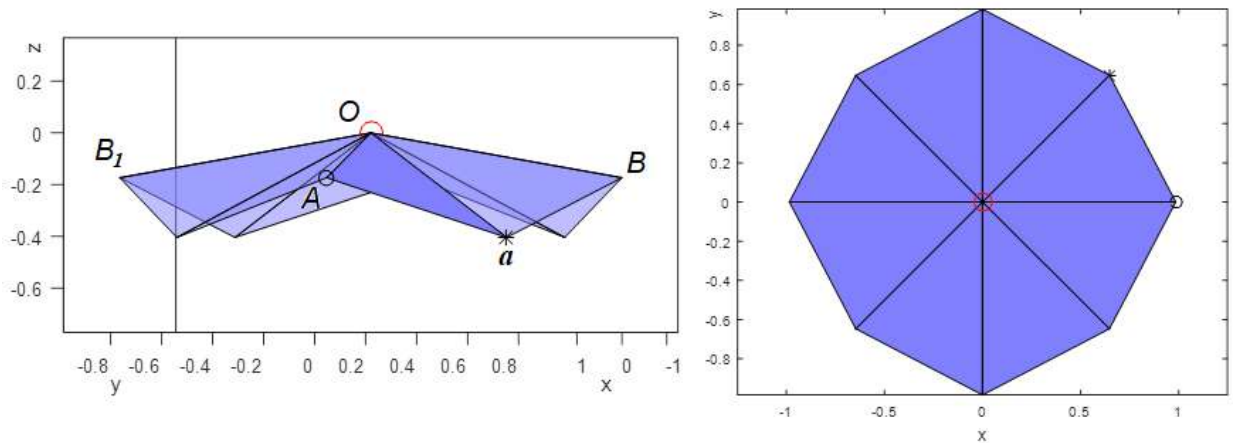


Рисунок 4.5 – 4-х секторная симметричная модель лоскута

Равновесную четырехсекторную модель лоскута можно получить, определяя минимум его потенциальной энергии как функции одной переменной  $\gamma$ . Если лоскут перемещается захватом в вертикальном направлении, или свободно падает, его можно рассматривать как механическую систему с двумя степенями свободы. Обобщенными координатами можно считать величины  $\gamma$  и  $z$ , где  $z$  – аппликата вершины конуса. С помощью описанной модели можно исследовать процесс раскрытия падающего лоскута под действием упругих сил и сил давления воздушной среды на внутреннюю поверхность лоскута (рисунок 4.6).



Рисунок 4.6 – Фазы раскрытия падающего лоскута

Существование предельной скорости падения лоскута можно проверить на примере следующего рассуждения. Пусть круглый лоскут падает как горизонтальный диск поступательно со скоростью  $v$ . Давление скоростного потока воздуха определяется выражением [108]:

$$P_v = \xi_{ar} \rho_g \frac{v^2}{2},$$

где  $\rho_g$  - плотность воздуха,  $\xi_{ar}$  - коэффициент аэродинамического сопротивления. При лобовом обтекании диска он принимается равным  $\xi_{ar} = 1.95$  ввиду отрыва струй при обтекании края диска [109].

Уравнение движения лоскута имеет вид:

$$\rho_{surf} S \frac{dv}{dt} = \rho_{surf} g S - \zeta_{ar} \frac{\rho_{\epsilon}}{2} v^2 S,$$

где  $\rho_{surf}$  - поверхностная плотность лоскута,  $S$  его площадь,  $g$  - ускорение свободного падения. Из уравнения движения следует, что предельная скорость  $v_{II}$  диска равна

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2g \rho_{surf}}{\zeta_{ar} \rho_{\epsilon}}}.$$

При 20°C и при атмосферном давлении 101.33 кПа плотность сухого воздуха равна  $\rho_{\epsilon} = 1.2041$  кг/м<sup>3</sup>. Поверхностная плотность шинельного драпа  $\rho_{surf} = 0.8027$  кг/м<sup>2</sup>. Тогда  $v_{II} = 2.59$  м/с.

В процессе раскрытия лоскута коэффициент аэродинамического сопротивления, очевидно, меняется вместе с изменяющейся формой лоскута.

Прямолинейное поступательное движение диска неустойчиво и со временем переходит в косоое планирование. Однако сохранению устойчивости поступательного движения способствует процесс фильтрации воздуха сквозь лоскут, подобно фильтрации сквозь ткань купола парашюта.

Динамика раскрывающегося во время падения лоскута описывается нелинейными дифференциальными уравнениями сложной структуры. Для упрощенной модели лоскута можно составить два уравнения движения как уравнения Лагранжа второго рода. Ввиду симметрии модели достаточно найти кинетическую и потенциальную энергию одной грани и умножить ее на 8. Кинетическая энергия  $T$  падающего четырехсекторного лоскута может быть представлена выражением: через обобщенные скорости выражением:

$$T = 8(T_0 + T_{01} + T_1) = 8 \left( a_{11} \frac{\dot{z}^2}{2} + a_{12} \dot{z} \dot{\gamma} + a_{22} \frac{\dot{\gamma}^2}{2} \right).$$

Здесь  $T_0 = a_{11} \frac{\dot{z}^2}{2}$ ,  $T_{01} = a_{12} \dot{z} \dot{\gamma}$ ,  $T_1 = a_{22} \frac{\dot{\gamma}^2}{2}$  - слагаемые кинетической энергии одной грани,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  - коэффициенты квадратичной формы.

Скорость точки грани складывается из скорости вершины  $O$  конуса и скорости точки при сферическом движения грани вокруг вершины:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{v}_1.$$

В абсолютной системе координат скорость вершины равна

$$\vec{v}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Скорость при сферическом движении выражается через абсолютную угловую скорость  $\vec{\omega}$  грани:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки грани. Угловая скорость состоит из двух векторов: вектора  $\dot{\beta} \vec{e}_{x1}$  и вектора  $\dot{\gamma} \vec{e}_y$ :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\gamma} \\ -\dot{\beta} \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Радиус-вектор  $\vec{r}_{loc}$  точки в локальном базисе, связанном с гранью  $AOa$ , выражаем через полярные координаты  $\xi, \alpha$ :

$$\vec{r}_{loc} = \begin{pmatrix} \xi \cos \alpha \\ \xi \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Абсолютный радиус-вектор  $\vec{r}$  точки:  $\vec{r} = G^{-1} \cdot B^{-1} \cdot \vec{r}_{loc}$ . Тогда

$$\vec{v}_1 = \xi \begin{pmatrix} \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma \sin \alpha - \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \alpha + \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma \sin \alpha \\ \dot{\beta} \sin \beta \sin \alpha \\ \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha - \dot{\gamma} \cos \gamma \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma \sin \alpha \end{pmatrix},$$



$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} \iint_{(S)} v_1^2 dm = \frac{1}{2} \iint_{(S)} v_1^2 \rho_{surf} dS = \frac{\rho_{surf}}{2} \iint_{(S)} v_1^2 \xi d\xi d\alpha = \\
&= \frac{\rho_{surf}}{2} \int_0^R \xi^3 d\xi \int_0^{\alpha_0} (\dot{\gamma}^2 + (\dot{\beta}^2 - \dot{\gamma}^2 \cos^2 \beta) \sin^2 \alpha - \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \beta \sin 2\alpha) d\alpha = \\
&= \frac{\rho_{surf} R^4}{8} \left( \alpha_0 \dot{\gamma}^2 + (\dot{\beta}^2 - \dot{\gamma}^2 \cos^2 \beta) \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \alpha d\alpha - \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \beta \int_0^{\alpha_0} \sin 2\alpha d\alpha \right) = \\
&= \frac{1}{2} I_0 (a_{xx} \dot{\beta}^2 + (\alpha_0 - a_{xx} \cos^2 \beta) \dot{\gamma}^2 - 2a_{xy} \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \beta).
\end{aligned}$$

Здесь обозначено:  $I_0 = \frac{\rho_{surf} R^4}{4}$ ,  $a_{xx} = \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\sin 2\alpha_0}{4}$ ,

$$a_{yy} = \int_0^{\alpha_0} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4}, \quad a_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} \sin 2\alpha d\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{4}.$$

С учетом этих обозначений имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{I_0}{8} ((\pi - 2) \dot{\beta}^2 + (2\pi - (\pi - 2) \cos^2 \beta) \dot{\gamma}^2 - 4 \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \beta) = \frac{\dot{\gamma}^2}{2} \frac{I_0}{8} \cdot t_1.$$

С учетом (4.4) рассчитываем множитель  $t_1$ :

$$\begin{aligned}
t_1 &= 2\pi + \frac{4(3c^2 + \sqrt{2}c^3 - 2)}{(c^2 - 2)^2} - \frac{(c - \sqrt{2}s^2)^2 (\pi - 2)}{(s^2 + 1)^2} + \\
&+ \frac{(s^2 + 1)^2 (\pi - 2) (3c^2 + \sqrt{2}c^3 - 2)^2}{(c - \sqrt{2}s^2)^2 (c^2 - 2)^4},
\end{aligned}$$

где  $s = \sin \gamma$ ,  $c = \cos \gamma$ . Последнее выражение, представляющее функциональную зависимость  $t_1(\gamma)$ , интерполируем полиномом 3-й степени:

$$t_1(\gamma) \approx P(\lambda) = 37.0292\gamma^3 - 47.5215\gamma^2 - 1.8039\gamma + 21.5450.$$

Сравнение исходной функции  $t_1(\gamma)$  с результатом интерполяции приведено на рисунке (4.7). Исходная кривая – сплошная линия.

Другие коэффициенты в выражениях для кинетической и потенциальной энергии также выражаются через тригонометрические функции углов  $\gamma$  и  $\beta$ ,

представляют собой достаточно гладкие функции и весьма точно аппроксимируются полиномами невысоких степеней. Через коэффициенты этих полиномов выражаются и коэффициенты в уравнениях движения лоскута.

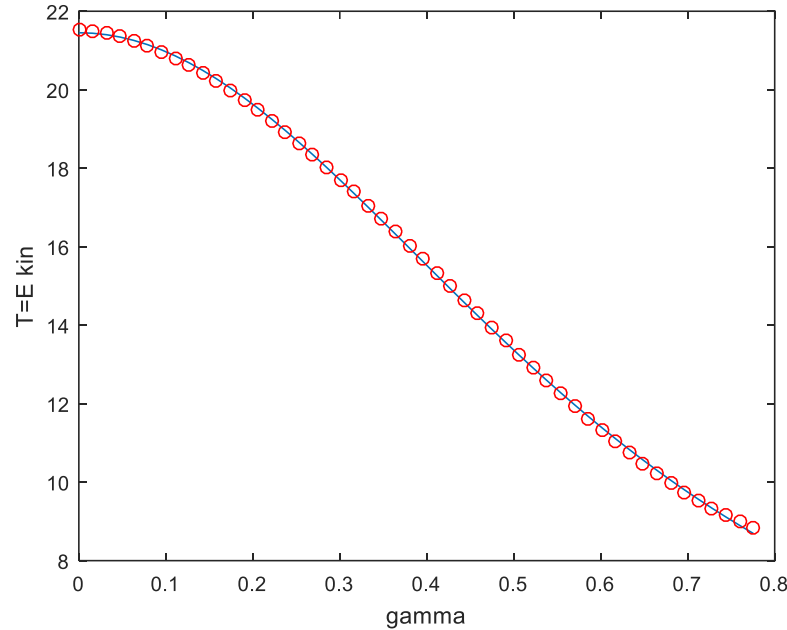


Рисунок 4.7 – Графики функций  $t_1(\gamma)$  и  $P(\gamma)$

#### 4.2. Расчет прижимающей и подъёмной силы при захвате лоскута со стола

Пусть квадратный лоскут драпа со стороной 40 см захватывается и поднимается с полированной плоской поверхности вакуумной воронкой диаметром  $d_g = 70$  мм. Источник вакуума – компрессор, потребляющий мощность  $N_{nom} = 1800$  Вт. Мощность всасывания  $N = Q \cdot \Delta p$  ( $Q$  - расход воздуха через сопло вакуумной воронки,  $\Delta p$  - разница между атмосферным и давлением внутри воронки) значительно меньше  $N_{nom}$ .

В начале процесса захвата края воронки прижаты к материалу лоскута (рисунок 4.8). Захваченная воронкой часть лоскута выпучивается, в основном из-за растяжения лоскута в этой области. Высота выпученной части примерно 1 см. Воздух из окружающей среды фильтруется сквозь ткань и попадает в зазор между

столом и лоскутом (рисунок 4.9). Далее воздух еще раз фильтруется сквозь ткань и попадает в воронку.



Рисунок 4.8 – Начальный этап захвата лоскута драпа

Движение воздушной среды описывается, например, уравнениями Эйлера, уравнением непрерывности и уравнением физического состояния [110]. Одними из основных параметров, определяющими движущийся воздух, является скорость его потока  $v$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$ , вязкость  $\lambda$  и температура  $T$ . Будем оценивать параметры состояния воздуха, игнорируя изменения его плотности и температуры. Рассмотрим окружающую воздушную среду вокруг заданного лоскута и предположим, что она имеет температуру  $20^{\circ}\text{C}$  ( $293^{\circ}\text{K}$ ) и испытывает атмосферное давление  $p_a = 101325 \text{ Па} \approx 10^5 \text{ Па}$ , скорость воздушной массы  $v_a \approx 0$ . Плотность сухого воздуха при таких условиях составляет  $\rho = 1,2041 \text{ кг/м}^3$ .

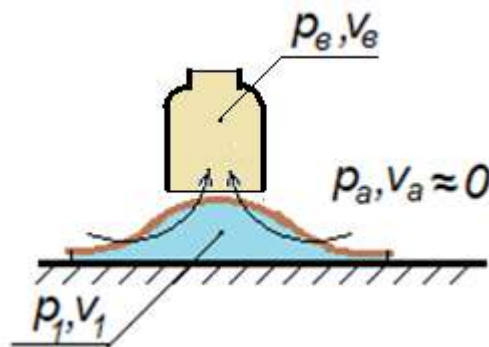


Рисунок 4.9 – Перемещения воздуха в присоске

Рассмотрим фильтрацию воздуха сквозь лоскут ткани. Скорость фильтрации  $v_\Phi$  находим по формуле (1.1).

Сквозную пористость  $d_{II}$  выражаем через произведения диаметров нитей утка  $d_y$  и основы  $d_o$  на соответствующие плотности  $\Pi_y$  и  $\Pi_o$  этих нитей. Ввиду отсутствия данных именно о шинельном драпе, рассматриваем в качестве его аналога шерстяную ткань, представленную в таблице 2 [33]. Ее характеристики таковы:

$$\rho_{surf} = 201,6 \text{ г/см}^2, R_s = 0,22, d_{II} = 0,173 \times 10^{-3} \text{ м}, h = 0,52 \times 10^{-3} \text{ м}.$$

Предполагая произведения  $d_y \Pi_y$  и  $d_o \Pi_o$  у этой ткани и у драпа одинаковыми, представим драп как сложенную в несколько слоев тонкую ткань. Тогда чтобы иметь плотность драпа  $800 \text{ г/м}^2$ , толщина ткани должна быть примерно 2 мм. Заметим, что  $d_{II}$  и  $R_s$  не зависят от толщины ткани. Подставляя эти значения в формулу (1.1), получаем:

$$v_\Phi = \Delta p \frac{0,173^2 \times 10^{-6} \times 0,22}{80 \cdot 18,1 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-3}} = 0,023 \Delta p. \quad (4.5)$$

Заметим, что скорость фильтрации приблизительно равна проницаемости материала. А она равна отношению объема воздуха, просочившегося сквозь ткань, к площади фильтра при стандартном значении перепада давлений  $\Delta p = 49 \text{ Па}$  [111].

Типичные зависимости воздухопроницаемости разных тканей от перепада давлений  $\Delta p$  [112] приведены на рисунке 4.10. По оси абсцисс откладывается перепад давлений  $\Delta p$  в миллиметрах водяного столба, по оси ординат – воздухопроницаемость  $B$  в  $\text{дм}^3/(\text{м}^2\text{с})$ . 1 – диаграмма для шинельного драпа.

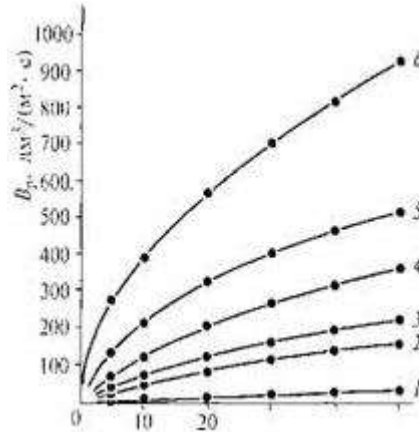


Рисунок 4.10 – Зависимость воздухопроницаемости тканей от перепада давлений

Исследуем поток воздуха в зазоре и в воронке. Когда начинается подъем воронки, мы наблюдаем увеличение диаметра видимого зазора под область выпучивания примерно до  $d_b = 80$  мм при силе подъема  $F_{\Pi}$  порядка 45-50 Н. Возникают расходящиеся к краям лоскута складки (флейты) и сила подъема на втором этапе (рисунок 4.11, а) уменьшается до 15-10 Н.

Сила подъема противодействует силе присасывания лоскута к столу, на котором он лежит, и силе сцепления лоскута со столом, поскольку при подъеме центральной части лоскута его периферическая часть стягивается по столу к центру. Основная величина силы сцепления – это сила сухого (кулоновского) трения между лоскутом и столом.

Оценим давление  $p_1$  в зазоре между лоскутом и столом, пренебрегая выпуклостью вытянутой части и считая это давление одинаковым везде внутри зазора. Приравняем силу подъема силе вакуумного прижима листа к столу:

$$F_{\Pi} = (p_a - p_1) S_{\text{л}} , \quad (4.6)$$

где  $S_{\text{л}}$  – площадь листа. Подставляя значения величин в формулу (4.6), получаем:

$$p_1 = p_a - \frac{F_{\Pi}}{S_{\text{л}}} = 101325 - \frac{50}{0,16} = 101325 - 312,5 \cong 101013 \text{ Па} .$$

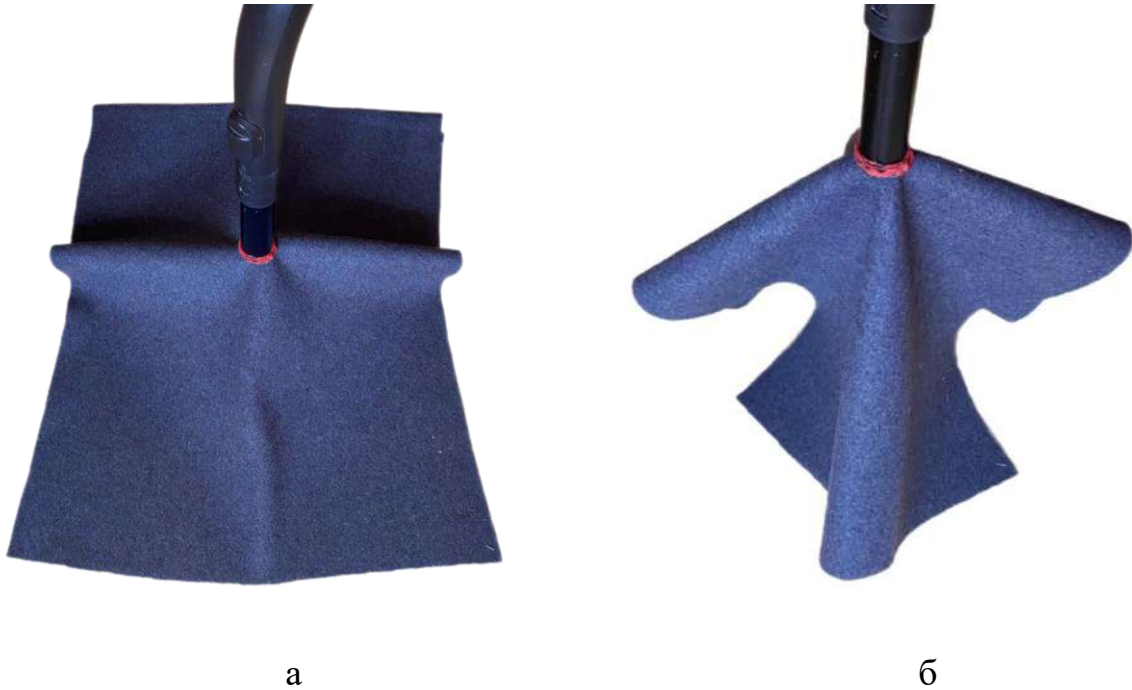


Рисунок 4.11 – Второй (а) и третий (б) этапы захвата лоскута

Скорость фильтрации (4.5) воздуха из атмосферы в зону присоса будет равна:

$$v_{a-1} = 0,023\Delta p_{a-1} = 0,023 \times 312,5 = 7,19 \text{ м / с} .$$

Поток воздуха, поступающего сквозь лоскут в зону присоса, составляет:

$$Q = v_{a-1}S_{л} = 7,19 \times 0,16 = 1,15 \text{ м}^3 / \text{с} .$$

Пусть захват лоскута происходит с помощью вакуумного насоса. Зависимость между разрежением  $\Delta p$  внутри вакуумной воронки и объемным расходом воздуха  $Q$  представлена на рисунке 2.7.

Рассмотрим режим работы, при котором поток максимальный  $Q_{max} = 50 \text{ л/с} = 0,05 \text{ м}^3/\text{с}$  при разрежении  $p_e = 5 \text{ кПа}$  . Скорость потока воздуха в воронке составляет:

$$v_{1-e} = 4 \frac{Q}{\pi d_e^2} = 4 \frac{0,05}{3,14 \times 0,07^2} = 13 \text{ м/с} .$$

Соответствующий перепад давления из формулы (4.5):

$$\Delta p_{e-1} = \frac{13}{0,023} = 565,22 \text{ Па} .$$

Тогда давление в зазоре между лоскутом и столом, на котором он лежит:

$$p_1 = p_e - \Delta p_{e-1} = 5000 - 565 = 4435 \text{ Па}.$$

Перепад давлений, прижимающий лист к столу, равен:

$$\Delta p_{a-1} = p_a - p_1 = 101325 - 4435 = 96900 \text{ Па}$$

Сила, прижимающая к столу лоскут площадью  $S_l = 0,16 \text{ м}^2$ , равна:

$$F_{\Pi} = \Delta p_{a-e} S_l = 96900 \times 0,16 = 15504 \text{ Н}.$$

С другой стороны, на примыкающую к воронке диаметром  $d_e = 0,07 \text{ м}$  площадку лоскута действует подъемная сила

$$F_{\Pi 0} = \Delta p_{e-1} \times \pi \frac{d_e^2}{4} = 564,9\pi \frac{0,07^2}{4} = 2,17 \text{ Н}.$$

Итак, в данном режиме работы вакуумного устройства лоскут невозможно оторвать от стола. В реальности фильтрация воздуха в воронку происходит в небольшой области, окружающей центр воронки. Воздух не может проникнуть из периферийных областей лоскута ввиду значительного сопротивления зазора между лоскутом и поверхностью стола, заполненного ворсинками лоскута. Эти ворсинки расположены на поверхности шинельного драпа в основном хаотически (рисунок 2.10).

Определим характер движения воздуха в заполненном ворсинками зазоре, который зависит от соотношения длины свободного пробега молекул воздуха  $L_{СП}$  к эффективному размеру  $d_e$  области, в котором движется воздух [34].

Длину свободного пробега молекул можно вычислить по формулам молекулярно-кинетической теории. В разных источниках приведена длина  $L_{СП}$  воздуха при  $20^\circ\text{С}$  и при давлении, близком к атмосферному. В среднем

$$L_{СП} = 7 \times 10^{-8} \text{ м}$$

В качестве камеры рассматриваем отдельный канал, за эффективный размер которого примем его диаметр  $d_{\Pi} = 0,173 \times 10^{-3} \text{ м}$ . Определяем критерий Кнудсена

(1.2), который имеет смысл отношения длины свободного пробега к эффективной длине:

$$Kn = \frac{L_{СП}}{d_{II}}.$$

Имеем:

$$Kn = \frac{7 \times 10^{-8}}{0,173 \times 10^{-3}} \cong 4 \times 10^{-4} \text{ м},$$

так что движение воздуха сквозь канал происходит в условиях низкого вакуума. Тогда справедливо уравнение неразрывности воздушной среды и уравнения Эйлера, описывающие ее движение.

Эффективный размер  $d_e$  отличается от  $d_n$ . Определить его можно экспериментально, изучая микрофотографии зоны примыкания листа материала к столу.

Пусть вакуумная система работает в другом крайнем режиме, когда  $p_e = 20 \text{ кПа}$ . Тогда согласно рисунку 2.7  $Q = 4 \text{ л/с} = 0,004 \text{ м}^3/\text{с}$ . Тогда  $v_{1-6} = 1,04 \text{ м/с}$ ,  $p_1 = 1995 \text{ Па}$ ,  $F_{II} = 13019 \text{ Н}$ . Лоскут при таких параметрах от стола тем более не отрывается.

Согласно опыту, когда подъем лоскута происходит со скоростью 5 см/с, то при силе подъема  $F_{II} \approx 50 \text{ Н}$  лоскут сжимается, образуются флейты и лоскут начинает отрываться. Через флейты устремляется поток воздуха, и давление в зазоре приближается к атмосферному. Сопротивление подъему лоскута резко падает, и лист поднимается силой 10 Н. На рисунке 4.11, б представлен третий этап захвата листа. Он удерживается воронкой за счет перепада давления в воронке и под втянутой частью лоскута, а также перепада давления в складках, втянутых в воронку, внутри которых воздух движется со значительной скоростью. Характер этого движения, очевидно, ламинарный, и вдоль линии тока воздушной струи выполняется условие, называемое интегралом Бернулли [113].

Если пренебречь изменением плотности воздуха, то уравнение Бернулли имеет вид:



$$\rho \frac{v^2}{2} + p = const \quad (4.7)$$

Пусть давление и скорость потока внутри складки-флейты равны  $p_f$  и  $v_f$ . Применяя формулу (4.7), получаем:

$$\rho \frac{v_f^2}{2} + p_f = p_a.$$

Расчет воздушного потока внутри складки как канала с переменным поперечным сечением весьма сложен, так как полуоткрытый канал начинается в атмосфере, имеет резкое сужение по краю вакуумной воронки и дальнейшее расширение внутри воронки. Теоретическое исследование потока целесообразно начинать на основе экспериментальных данных о линиях тока и давлениях внутри него.

### 4.3. Взаимодействие лоскута с воронкой

Рассмотрим это взаимодействие на примере сложного конического изгиба, исследованного в подразделе 3.4. На рисунке 3.27, б приведены координаты центра тяжести лоскута и точек его контакта с краем воронки в плоскости этого края. В данном примере легко определяются силы, действующие на воронку в точках контакта с лоскутом (это важно для исследования деформации воронки из податливого материала). Если проигнорировать силы кулоновского трения лоскута о край воронки, то имеем статически определенную задачу для определения нормальных реакций  $N_1, N_2, N_3$ , действующих на лоскут со стороны воронки в точках  $T_1, T_2, T_3$  (рисунок 4.12).

Составляем уравнения равновесия лоскута:

$$G - P + \sum_{i=1}^3 N_{i,z} = 0, \quad -P \cdot y_c + \sum_{i=1}^3 N_{i,z} \cdot y_i = 0, \quad P \cdot x_c - \sum_{i=1}^3 N_{i,z} \cdot x_i = 0.$$

Здесь  $N_{i,z} = -N_i \cos \gamma_0$ ,  $x_c, y_c, x_i, y_i$  - координаты проекций центра тяжести и точек  $T_i$  на горизонтальную плоскость. Записываем эти уравнения на основании данных рисунка 3.27, б:

$$\begin{cases} 20,081 - 1,004 - 0,5743(N_1 + N_2 + N_3) = 0 \\ -1,004(-0,05089) + 0,5743(-0,5383 \cdot N_2 + 0,6969 \cdot N_3) = 0 \\ -1,004 \cdot 0,02383 + 0,5743(0,7015 \cdot N_1 - 0,4498 \cdot N_2 - 0,08049 \cdot N_3) = 0 \end{cases}$$

и получаем  $N_1 = 9,75H$ ;  $N_2 = 13,398H$ ;  $N_3 = 10,152H$ .

#### 4.4. Направления решения проблемы захвата верхнего лоскута из стопки

Если предназначенные для захвата и транспортировки лоскуты уложены в сопку, то возможен захват двух и более лоскутов. Проблема отделения верхнего лоскута от стопки может быть решена разными способами.

а) Можно создать дополнительный раздув стопы, подобно тому, как это делается в самонакладах полиграфических машин (рисунок 4.12).

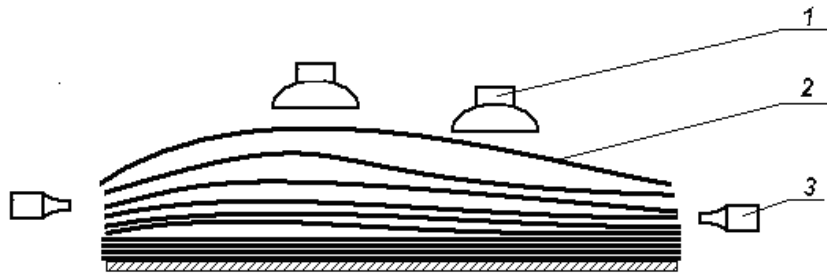


Рисунок 4.12 – Схема работы самонаклада:

1 – вакуумные воронки, 2 – захватываемый лист, 3 – патрубок раздува

б) Можно обеспечить тонкую настройку давления и потока воздуха в воронке, дающую нужное уменьшение присасывающего эффекта при переходе от слоя к слою. Это возможно, поскольку коэффициент воздухопроницаемости  $B_n$  сквозь  $n$  слоев ткани выражается через коэффициенты проницаемости  $B_k$  сквозь отдельные слои формулой [112]:

$$B_n = \frac{1}{\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \dots + \frac{1}{B_n}}.$$

Коэффициент воздухопроницаемости  $n$  одинаковых слоев  $B_k = B$  (рисунок 4.13):

$$B_n = \frac{B}{n}.$$

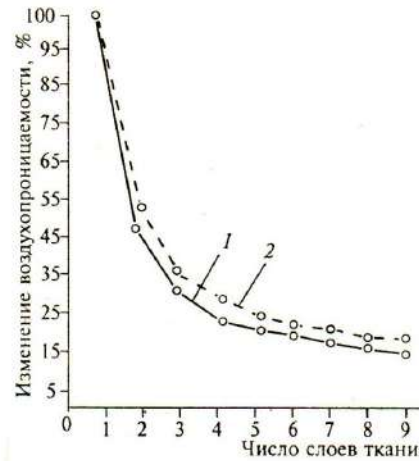


Рисунок 4.13 – Диаграмма для двух видов ткани, выражающая зависимость воздухопроницаемости от числа слоёв этой ткани

в) Можно переложить лоскуты в стопке листами воздухонепроницаемого материала, например, полиэтиленовой пленкой. Если пленка захвачена вместе с лоскутом, то ее нужно снять тем или иным способом. Если лоскут захватывается несколькими воронками, то пленка может оказаться вдвойне полезной: она перекроет «холостые» воронки, не соприкасающиеся с лоскутом. Это увеличит силу присоса рабочих воронок (рисунок 4.14).

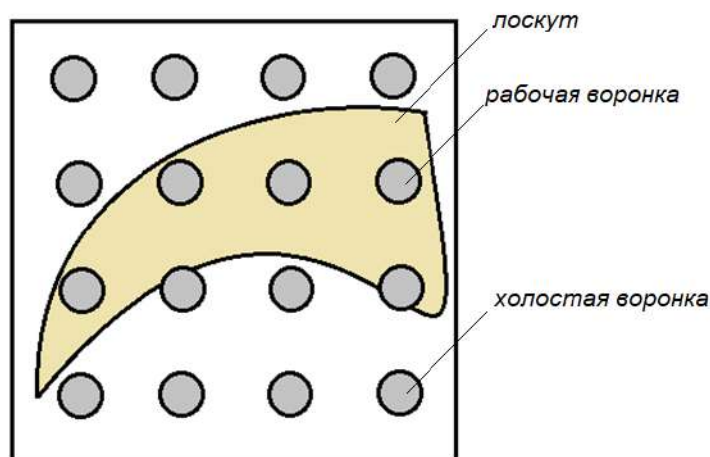


Рисунок 4.14 – Лоскут, захваченный несколькими воронками

г) Можно применить технологию захвата верхнего лоскута за край. Разновидностью такого захвата является захват цилиндрическим захватом с отверстиями, который прокатывается по верхнему лоскуту (рисунок 4.15).



Рисунок 4.15 – Фазы работы цилиндрического захватного устройства

Пусть цилиндрическим захватом радиуса  $R$  отогнут край лоскута  $LK$ , соответствующий углу  $\Delta$  (рисунок 4.16). Пусть лоскут имеет форму прямоугольника шириной  $B$ . Оценим величину присасывающей силы  $F$ , действующей на захватываемый лоскут. Будем считать, что сила приложена к краю лоскута. Рассмотрим равновесие отогнутого края. Кроме силы  $F$ , учтем распределенную по площади гравитационную нагрузку интенсивностью  $p$  и суммарный изгибающий момент  $M_b$ . Силы реакций цилиндра на отогнутый лоскут считаем малыми по сравнению с силой  $F$ .

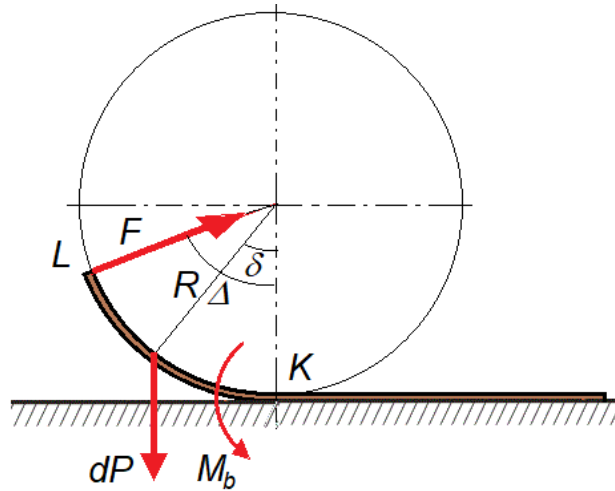


Рисунок 4.16 – Намотка лоскута на цилиндр

Рассмотрим моменты сил относительно линии контакта цилиндра с опорным столом. Момент силы  $F$ , равный  $FR \sin \Delta$ , уравновешивается суммарным изгибающим моментом

$$M_b = BDk ,$$

где  $D$  – изгибная жесткость лоскута,  $k$  – кривизна профиля лоскута в точке  $K$ , и суммарным моментом  $M_p$  сил тяжести  $dP = pBRd\delta$  :

$$M_p = \int_{(P)} R \sin \delta dP = pBR^2(1 - \cos \Delta) .$$

Из уравнения

$$FR \sin \Delta = BDk + pBR^2(1 - \cos \Delta)$$

получаем:  $F = \frac{B}{R} \frac{pR^2(1 - \cos \Delta) + Dk}{\sin \Delta}$ .

Кривизна геометрической модели профиля лоскута в окрестности точки  $K$  меняется от 0 до величины  $\frac{1}{R}$ . При  $\Delta \rightarrow 0$  край лоскута меняет свою кривизну как физическое тело. В этот переходный период для силы  $F$  имеем неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ , подлежащей раскрытию на основе более подробного исследования процесса начала захвата лоскута.

В близком к точке  $K$  полюсе  $\Delta = 0 +$  имеем  $k = \frac{1}{R}$ , так что

$$F = \frac{B}{R} \frac{pR^2(1 - \cos \Delta) + \frac{D}{R}}{\sin \Delta}.$$

По мере возрастания угла  $\Delta$  возрастает роль момента сил, действующих на втянутый в отверстие лоскут со стороны краев отверстий захвата. Именно эти силы поддерживают форму намотанного лоскута при  $\Delta = \pi$ .

#### 4.5. Расчет драпируемости на основе модели комбинированного изгиба круглого лоскута

Одной из характеристик текстильного материала является его драпируемость – способность образовывать складки. Один из способов определения драпируемости – дисковый способ [114]. Круглый образец ткани 1 укладывается на круглый стол и прижимается диском 2 (рисунок 4.17, а). Коэффициент драпируемости определяется по формуле

$$k_d = \frac{S_0 - S_{\Pi}}{S_0},$$

где  $S_0$  — площадь образца,  $S_{\Pi}$  — площадь горизонтальной проекции образца.

Коэффициент драпируемости можно рассчитать по заданной изгибной жесткости с помощью программы `bendcape`, моделирующей развертывающуюся накидку, наброшенную на круглый стол. Площадь горизонтальной проекции накидки равна сумме площадей горизонтальных проекций отдельных плоских фрагментов фигуры. Площадь проекции фрагмента равна произведению площади самого фрагмента на косинус угла между нормалью к фрагменту, которую представляет ось аппликат локального базиса, и осью  $Oz$  абсолютного базиса.

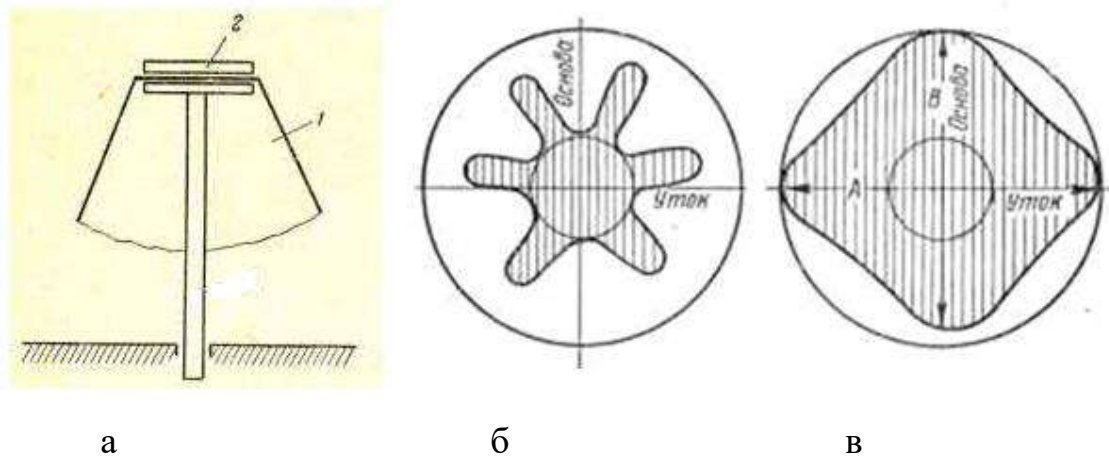


Рисунок 4.17 - Определение драпируемости дисковым методом (а). Хорошая (б) и плохая (в) драпируемость

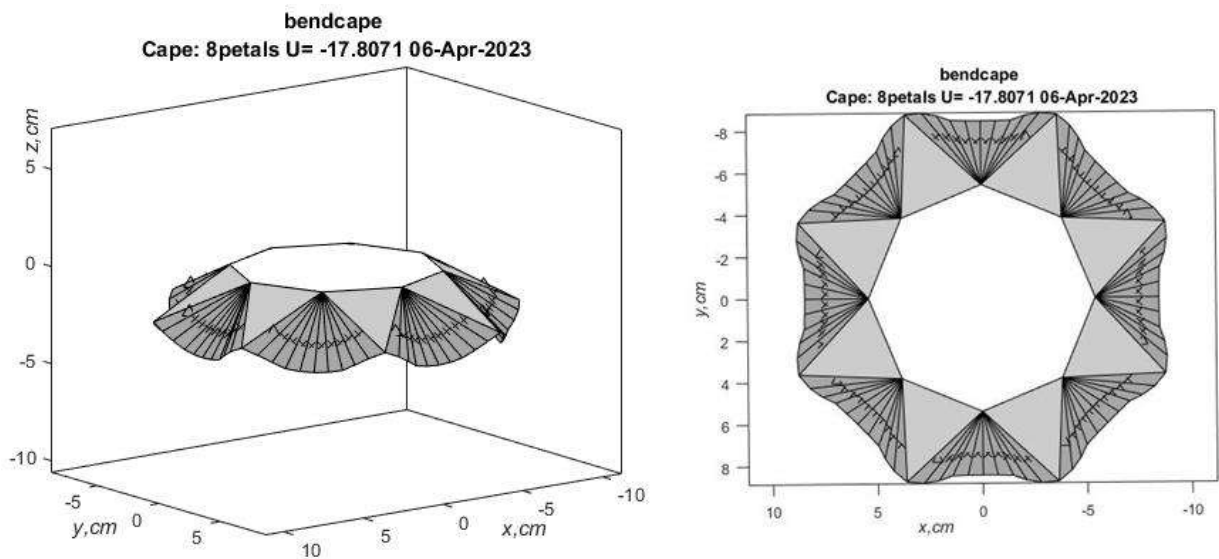


Рисунок 4.18 – Накидка с 8 лепестками и ее горизонтальная проекция

Возьмем, например, круглый лоскут шинельного сукна диаметром 20 см и смоделируем накидку с 8 лепестками, наброшенную на диск диаметром 10 см. В результате работы программы bendcape получаем развертывающуюся модель накидки (рисунок 4.18), соответствующую энергии  $U = -17.8071 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$ , и ее проекцию на горизонтальную плоскость. Материал здесь считается изотропным. Площадь этой проекции равна  $S_{II} = 205.76 \text{ см}^2$ , площадь лоскута  $S_0 = 314.16 \text{ см}^2$ , так что коэффициент драпируемости для такой накидки равен  $k_d = 0.345$ . Очевидно, расчет можно произвести и для диска другого диаметра, который прописан в ГОСТе [115]. Следует заметить, что из семейства накидок с разными количе-

ствами лепестков целесообразно выбрать накидку с минимальной энергией, которая имеет наибольшую вероятность реализоваться.

#### 4.6. Применение моделей цилиндрического изгиба лоскутов для определения их изгибной жесткости

Изгибную жесткость текстильного лоскута можно определить путем обработки результатов эксперимента, представленного на рисунке 3.42. Это можно сделать путем задания некоторой начальной жесткости для построения профиля с помощью программы `bendjaw` или путем решения уравнения (2.15). В среде компьютерной математики MATLAB это решение краевой задачи и выполняется с помощью функции `bvp4c`. Расчетный профиль сравнивается с экспериментальным в контрольных точках и создается сумма  $S$  квадратов расстояний расчетных точек от экспериментальных. Далее организуется поиск изгибной жесткости, такой, чтобы сумма  $S$  стала меньше некоторой заданной величины.

Изгибную жесткость можно определить из уравнения равновесия свисающей части лоскута:

$$M_0 = P \cdot x_C,$$

где  $M_0$  - изгибающий момент в сечении лоскута, определяемом условием  $s_0 = s(0) = 0$ ,  $P$  - вес свисающей части,  $x_C$  - абсцисса центра тяжести этой части. Имеем:  $M_0 = D\beta'_0 B$  ( $B$  – ширина полоски),  $P = pLB$ . Тогда

$$D = \frac{pLx_C}{\beta'_0}.$$

Кривизну профиля  $\beta'_0$  в его начальной точке находим путем экстраполяции экспериментальных значений кривизны  $\beta'$  вдоль профиля. Пусть  $x_i$  - абсцисса центральной точки фрагмента ломаной, аппроксимирующей профиль,  $\Delta L_i$  - длина фрагмента. Тогда

$$D = \frac{P}{\beta'_0} \sum_i x_i \Delta L_i.$$



#### 4.7 Выводы по главе 4

Предложены простейшие модели конусного изгиба лоскутов, которые могут применяться в инженерной практике для приближенной оценки габаритов и форм захваченных вакуумной воронкой лоскутов. Предложены вводные рассуждения для исследования динамики захваченных лоскутов, в частности, для исследования процесса раскрытия лоскута во время падения на рабочий стол.

На примере изучения сложного изгиба круглого лоскута приведен расчет прижимающей и подъёмной силы при захвате лоскута со стола.

Приведен пример расчета сил, действующих на воронку со стороны захваченного лоскута.

Намечены некоторые способы захвата верхнего лоскута из пакета, обеспечивающие удержание остальных лоскутов.

Предложены способы расчета драпируемости лоскута и его изгибной жесткости на основе компьютерных моделей его изгиба.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных экспериментов, исследований и компьютерных расчетов поведения текстильных лоскутов, захватываемых вакуумными захватами, можно сделать следующие выводы.

1. Разработаны методы исследования и моделирования разворачивающихся срединных поверхностей текстильных лоскутов как упругих тяжелых оболочек. Для решения задачи моделирования деформаций лоскутов применен метод оптимизационного поиска равновесных форм срединной поверхности путем градиентного поиска минимума целевой функции задачи.

2. Выполнены экспериментальные исследования процессов захвата, перемещения и сброса лоскутов вакуумными захватами. Проанализировано влияние устройства, размеров и формы вакуумного захвата на его способность поднимать текстильный лоскут с разных поверхностей. Исследовано влияние мощности всасывания на подъемную силу. На основании изучения захвата лоскута из стопки сформулированы условия захвата верхнего лоскута.

3. Разработаны математические модели многогранных срединных поверхностей лоскутов как оболочек. Проведено моделирование срединных поверхностей для случая симметричного конического изгиба круглого лоскута шинельного драпа, захваченного вакуумной воронкой. Выявлена форма изгиба с оптимальным количеством складок. Исследованы равновесные формы конического изгиба прямоугольных лоскутов драпа, в результате чего установлена оптимальная форма изгиба, наблюдаемая на практике.

4. Исследовано семейство равновесных форм изгиба лоскутов, захваченных плоским сетчатым захватом. Выявлена форма изгиба с оптимальным количеством «лепестков», которая соответствует эксперименту.

5. Разработаны математические модели, алгоритмы и компьютерные программы для моделирования конического изгиба анизотропного лоскута произ-

вольной формы в вакуумном захвате и для моделирования сложного конического изгиба с множеством асимметричных складок.

6. Исследованы равновесные торсовые и цилиндрические формы изгиба лоскутов драпа. Предложены способы расчета коэффициента драпируемости и изгибной жесткости текстильного материала на основе компьютерной обработки изображения лоскута.

7. Разработаны инженерные рекомендации для приближенных исследований подъемной силы вакуумной воронки, силового взаимодействия ее с захваченным лоскутом, процессов падения лоскутов на приемный стол, организации захвата верхнего лоскута из пакета.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Quinn, Harris. Why Robots Can't Sew Your T-Shirt /BUSINESS. 27.09. 2021. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.wired.com/story/why-robots-cant-sew-t-shirt/> (Дата обращения: 20.07.2023).
2. Ганулич, А. А. Роботизированная технология швейных изделий. – М.: Лег-промбытиздат, 1990. – 200 с.
3. DARPA looks at developing robots to sew uniforms [Электронный ресурс] URL: <http://newatlas.com/sewingrobot/22900/> (Дата обращения 20.07. 2023).
4. Робот Lowry научился шить футболки в 17 раз быстрее человека [Электронный ресурс]. URL: <https://www.buro247.ru/news/technology/31-aug-2017-lowry-robot.html> (Дата обращения 19.07.2023).
5. 'Sewbot' makes T-shirts. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=qXFUqCijkUs> (Дата обращения 19.07.2023).
6. Устройство для захвата и подачи плоских изделий А. В. Фарбун [и др.]. Патент SU 1505866. Заявл. 23.04.1987, №4234596/30-12. Обупл. 07.09.1989. – Бюл. № 33.
7. Роботы научились шить одежду [Электронный ресурс]. URL: [https://zoom.cnews.ru/rnd/news/top/roboty\\_nauchilis\\_shit\\_odezhdu](https://zoom.cnews.ru/rnd/news/top/roboty_nauchilis_shit_odezhdu) (Дата обращения 19.07.2023).
8. Автоматизированная линия пошива мягких тапочек [Электронный ресурс]. URL: <https://autosew.ru/solutions/auto/avtomatizirovannaya-liniya-dlya-poshiva-myagkikh-tapochek/> Время воспроизведения: 0.1.24. Доступно на autosew.ru. (Дата обращения 19.07.2023).
9. Automatic sewing line of driver's airbag panels [Электронный ресурс] URL: <https://vorster.pl/en/automatic-sewing-line-of-drivers-airbag-panels/> (Дата обращения: 25.03.2023).

10. Yang. A cooperative mobile robot and manipulator system (Co-MRMS) for transport and lay-up of fibre plies in modern composite material manufacture / M. Yang, L. Yu, C. Wong et al. // M. Yang, L. Yu, C. Wong et al.// Int. J. Adv. Manuf. Technol., 2022. № 119. – Pp. 1249–1265. URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-021-08342-2> Дата обращения 24.07.2023.
11. Southeastern Technology: Serging Robot.[Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=t10sYsYlWjQ> Время воспроизведения: 0.0.52. Доступно на youtube.com. (Дата обращения 25.07.2023).
12. Cubric, G. Vacuum Picking of Nonwoven Material // G. Cubric, A. Ivandija. Current Trends in Fashion Technology & Textile Engineering, Juniper Publishers Inc., 2018. V. 3(1). – Pp. 19-21. DOI: 10.19080/CTFTTE.2018.03.555604.
13. Patent US 5313897. A Sewing operation robot / United States Patent 1191, USO05313897A. Prior. date 11.01.1991, public. date 24.05.1994. Inventor: Kuniaki Katamine, Kaoru Kimura. Current Assignee: Yaskawa Electric Corp. – 6 p. URL: <https://patentimages.storage.googleapis.com/6f/89/1b/d146143f3d4535/US5313897.pdf> (Дата обращения 19.07.2023).
14. Li, Y. Regrasping and unfolding of garments using predictive thin shell modeling // Y. Li et al. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Seattle, WA, USA, 2015. – Pp. 1382-1388, doi: 10.1109/ICRA.2015.7139370. URL: [http://www.cs.columbia.edu/~yli/papers/YLI\\_ICRA2015\\_Final.pdf](http://www.cs.columbia.edu/~yli/papers/YLI_ICRA2015_Final.pdf) (Дата обращения: 24.07.2023).
15. A Geometric Approach To Robotic Unfolding Of Real Garments [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=xVqNE5LuwtM> Время воспроизведения: 0.2.15. Доступно на youtube.com. (Дата обращения 24.07.2023).
16. Van den Berg, J. Gravity-Based Robotic Cloth Folding / J. Van den Berg, S. Miller, K. Goldberg, et al. // Springer Tracts in Advanced Robotics, 2010. Vol. 68. Pp. 409-424. DOI: 10.1007/978-3-642-17452-0\_24.

17. Triantafyllou, D. Type independent hierarchical analysis for the recognition of folded garments' configuration /D. Triantafyllou, P. Koustoumpardis, N. Aspragathos // *Intelligent Service Robotics*, 2021. V. 14. DOI: 10.1007/s11370-021-00365-8.
18. Triantafyllou, D., Koustoumpardis, P., Aspragathos, N. (). Type and Fabric Agnostic Methods for Robotic Unfolding of Folded Garments// *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2022. Vol. 105, Article number: 62. DOI: 10.1007/s10846-022-01641-0.
19. VGC10 OnRobot Vacuum Gripper [Электронный ресурс]. URL: <https://tuliptechs.com/en/product/vgc10-onrobot-vacuum-gripper> (Дата обращения: 19.07.2023).
20. Kaltsas, P.I. A Review of Sensors Used on Fabric-Handling Robots // P. I. Kaltsas, P. N. Koustoumpardis, P. G. Nikolakopoulos. *Machines* 2022, 10(2), 101 [Электронный ресурс]. URL: <https://doi.org/10.3390/machines10020101> (Дата обращения 23.07.2023).
21. Löchte, C. Form-flexible Handling Technology for Automated Preforming/C. Löchte, H. Kunz, R. Schnurr et al. // THE 19-TH INTERNAT. CONF. ON COMPOSITE MATERIALS (ICCM) Montreal, Canada, 2013. URL: [https://www.researchgate.net/publication/259991119\\_Form-flexible\\_Handling\\_Technology\\_for\\_Automated\\_Preforming](https://www.researchgate.net/publication/259991119_Form-flexible_Handling_Technology_for_Automated_Preforming) (Дата обращения 25.06.2023).
22. Gershon, D.: Strategies for robotic handling of flexible sheet material // *Mechanics*, 1993. № 3(5)ю – Pp. 611–623
23. Schrimpf, J. Real-time analysis of a multi-robot sewing cell // J. Schrimpf, M. Lind and G. Mathisen. IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT), Cape Town, South Africa, 2013. Pp. 163-168. doi: 10.1109/ICIT.2013.6505666.
24. Козырев, Ю. Г. Захватные устройства и инструменты промышленных роботов. – М.: КНОРУС, 2010. – 312 с.: ил. ISBN 978-5-406-00763-1/

25. Tai, K. State of the Art Robotic Grippers and Applications // K. Tai, A.-R. El-Sayed, A.-R. El-Sayed et al. Robotics 2016, V. 5, Iss. 2. [Электронный ресурс] URL: <https://www.mdpi.com/2218-6581/5/2/11> (Дата обращения: 24.07.2023).
26. Parker, J. Robotic fabric handling for automating garment manufacturing / J. Parker, R. Dubey, F. Paul, R. Becker. // Journ. Manuf. Sci. Eng., 1983, v. 105, № 1. - P. 20.
27. Koustoumpardis, P.N.; Aspragathos, N.A. A Review of Gripping Devices for Fabric Handling. In Proceedings of the International Conference on Intelligent Manipulation and Grasping IMG04, Genova, Italy, 1–2 July 2004; pp. 229–234. URL: [https://www.researchgate.net/publication/256645552\\_A\\_Review\\_of\\_Gripping\\_Devices\\_for\\_Fabric\\_Handling](https://www.researchgate.net/publication/256645552_A_Review_of_Gripping_Devices_for_Fabric_Handling).
28. Taylor, P. Electrostatic grippers for fabric handling // P. Taylor, G. J. Monkman, G. Taylor . Proc. IEEE Int. Conf. Rob. Autom., 1988. – Pp. 431–433.
29. Taylor, P. M. Pinching grippers for the secure handling of fabric panels / P. M. Taylor, D. Pollett, M. Grießer/ Assembly Autom., 1996, vol. 16, №. 3. - Pp. 16–21.
30. Нырков, С. А. Вихревое захватное устройство робота (ВКР), 2016. Электронная библиотека ПГУ [Электронный ресурс] URL: [https://elib.pnzgu.ru/library\\_doc/6560](https://elib.pnzgu.ru/library_doc/6560) (Дата обращения: 26.07.2023).
31. Блажнов, А. А. Вихревые вакуумные захватные устройства роботов и методика их проектирования: Автореф... к.т.н. (05.02.05) . – СПб, СпбПУ Петра Великого, 2017. – 19 с.
32. Хусу, А. П. Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход / А. П. Хусу, Ю. Р. Виттенберг, В. А. Пальмов. М.: «Наука», глав. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 344 с.
33. Куличенко, А. В. Прогнозирование показателей воздухопроницаемости тканей // Технология текстильной промышленности, 2005, №1 (282). – С. 26-29.

34. Розанов, Л. Н. Вакуумная техника / Л. Н. Розанов. Учебник для студентов вузов, обучающихся по спец. «Вакуумная техника». 2-е изд. – М.: «Высшая школа», 1990. – 320 с.
35. Чупалов, В. С. Воздушные фильтры / В. С. Чупалов. Монография. – СПб.: изд-во СПГУТД, 2005. – 167 с.
36. Mykhailyshyn, Roman & Xiao, Jing. (2022). Influence of Inlet Parameters on Power Characteristics of Bernoulli Gripping Devices for Industrial Robots. Applied Sciences, № 12, 7074. 10.3390/app12147074. - 22 p. URL: [https://www.researchgate.net/publication/361994556\\_Influence\\_of\\_Inlet\\_Parameters\\_on\\_Power\\_Characteristics\\_of\\_Bernoulli\\_Gripping\\_Devices\\_for\\_Industrial\\_Robots](https://www.researchgate.net/publication/361994556_Influence_of_Inlet_Parameters_on_Power_Characteristics_of_Bernoulli_Gripping_Devices_for_Industrial_Robots).
37. Menter, F.R. A One-Equation Local Correlation-Based Transition Model //F. R. Menter, P. E. Smirnov, T. Liu et al. Flow Turbulence Combust, 2015, № 95. Pp. 583–619. <https://doi.org/10.1007/s10494-015-9622-4>.
38. Быстрова, В. Б. Исследование воздушной системы самонакладов для печатных машин: Автореф. ... канд. тех. наук. – М., 1973. – 42 с.
39. Рец, П. Я. Разработка и исследование жестких вакуумных захватных устройств промышленных роботов малой грузоподъемности. Автореф. ... к.т.н. (05.02.05) . – Ленинград, изд-во ЛПИ, 1985. – 16 с.
40. Кузовков, В. С. Разработка конструкции и исследование пневмовакuumных устройств для подачи деталей верха обуви к технологическим машинам. Автореф. ... к.т.н. (05.02.13). – М.: изд-во МТИЛП, 1983. – 22 с.
41. Кузовков, В. С. Исследование процесса захвата деталей из кож вакуумными устройствами / В. С. Кузовков, Б. В. Зайцев. Тезисы сообщений Всесоюзной научной конференции «Исследование и проектирование машин и агрегатов легкой промышленности». – М.: МТИЛП, 1978. – С. 13-15.
42. Shibata, M., Hirai, S. A Pinching Strategy for Fabrics Using Wiping Deformation // Robotics, 2016, V. 5. Is. 2. URL: <https://www.mdpi.com/2218-6581/5/2/10/htm>.



43. Rochu Soft robotic gripper [Электронный ресурс] Website:Suzhou Rochu Robotics Co.,Ltd. URL: <https://www.directindustry.com/prod/suzhou-rochu-robotics-co-ltd/product-217255-2260642.html> Дата обращения: 20.07.2023.
44. РОКАЕ Case Study - Intelligent Overlock Sewing Robot for Slipcovers [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=-ХРРЕТumaNg> Время воспроизведения: 0.1.26. Доступно на youtube.com . (Дата обращения 19.07.2023).
45. Патент RU 2 053 949 С1, МПК В65Н 3/22(2006.01), В66С 1/44(2006.01) Устройство для захвата мягких текстильных изделий Заявка: 4952371/12, 1991.06.05. Публикация: 1996.02.10. Кондратас А.В. Владелец патента: Каунасский технологический университет. – 7 с. : ил.
46. Kondratas, Alvydas. Robotic gripping device for garment handling operations and its adaptive control // Fibres and Textiles in Eastern Europe, 2006. № 13. [Электронный ресурс] URL: [https://www.researchgate.net/publication/228399238\\_Robotic\\_gripping\\_device\\_for\\_garment\\_handling\\_operations\\_and\\_its\\_adaptive\\_control](https://www.researchgate.net/publication/228399238_Robotic_gripping_device_for_garment_handling_operations_and_its_adaptive_control) (Дата обращения 24.07.2023).
47. Патент SU 1471945 А3. Устройство для отделения куска ткани из штабеля и транспортировки его на приемное основание Э. Д. Матиас. Владелец патента Дайлоп Олимпик Лимитед (AU) Заявка: 06.05.85. Опубликовано: 07. 04. 89: Бюл. № 13. – 7 с. : ил.
48. Ku, S. Delicate fabric handling using a soft robotic gripper with embedded microneedles // S. Ku, J. Myeong, H.-Y. Kim, and Y.-L. Park. IEEE Robotics and Automation Letters: in 2020 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2020, Las Vegas, NV, USA. URL: <https://ras.papercept.net/images/temp/IROS/files/2570.pdf> .
49. Hou, Y. C. A review on modeling of flexible deformable object for dexterous robotic manipulation // Y. C. Hou, K. S. M. Sahari, D. N. T. How. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2019, v. 16(3): 1729881419848,894]. DOI: [10.1177/1729881419848894](https://doi.org/10.1177/1729881419848894).

50. Hauth, M. Analysis of numerical methods for the simulation of deformable models / M. Hauth, O. Etmuss, W. Strasser. *Vis Comput* **19**, 581–600 (2003). <https://doi.org/10.1007/s00371-003-0206-2>.
51. Елисеев В. В. *Механика упругих тел.* – СПб.: изд-во СПбГПУ, 2003. – 336 с.
52. Lomov, S.V. Textile composites: Modelling strategies / S.V. Lomov [et al] // *Composites. Part A: supplied science and manufacturing*, 2001. – vol. 32, № 10. – Pp. 1379-1394.
53. Эшелби, Д. *Континуальная теория дислокаций.* – М.: ИЛ, 1963.– 247 с.
54. Адамов, А. А. *Методы прикладной вязкоупругости* /А. А. Адамов, В. П. Матвеевко, Н. А. Труфанов, И. Н. Шардаков. Изд-во: УрО РАН, 2003. — 412 с. ISBN: 5-7691-1377-4.
55. Misios, I.H., Koustoumpardis P.N., Aspragathos N.A. Gain Scheduled PID Force Control of a Robotic Arm for Sewing Fabrics // I.H.Misios, P.N.Koustoumpardis, N.A.Aspragathos. In: Berns K., Görges D. (eds) *Advances in Service and Industrial Robotics.* – Pp 104-114. URL: [https://www.researchgate.net/publication/332948394\\_Gain\\_Scheduled\\_PID\\_Force\\_Control\\_of\\_a\\_Robotic\\_Arm\\_for\\_Sewing\\_Fabrics](https://www.researchgate.net/publication/332948394_Gain_Scheduled_PID_Force_Control_of_a_Robotic_Arm_for_Sewing_Fabrics).
56. Durville, D. Finite element simulation of textile materials at the fiber scale/DOI: [10.48550/arXiv.0912.1268](https://arxiv.org/abs/0912.1268), 2009. {Электронный ресурс}URL: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0912/0912.1268.pdf> (Дата обращения 26.07.2023).
57. Клебанов, Я. М. Моделирование неупругого поведения тканых текстильных материалов на основе метода обобщенных моделей, // Я. М. Клебанов, Е. Н. Ерохина. Труды 3-ей Всеросс. науч. конф. Ч. 1. Матем. модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Матем. моделирование и краев. задачи. СамГТУ, Самара, 2006, С. 105-107.
58. Hockney, R.W. *Computer simulation using particles* / R.W. Hockney, J.W. Eastwood. CRC Press, 1988. – 540 p.

59. Eberhardt, B. A particle system approach to knitted textiles // B. Eberhardt, A. Weber. *Computers and Graphics*, 1999, v. 23, № 4. Pp. 599-606.
60. Ландовская, И. Е. Компьютерное моделирование ткани / И. Е. Ландовская, В. В. Ландовский // *Инновации в науке*. № 8 (21): сборник статей по материалам XXIV международной научно-практической конференции. — Новосибирск: Изд. «СибАК», 2013. — С. 31-38.
61. Eberhardt, B. Implicit-explicit schemes for fast animation with particle systems // B. Eberhardt, O. Eitzmuss, M. Hauth. *Proceedings of the Eurographics computer animation and simulation workshop*, Interlaken, Switzerland, 2000. — Pp. 137–151.
62. Baraff, D. Large steps in cloth simulation / D. Baraff, A. Witkin In: Cohen M. (ed) *Proceedings of the 25th annual conference on computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH '98)*, Orlando, FL, 1998. — Pp. 43–54. <https://doi.org/10.1145/280814.280821>.
63. Аэро, Э. Л. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Э. Л. Аэро, Е. В. Кувшинский. *ФТГ*, 1960. — Т. 2, № 7. — С. 1399–1409.
64. Еремеев, В. А. Механика упругих оболочек / В. А. Еремеев, Л. М. Зубов, отв. ред. В. А. Бабешко. — М.: Наука, Юж. НЦ РАН. — 2008. — 280 с.
65. Жилин, П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек / Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. — 167 с.
66. Горшков, А. А. Основы теории упругих тонких оболочек : учебное пособие / А. А. Горшков, А. Я. Астахова, Н. Ю. Цыбин. — М.: МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2016. — 231 с. — ISBN 978-5-7264-1315-0. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/49872.html> (Дата обращения: 29.07.2023).
67. Кузьмина, Р. П. Мягкие оболочки. — М.: «Факториал Пресс», 2005. — 256 с.
68. Полякова Е. В., Прикладные задачи механики мягких оболочек и тканей / Е. В. Полякова, В. А. Чайкин. — СПб.: изд-во СПГУТД, 2006. — 193 с.

69. Сахаров, А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров [и др.] – Киев: Вища шк., 1982. – 480 с.
70. Shen, J. Deformable object modeling using the time-dependent finite element method // J. Shen, Y. H. Yang. Graphical Models and Image Processing, 1998. № 60(6) – Pp. 461–487. DOI:[10.1006/gmip.1998.0484](https://doi.org/10.1006/gmip.1998.0484) Corpus ID: 2688927.
71. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии / Изд. 4-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 432 с.
72. Норден, А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: «Ленанд», 2019. – 248 с. ISBN 978-5-9710-6235-6.
73. Новожилов, В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
74. Погорелов А. В. Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. – Киев: «Наукова думка», 1998. – 200 с.
75. Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек: Учеб. пособие для строит. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1987. – 256 с.
76. Усов, А.Г. Учет параметров напряженного состояния материала при моделировании больших изгибов упругих малорастяжимых листов // Известия вузов. Технология легкой промышленности. – 2012. – Т. 16, № 2. – С. 65-69.
77. Васильева А.В. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А.В. Васильева и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
78. Гантмахер, Ф. Р. Лекции по аналитической механике : монография / Ф. Р. Гантмахер; под ред. Е. С. Пятницкого. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 264 с. — ISBN 978-5-9221-0067-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/47536> (Дата обращения: 11.08.2023).
79. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 288 с.

80. Mahadevan L. The shape of a Möbius band / L. Mahadevan, J. B. Keller // Proceedings of the Royal Society of London, 1993. Series A, 1440. – No 409. – Pp. 149-162.
81. Hangan T. Elastic strips and differential geometry // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 2005. - Vol. 63, No 2. – Pp. 179-196.
82. Sadowsky M. Ein elementarer Beweis für die Existenz eines abwickelbaren Möbiusschen Bandes und Zurückführung des geometrischen Problems auf ein Variationsproblem // Sitzungsberichte der Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse. – Berl.: 1930, 22. – S. 412–415. Translation and interpretation by D. F. Hinz & E. Fried: <https://arxiv.org/pdf/1408.3035> [Электронный ресурс]. Дата обращения 24.02.2017.
83. Wunderlich W. Über ein abwickelbares Möbiusband // Monatshefte Math., 1962. – Vol. 66, № 3. – Pp. 276–289.
84. Starostin E. L. The shape of a Möbius strip / E. L. Starostin, G. H. M. van der Heijden // Nat. Mater., 2007. – Vol. 6, № 8. – Pp. 563-567.
85. Starostin E. L. Equilibrium shapes with stress localisation for inextensible elastic Möbius and other strips / E. L. Starostin, G. H. M. van der Heijden // Journal of Elasticity, 2015. – Vol. 119, Iss. 1. – Pp. 67–112. URL: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10659-014-9495-0> . Дата обращения 24.02.2017.
86. Cerda E. The elements of draping / E. Cerda , L. Mahadevan, J. M. Pasini // Proc. of the National Acad. of Sc. of the USA, 2004. – Vol. 101, №7. – Pp. 1806-1810.
87. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
88. Струченков, В. И. Прикладные задачи оптимизации. Модели, методы, алгоритмы: Практическое пособие / Струченков В.И. - М.:СОЛОН-Пр., 2016. - 314 с. [Электронный ресурс] – URL: <http://znanium.com/catalog/product/905033>, дата обращения: 28.07.2023

89. Механические свойства тканей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.otkani.ru/property/mecanicalproperty/22.html>– Дата доступа: 17.04.2023.
90. Мощность всасывания: что это такое и как будем измерять [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ixbt.com/home/air-watt-method.shtml> (Дата обращения 05.05.2021).
91. Лурье, А. И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 826 с.
92. Топоногов, В. А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. – М.: Физматлит, 2012. – 224 с.
93. Cerda, E. Conical dislocations in crumpling / E. Cerda, S. Chaieb, F. Melo, L. Mahadevan // Nature, 1999, v. 401. P. 46-49.
94. Cerda, E. Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets / E. Cerda, L. Mahadevan // Physical Rev. Letters, 1998, Vol. 80, № 11. P. 2358 – 2361.
95. Witten, T. A. Stress focusing in elastic sheets // Rev. Mod. Phys., 2007. - Vol 79, Iss 2 [Электронный ресурс]. URL: <https://jfi.uchicago.edu/~tten/Crumpling/RMPpreprint.pdf> (Дата обращения 21.05.2021).
96. Севостьянов, Г. Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой / Г. Д. Севостьянов // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195 – 198.
97. Mahadevan, L. Periodic folding of thin sheets / L. Mahadevan, J. B. Keller // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1995. V. 55(6) – Pp. 1609-1624.
98. Попов, Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней.– М.: Наука, 1986.– 296с.
99. Möller, T. A. A fast triangle-triangle intersection test / T. Moller // Journal of Graphics Tools. A. K. Peters, Ltd. Natick MA, USA – 1997. – V. 2, Issue 2. – Pp. 25–30. URL: <http://web.stanford.edu/class/cs277/resources/papers/Moller1997b.pdf> (дата обращения 08.07.2016).

100. Усов, А. Г. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2012612143. Исследование конической симметричной формы изгиба тяжелого круглого упругого листа, закрепленного в центральной точке («bendconcirc») / / Оpubл. 24.02.2012. –Эл. бюлл. «Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем». – 2012. – № 2. – С. 520.
101. Моделирование конического изгиба гибкого лоскута произвольной формы (программа для ЭВМ) Свидетельство о гос. регистрации № 2022663202 от 13.07.2022. Усов А. Г. (RU), Степанов М.В. (RU), Аль-Абу Д.К.М. Хамдан (IQ).
102. Shamos, M. I. Computational geometry. Diss. for the Degree of PhD. Yale University, USA, 1978. — 244 с. (С. 76).
103. Костюк, Ю. Л. Алгоритмы векторизации цветных растровых изображений на основе триангуляции и их реализация /Ю. Л. Костюк, А. Б. Кон, Ю. Л. Новиков // Вестник ТГУ, 2002. № 275. С. 161-168.
104. Моделирование сложной конической формы изгиба круглого упругого листа по эскизу его края (программа для ЭВМ) Свидетельство о гос. регистрации № 2023614188 от 14.02.2023. Усов А. Г., Степанов М. В. (RU), Аль-Абу Д.К.М. Хамдан (IQ).
105. Исследование симметричного изгиба тяжелого круглого упругого листа, закрепленного в круглой области («bendcapre») (программа для ЭВМ). Свидетельство о гос. регистрации № 2012612142 от 24.02.2012. Усов А.Г.
106. Lin, M. C. Efficient collision detection for animation and robotics / M. C. Lin. A dissertation... PhD. – University of California, Berkeley, CA. – 1993. – 147 p. URL: <https://wwwx.cs.unc.edu/~geom/papers/documents/dissertations/lin93.pdf>. (Дата обращения 08.08.2023).
107. Исследование регулярного изгиба тяжелого прямоугольного упругого листа, захваченного по образующей клещевым захватом («bendjaw») (программа для ЭВМ). Свидетельство о гос. регистрации № 2012612141 от 24.02.2012. Усов А. Г.

108. Голубев, А. Г. Аэродинамика: учебник / А. Г. Голубев, А. С. Епихин, В. Т. Калугин [и др.]; под редакцией В. Т. Калугина. — 2-е изд. — М.: Московский гос. технический ун-т им. Н.Э. Баумана, 2017. — 608 с.
109. Коэффициент аэродинамического сопротивления [Электронный ресурс] URL: [http://dmilvdv.narod.ru/Translate/FVD/drag\\_coefficient.html](http://dmilvdv.narod.ru/Translate/FVD/drag_coefficient.html) (Дата обращения 24.03.2023).
110. Крайко, А. Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУПРЕСС, 2010. — 430 с.
111. ГОСТ 12038-77. Материалы текстильные и изделия из них. Метод определения воздухопроницаемости. — М.: ИПК Изд-во стандартов, 2003. — 11 с.
112. Проницаемость [Электронный ресурс]. URL: <https://msd.com.ua/shvejnoe-proizvodstvo/pronicaemost/> (Дата обращения 10.02.2021).
113. Гольдштейн, Р. В. Механика сплошных сред. Часть 1 / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов. — М.: Физматлит, 2000. — 256 с. — ISBN 5-02-015555-1.
114. Механические свойства тканей [Электронный ресурс]. URL: <http://www.otkani.ru/property/mecanicalproperty/22.html>. Дата доступа: 17.04.2023.
115. ГОСТ Р 57470-2017. Материалы текстильные. Методы испытаний нетканых материалов. Часть 9. Определение драпируемости, включая коэффициент драпируемости / Фед. агентство по тех. рег. и метрологии. ISO 9073-9-2008 MOD/ —12 с.



**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ

**№ 2023614188**

**«Моделирование сложной конической формы изгиба  
круглого упругого листа по эскизу его края  
(«bendconvacsim»»)**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования «Санкт-  
Петербургский государственный университет  
промышленных технологий и дизайна» (RU)*

Авторы: *Усов Алексей Георгиевич (RU), Степанов Михаил  
Витальевич (RU), Аль Абу Джаиш Кусай Махди Хамдан  
(IQ)*

Заявка № **2023613023**

Дата поступления **14 февраля 2023 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **27 февраля 2023 г.**

*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

*Ю.С. Зубов*



## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022663302

**«Моделирование конического изгиба гибкого лоскута произвольной формы»**

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна» (RU)**

Авторы: **Усов Алексей Георгиевич (RU), Степанов Михаил Витальевич (RU), Аль Абу Джаиаш Кусаи Махди Хамдан (IQ)**

Заявка № **2022662591**Дата поступления **04 июля 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **13 июля 2022 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

Рисунок А.2 - Свидетельство № 2022662591 от 13.07.2022